

В табл. 3.3 співставлено результати для випадку рівняння Лапласа, а в табл. 3.4 – Пуассона. Відхилення в результатах становить до 14%.

Таблиця 3.3 – Зіставлення результатів розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа, отриманих двома методами

| $x_i$ | $y_j$ | Метод скінченних різниць | Метод Рітца |
|-------|-------|--------------------------|-------------|
| -1.25 | 4.25  | 5.822507010              | 5.850067812 |
| -0.5  | 4     | 4.324959506              | 4.678348986 |
| -1.5  | -3.75 | 6.379314915              | 6.412557045 |

Таблиця 3.4 – Зіставлення результатів розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона, отриманих двома методами

| $x_i$ | $y_j$ | Метод скінченних різниць | Метод Рітца |
|-------|-------|--------------------------|-------------|
| -1.25 | 3,5   | 15.47767245              | 15.65203466 |
| 0.75  | 3.25  | 18.1009523               | 18.62563842 |
| 1.25  | 3.75  | 13.86975877              | 14.05630631 |

### Контрольні питання до лабораторної роботи №6

1. Сутність різницевого методу розв'язання крайової задачі для рівняння еліптичного виду.
2. Яка похибка методу?

**Тема 11. Різницевий метод розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння.**

Розглянемо мішану задачу для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = p(x), \quad u_t'(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.13)$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.14)$$

де  $f(x, t)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  – задані досить гладкі функції, причому  $p(0) = \phi(0)$ ,  $p(1) = \psi(0)$ .

Наближений розв'язок  $y_k^v = y(x_k, t_v)$  будемо шукати різницевим методом на сітці  $(x_k, t_v)$ , де  $x_k = kh$ ,  $t_v = v\tau$ , тут  $h = 1/N$ ,  $\tau = T/M$  – кроки за  $x$  і  $t$  ( $N$  і  $M$  – натуральні).

Заміняючи в рівнянні (3.12) частинні похідні  $u''_{tt}$ ,  $u''_{xx}$  різницевиими відношеннями другого порядку в напрямку  $t$  і  $x$  відповідно, перетворимо його до вигляду

$$\frac{y_k^{v+1} - 2y_k^v + y_k^{v-1}}{\tau^2} - \frac{y_{k-1}^v - 2y_k^v + y_{k+1}^v}{h^2} = f_k^v, \quad (3.15)$$

де  $k=1,2,\dots, N-1$ ;  $v=1,2,\dots, M-1$ ;  $f_k^v = f(x_k, t_v)$ .

Розв'язавши це рівняння явно відносно  $y_k^{v+1}$ , одержимо

$$y_k^{v+1} = \tau^2 \left[ f_k^v + \frac{y_{k-1}^v + y_{k+1}^v}{h^2} \right] + 2 \left( 1 - \frac{\tau^2}{h^2} \right) y_k^v - y_k^{v-1}, \quad (3.16)$$

$$k=1,2,\dots, N-1; v=1,2,\dots, M-1.$$

Формули (3.16) дозволяють заповнити комірки табл. 3.5, зафарбовані зеленим.

Але для того, щоб знайти значення різницевого розв'язку на  $v+1$ -ому шарі, потрібно мати вже обчислені значення шуканого розв'язку на двох попередніх шарах. Тому для початку розрахунків потрібно одержати різницевий розв'язок окремо на шарах, що відповідають початковим значенням  $v=0$  і  $v=1$ , тобто наближені розв'язки  $y_k^0$  і  $y_k^1$ .

З першої крайової умови (3.13) маємо:

$$y_k^0 = p_k, \quad k=1,2,\dots, N-1, \quad (3.17)$$

де  $p_k = p(x_k)$ . Формули (3.17) дозволяють заповнити комірки табл. 3.5, зафарбовані блакитним.

Таблиця 3.5 – Схема заповнення шарів значень функції в задачі для хвильового рівняння

| $\begin{matrix} k \\ x_k \\ \nu \\ t_\nu \end{matrix}$ |             | 0             | 1             | ... | $k$           | ... | $N-1$             | $N$           |
|--------------------------------------------------------|-------------|---------------|---------------|-----|---------------|-----|-------------------|---------------|
|                                                        |             | $x_0$         | $x_1$         | ... | $x_k$         | ... | $x_{N-1}$         | $x_N$         |
| 0                                                      | $t_0$       | $y_0^0$       | $y_1^0$       | ... | $y_k^0$       | ... | $y_{N-1}^0$       | $y_N^0$       |
| 1                                                      | $t_1$       | $y_0^1$       | $y_1^1$       | ... | $y_k^1$       | ... | $y_{N-1}^1$       | $y_N^1$       |
| 2                                                      | $t_2$       | $y_0^2$       | $y_1^2$       | ... | $y_k^2$       | ... | $y_{N-1}^2$       | $y_N^2$       |
| ...                                                    | ...         | ...           | ...           | ... | ...           | ... | ...               | ...           |
| $\nu-1$                                                | $t_{\nu-1}$ | $y_0^{\nu-1}$ | $y_1^{\nu-1}$ | ... | $y_k^{\nu-1}$ | ... | $y_{N-1}^{\nu-1}$ | $y_N^{\nu-1}$ |
| $\nu$                                                  | $t_\nu$     | $y_0^\nu$     | $y_1^\nu$     | ... | $y_k^\nu$     | ... | $y_{N-1}^\nu$     | $y_N^\nu$     |
| $\nu+1$                                                | $t_{\nu+1}$ | $y_0^{\nu+1}$ | $y_1^{\nu+1}$ | ... | $y_k^{\nu+1}$ | ... | $y_{N-1}^{\nu+1}$ | $y_N^{\nu+1}$ |
| ...                                                    | ...         | ...           | ...           | ... | ...           | ... | ...               | ...           |
| $M-1$                                                  | $t_{M-1}$   | $y_0^{M-1}$   | $y_1^{M-1}$   | ... | $y_k^{M-1}$   | ... | $y_{N-1}^{M-1}$   | $y_N^{M-1}$   |
| $M$                                                    | $t_M$       | $y_0^M$       | $y_1^M$       | ... | $y_k^M$       | ... | $y_{N-1}^M$       | $y_N^M$       |

Отримаємо  $y_k^1$  при  $k=1,2,\dots, N-1$ . Для цього напишемо розклад за формулою Маклорена за змінною  $t$ , утримуючи три його перші члени:

$$u(x_k, t_1) = u(x_k, 0) + \tau u'_t(x_k, 0) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x_k, 0) + o(h^2 + \tau^2). \quad (3.18)$$

Застосуємо позначення для функцій у вузлах сітки

$$u(x_k, t_1) = y_k^1, \quad (3.19)$$

початкові умови (3.13)

$$u(x_k, 0) = y_k^0 = p_k, \quad u'_t(x_k, 0) = q(x_k), \quad (3.20)$$

де  $q_k = q(x_k)$ , рівняння (3.12) та умови (3.13)

$$u''_{tt}(x_k, 0) = f(x_k, 0) + u''_{xx}(x_k, 0) = f_k^0 + p''(x_k). \quad (3.21)$$

Використаємо подання  $p''(x_k)$  різницеvim відношенням другого порядку

$$p''(x_k) = \frac{p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}}{h^2}. \quad (3.22)$$

Підставимо співвідношення (3.19) – (3.22) до подання (3.18), прийдемо до розрахункової формули

$$y_k^1 = p_k + \tau q_k + \frac{\tau^2}{2} \left( f_k^0 + \frac{p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}}{h^2} \right) \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (3.23)$$

Для заповнення комірок табл. 3.5, зафарбованих сірим.

Нарешті, відповідно до крайових умов (3.14) маємо

$$y_0^v = \phi^v, \quad y_N^v = \psi^v, \quad v = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (3.24)$$

де  $\phi^v = \phi(t_v)$ ,  $\psi^v = \psi(t_v)$ . Відповідні комірки табл. 2.5 виділені помаранчевим та рожеvim кольорами.

Тепер різницева схема (3.16), (3.17), (3.23), (3.24) цілком визначена і може застосовуватися для розрахунків. Відзначимо, що ця схема явна тришарова, умовно стійка.

Можна показати, що якщо  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , причому  $\tau/h \leq c < 1$ ,  $c = \text{const}$ , то розв'язок різницевої схеми (5)-(8) збігається до розв'язку задачі (3.12) – (3.14) у наступному сенсі:

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau^2),$$

$$\text{де } \|u - y\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \left( h \sum_{k=1}^{M-1} (u_k^v - y_k^v)^2 \right)^{1/2}.$$

Отже, схема (3.16), (3.17), (3.23), (3.24) має другий порядок точності і за  $h$ , і за  $\tau$ .

### Лабораторна робота №7 «Метод скінченних різниць розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння»

**Мета:** навчитися застосовувати метод скінченних різниць до розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння.

#### Завдання до лабораторної роботи №7

Розв'яжіть мішану задачу для хвильового рівняння різницеvim методом при наступних значеннях вихідних параметрів для індивідуальних варіантів, причому  $T = 0,5$ ;  $h = 0,25$ ;  $\tau = 0,1$ .

Номер варіанта (табл. 3.6) визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 3.6 Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №7

|                                                                                                                                             |                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| № 1. $f(x, t) = 1 + 0,2t \sin x - t^2$ ,<br>$p(x) = x(x+1)$ , $q(x) = \cos x$ ,<br>$\phi(t) = 0$ , $\psi(t) = 2(t+1)$ .                     | №2. $f(x, t) = \cos(x+t) + 0,5(x-t)$ ,<br>$p(x) = x \cos \pi x$ , $q(x) = x(2-x)$ ,<br>$\phi(t) = 2t$ , $\psi(t) = -1$ .                                |
| № 3. $f(x, t) = \frac{\cos x}{x+1} - 0,5t^2$ ,<br>$p(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ ,<br>$q(x) = x^2$ ,<br>$\phi(t) = 1+2t$ , $\psi(t) = 0$ .   | № 4. $f(x, t) = (1-t^2) \cos x + 0,6t$ ,<br>$p(x) = (x+0,5)(x-1)$ ,<br>$q(x) = \sin(x+0,2)$ ,<br>$\phi(t) = t-0,5$ , $\psi(t) = 3t$ .                   |
| № 5. $f(x, t) = 1 + 0,4t \sin x - 1,5t^2$ ,<br>$p(x) = 2x(x+1) + 0,3$ ,<br>$q(x) = 2 \sin x$ ,<br>$\phi(t) = 0,3$ , $\psi(t) = 4,3+t$ .     | № 6. $f(x, t) = \frac{\cos t}{x+2} + 0,3t^2$ ,<br>$p(x) = (x+0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$ ,<br>$q(x) = 1+x^2$ ,<br>$\phi(t) = 0$ , $\psi(t) = 1,2(t+1)$ . |
| № 7. $f(x, t) = \cos(1,5x+t) + (x-t)$ ,<br>$p(x) = x \sin \pi x$ ,<br>$q(x) = (x+1)^2$ ,<br>$\phi(t) = 2t$ , $\psi(t) = 0$ .                | № 8. $f(x, t) = 1 - \sin(x+t) + \frac{0,5t}{x+2}$ ,<br>$p(x) = 3x(1-x)$ ,<br>$q(x) = \cos(x+0,5)$ ,<br>$\phi(t) = 2t$ , $\psi(t) = 0$ .                 |
| № 9. $f(x, t) = \frac{\cos t}{1,5+x} + 0,1t^2$ ,<br>$p(x) = x(2x-0,5)$ ,<br>$q(x) = \cos 2x$ ,<br>$\phi(t) = t^2$ , $\psi(t) = 4,5-3t$ .    | № 10. $f(x, t) = 0,6 \sin x - 1,25t^2 + 1$ ,<br>$p(x) = (x+1) \sin \pi x$ ,<br>$q(x) = x^2 + x$ ,<br>$\phi(t) = 0$ , $\psi(t) = 0,5t$ .                 |
| № 11. $f(x, t) = \cos(2x+t) + 1,5(x-t)$ ,<br>$p(x) = (1-x) \cos \frac{\pi x}{2}$ ,<br>$q(x) = 2x+1$ ,<br>$\phi(t) = 2t+1$ , $\psi(t) = 0$ . | № 12. $f(x, t) = 1 - \frac{0,1t}{x+2} - \sin(2x+t)$ ,<br>$p(x) = 0,5x(x+1)$ ,<br>$q(x) = x \cos x$ ,<br>$\phi(t) = 2t^2$ , $\psi(t) = 1$ .              |

|                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>№ 13. <math>f(x, t) = \frac{\cos t}{1,25 + x} - 0,1t^2</math>,</p> <p><math>p(x) = 0,5(x^2 + 1)</math>,</p> <p><math>q(x) = 0,5(x^2 + 1)</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5 + 3t</math>, <math>\psi(t) = 1</math>.</p>         | <p>№ 14. <math>f(x, t) = 1 + 0,8t \sin x - 2t^2</math>,</p> <p><math>p(x) = (x + 1) \sin \frac{\pi x}{2}</math>,</p> <p><math>q(x) = 1 - x^2</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5t</math>, <math>\psi(t) = 2</math>.</p>             |
| <p>№ 15. <math>f(x, t) = \cos(1,5x + t) + 1,5(x - t)</math>,</p> <p><math>p(x) = x^2 \cos \pi x</math>,</p> <p><math>q(x) = x^2(x + 1)</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5t</math>, <math>\psi(t) = t - 1</math>.</p>              | <p>№ 16. <math>f(x, t) = 1 - \sin(2x + t) + \frac{0,3t}{x + 2}</math>,</p> <p><math>p(x) = (1 - x^2) \cos \pi x</math>,</p> <p><math>q(x) = 2x + 0,6</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 1 + 0,4t</math>, <math>\psi(t) = 0</math>.</p> |
| <p>№ 17. <math>f(x, t) = \frac{\cos t}{1,75 + x} - 0,5t^2</math>,</p> <p><math>p(x) = (x + 0,5)^2</math>,</p> <p><math>q(x) = (x + 1) \sin x</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5(0,5 + t)</math>, <math>\psi(t) = 2,25</math>.</p> | <p>№ 18. <math>f(x, t) = 1 + (1 - x) \sin t - (2 + x)t</math>,</p> <p><math>p(x) = 1,2x - x^2</math>,</p> <p><math>q(x) = (x + 0,6) \sin x</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0</math>, <math>\psi(t) = 0,2 + 0,5t</math>.</p>         |
| <p>№ 19. <math>f(x, t) = (0,8 - t^2) \cos t + 0,3t</math>,</p> <p><math>p(x) = (x + 0,5)(x + 1)</math>,</p> <p><math>q(x) = \cos(x + 0,3)</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5</math>, <math>\psi(t) = 3 - 2t</math>.</p>           | <p>№ 20. <math>f(x, t) = 1 + 2,2 \sin x + 1,5t^2</math>,</p> <p><math>p(x) = 0,5(x + 1)^2</math>,</p> <p><math>q(x) = (x + 0,5) \cos \pi x</math>,</p> <p><math>\phi(t) = 0,5</math>, <math>\psi(t) = 2 - 3t</math>.</p>           |

### Методичні рекомендації до лабораторної роботи №7

#### Задача 3.3 Розв'язати хвильову задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(x - t) + \frac{1,25t}{1,5 + x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0,5;$$

$$u(x, 0) = (x + 0,6) \sin \frac{\pi x}{2}; \quad u'_t(x, 0) = 2,5 - 1,5x^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, t) = t; \quad u(1, t) = 1,6 + 0,2t; \quad 0 \leq t \leq 0,5.$$

**Розв'язання.** Покладемо  $N = 4, M = 5$ , тоді  $h = 0,25$ ,  $\tau = 0,1$ , і співвідношення  $\frac{\tau}{h} < 1$  буде дотримано.

- Вводимо дані функції

$$> f := \cos(x-t) + 1,25*t/(1,5+x); \quad p := (x+.6)*\sin((1/2)*\text{Pi}*x); \quad q := 2,5-1,5*x^2;$$

$$\text{phi} := t; \quad \text{psi} := 1,6+.2*t;$$

- Послідовно використовуємо розрахункові формули.

Спочатку формулу (3.17):

```

> for k from 0 to N do
  xx[k] := 0+h*k;
  pp[k] := evalf(subs(x = xx[k], p));
  y[0, k] := pp[k] od:

```

Потім формули (3.24):

```

> for nu from 0 to M do
  tt[nu] := 0+tau*nu;
  y[nu, 0] := evalf(subs(t = tt[nu], phi));
  y[nu, N] := evalf(subs(t = tt[nu], psi)) od:

```

Далі – (3.23):

```

> for k to N-1 do
  qk := evalf(subs(x = xx[k], q), 20);
  fk := evalf(subs(x = xx[k], t = tt[1], f), 20);
  y[1, k] := pp[k]+tau*qk+(1/2)*tau^2*(fk+(pp[k-1]-2*pp[k]+pp[k+1])/h^2)
od:

```

І нарешті – (3.16):

```

> for nu to M-1 do
  for k to N-1 do
    fknu := evalf(subs(x = xx[k], t = tt[nu], f));
    y[nu+1, k] := tau^2*(fknu+(y[nu, k-1]+y[nu, k+1])/h^2)+(2*(1-
tau^2/h^2))*y[nu, k]-y[nu-1, k] od: od:

```

Для утворення таблиці з результатами використаємо код:

```

> for nu from 0 to M do print(seq(y[nu,kk],kk=0..N)) od;

```

Відповідні значення розміщено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 Значення функції  $u(x, t)$ , що є розв'язком хвильової задачі

| $x_k \backslash t_v$ | 0    | 0,25        | 0,5          | 0,75        | 1    |
|----------------------|------|-------------|--------------|-------------|------|
| 0                    | 0    | .325280917  | 0.7778174594 | 1.247237369 | 1.6  |
| 0,1                  | 0.1  | .581387365. | 0.9965859338 | 1.40778798  | 1.62 |
| 0,2                  | 0.2, | .837505603  | 1.224550576  | 1.545016586 | 1.64 |
| 0,3                  | 0.3, | 1.06496621  | 1.45266594   | 1.655804330 | 1.66 |
| 0,4                  | 0.4  | 1.244194549 | 1.66292717   | 1.745432378 | 1.68 |
| 0,5                  | 0.5  | 1.368093829 | 1.831842049  | 1.823006363 | 1.7  |

Можна також побудувати графік функції  $u(x, t)$ , визначений таблицею іншого типу

```

> data := [seq([seq([xx[jj], tt[ii], y[ii, jj]], ii = 0 .. M)], jj = 0 .. N)];

```

Для зображення графіка використаємо операнд `surfdata(data)`;

На рис. 3.3 зображено два графіки, розраховані для  $N = 4, M = 5$  (а) і  $N = M = 50$  (б).

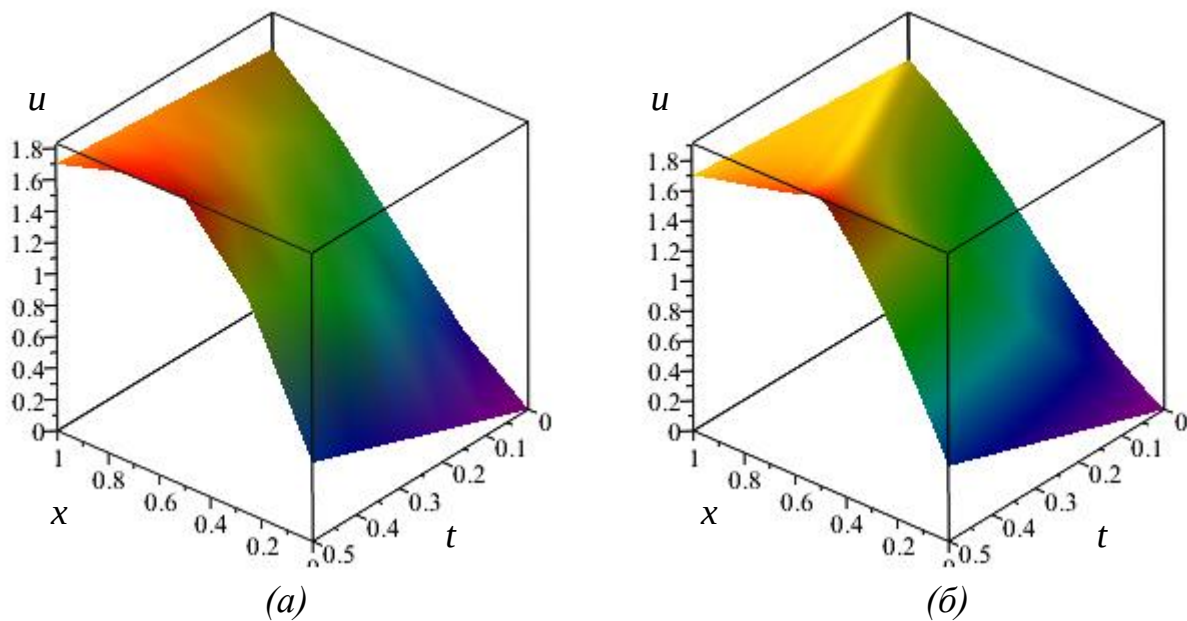


Рис. 3.3 Функції-розв'язки задачі 3.3

Розрахунки в задачі 3.3 можна проводити в табличному процесорі. Пропонуємо студентам реалізувати такий спосіб розв'язання.

### Контрольні питання до лабораторної роботи №7

1. Опишіть постановку мішаної задачі для хвильового рівняння, метод розв'язання, похибку методу.
2. В чому полягає коректність постановки задачі (3.12)-(3.14)?
3. Наведіть розрахункову схему задачі.