

З РІЗНИЦЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Мета: засвоїти основні засади різницевого методу та навчитися їх застосовувати для розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних.

Тема 9. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (3.2)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + i h \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$. Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні

(3.1) похідні замінимо мкінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

Випишемо розклади за формулою Маклорена до h^3 включно. Потім додамо і віднімемо розклади, отримаємо:

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3);$$

$$y_{i-1} = y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3);$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2h y'(x_i) + o(h^2) \Rightarrow y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + o(h)$$

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2 y''(x_i) + o(h^3) \Rightarrow y''(x_i) = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + o(h)$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (3.1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.3)$$

Тепер розглянемо крайові умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через скінченні різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0:$$

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + o(h^2) \Rightarrow 4y_1 = 4y_0 + 4h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2);$$

$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2);$$

$$\overline{4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2h y'(x_0) + o(h^2) \Rightarrow}$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h)$$

$$x = b = x_n$$

$$y_{n-1} = y_n - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + o(h^2) \Rightarrow 4y_{n-1} = 4y_n - 4h y'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2);$$

$$y_{n-2} = y_n - 2h y'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2);$$

$$\overline{4y_{n-1} - y_{n-2} = 3y_n - 2h y'(x_n) + o(h^2) \Rightarrow}$$

$$y'(x_n) = -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + o(h).$$

Отримане дозволяє записати крайові умови у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A; \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (3.4)$$

Таким чином (3.3) – (3.4) утворює систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи систему, можна знайти значення функції $y(x)$ у вузлах розбиття.

Лабораторна робота №5 «Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння»

Мета: навчитися застосовувати метод скінченних різниць для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Завдання до лабораторної роботи №5

Методом скінченних різниць розв'язати крайову задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \end{cases} \quad (3.6)$$

Завдання вибираються табл. 3.1. Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 3.1 – Таблиця варіантів лабораторної роботи №5

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-2	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2.7
k_2	-4.8	-3.1	2.5	1.7	2	1.2	2	3.2	3	-1.3

Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.5	1.3	2.4	-1	0	1	0	0.8	-4	0
B	0.5	0.7	0	1	-2	0.5	0	0.3	-0.6	2
a	1	-1	-1	0.5	0	2	-1	-0.5	-1	0
b	2	0	1.4	1.5	1	3	0	1.5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0.1	0.1	0.25	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
$p(x)$	$k_1 x$	$\frac{k_1}{x+k_2}$	$k_1 x + k_2$	$k_2 x$	$k_2 x^2 - k_1$	$k_1 - x$	$k_2 + x^2$	$k_1 x^3$	$k_2 x^3 - k_1$	$x^2 k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1 x}{x^2 + k_2^2}$	$k_2 x$	$k_1 x^2$	$k_2 x^3 + k_1$	$k_2 - x$	$k_2 + x^3$	$k_2 x$	$k_2 x - k_1$	$k_1 x + k_2$	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + k_1^2}}$	$k_2 + x^3$	$\frac{k_2 + x}{x^2 - k_1}$	$\frac{x^2 + k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1 x - k_2}$	$\sqrt{x^2 + k_2^2}$	$\frac{k_1 x^2}{k_2 + x}$	$\frac{1}{k_2 x^2 - k_1}$	$k_2 x^2 + k_1 x$	$\frac{k_1 x + k_2}{(k_1 - x)^3}$

h - крок розбиття відрізка $[a, b]$ в методі кінцевих різниць (див. індивідуальне завдання).

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №5

Задача 3.1 Розв'язати задачу (3.5) – (3.6) методом скінченних різниць, якщо

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5, \\ \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0;$$

Розв'язання. Реалізуємо метод в системі Maple.

- Щоб знайти кількість проміжків розбиття N відрізка $[a; b]$, знаючи крок h , можна застосувати оператор $N := \text{trunc}((b - a) / h)$;
- Визначаємо вузли розбиття:
> for i from 0 to N do $X[i] := h*i + a$ od;
- Утворюємо рівняння (3.3), що відповідають даному звичайному диференціальному рівнянню:
> for i to $N-1$ do
 $p_{ii} := \text{subs}(x = X[i], p(x))$;
 $q_i := \text{subs}(x = X[i], q(x))$; $f_{ii} := \text{subs}(x = X[i], f(x))$;
 $eq[i] := \text{evalf}((y[i+1]-2*y[i]+y[i-1])/h^2 + p_{ii}*(y[i+1]-y[i-1])/(2*h) + q_i*y[i] - f_{ii})$
od;
- Доповнюємо систему рівняннями (6.3) що відповідають крайовим умовам:
> $eq[0] := \alpha_0*y[0] + \alpha_1*(-3*y[0] + 4*y[1] - y[2])/(2*h) - A$;
 $eq[N] := \beta_0*y[N] + \beta_1*(3*y[N] - 4*y[N-1] + y[N-2])/(2*h) - B$;
- Таким чином утворено систему із $N+1$ рівняння $\{seq(eq[j], j = 0..N)\}$ відносно такої ж кількості змінних $\{seq(y[j], j = 0..N)\}$. СЛАР може бути розв'язаною за допомогою функціонала solve.
- Для порівняння результатів побудуємо графіки розв'язків, отриманих методом Галеркіна в задачі 2.6 (суцільна зелена лінія на рис. 3.1), а також методом кінцевих різниць (точкова лінія, побудована за точками, що відповідають вузлам).
- Отже, спостерігаємо високу узгодженість результатів.

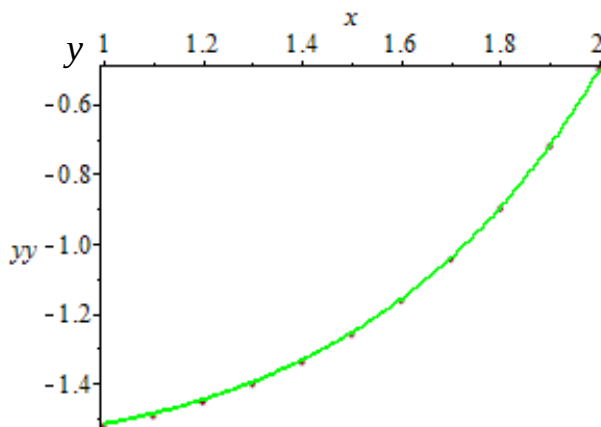


Рис. 3.1 Подання результатів розв'язання задачі 3.1

Контрольні питання до лабораторної роботи №5

1. Викласти ідею виведення різницевих відношень. Яка формула покладена в основу виведення різницевих відношень? Яка точність різницевих відношень, що використовуються у внутрішніх вузлах та кінцевих? Чим

суттєво відрізняються різницеві відношення у внутрішніх та кінцевих вузлах?

2. Сутність методу кінцевих різниць.
3. Чим метод кінцевих різниць відрізняється від наближених методів, що вивчалися в цьому курсі?

Самостійна робота №1 «Метод скінченних різниць розв'язання задачі Штурма-Ліувіля»

Мета: вивчити сутність методу скінченних різниць до розв'язання задачі Штурма-Ліувіля та навчитися його реалізовувати для конкретних задач.

Завдання до самостійної роботи №1

Розв'язати задачу Штурма-Ліувіля методом кінцевих різниць відповідно до індивідуальних завдань, наведених в табл. 2.2.

Тема 10. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для рівнянь еліптичного типу

Розглянемо крайову задачу для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G, \quad (3.7)$$

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3.8)$$

де G – деяка скінчена область (рис. 3.2), Γ – межа області G , $f(x, y)$ – задана на G функція, $\phi(x, y)$ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв'язання задачі (3.7), (3.8) полягає у наступному. Будуємо квадратну сітку з кроком $h = 1/M$ (M – натуральне): $x_k = kh$, $y_m = mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи межу Γ , частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (3.7), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} \quad (3.9)$$

де $V_{km} = V(x_k, y_m)$ – наближений розв'язок задачі (3.7), (3.8).

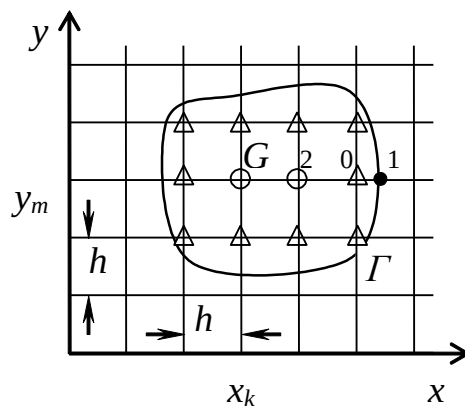


Рис.3.2 Схема використання сітки в методі скінченних різниць