

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Мета: Закріпити вміння розв'язувати крайові задачі проєкційними, варіаційними та різницевиими методами.

Тут номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 10 – для денної форми навчання, 0 – для заочної.

Завдання №1 Розв'яжіть методом Галеркіна та методом скінченних різниць крайову задачу для звичайного диференціального рівняння, наведену в лабораторній роботі № 5 з індивідуальними завданнями в табл. 3.1.

Порівняти результати, отримані двома методами.

Таблиця 3.1 – Таблиця варіантів лабораторної роботи №5

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-2	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2.7
k_2	-4.8	-3.1	2.5	1.7	2	1.2	2	3.2	3	-1.3

Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.5	1.3	2.4	-1	0	1	0	0.8	-4	0
B	0.5	0.7	0	1	-2	0.5	0	0.3	-0.6	2
a	1	-1	-1	0.5	0	2	-1	-0.5	-1	0
b	2	0	1.4	1.5	1	3	0	1.5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0.1	0.1	0.25	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
$p(x)$	k_1x	$\frac{k_1}{x+k_2}$	k_1x+k_2	k_2x	$k_2x^2-k_1$	k_1-x	k_2+x^2	k_1x^3	$k_2x^3-k_1$	$x^2k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1x}{x^2+k_2^2}$	k_2x	k_1x^2	$k_2x^3+k_1$	k_2-x	k_2+x^3	k_2x	k_2x-k_1	k_1x+k_2	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+k_1^2}}$	k_2+x^3	$\frac{k_2+x}{x^2-k_1}$	$\frac{x^2+k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1x-k_2}$	$\sqrt{x^2+k_2^2}$	$\frac{k_1x^2}{k_2+x}$	$\frac{1}{k_2x^2-k_1}$	$k_2x^2+k_1x$	$\frac{k_1x+k_2}{(k_1-x)^3}$

h - крок розбиття відрізка $[a,b]$ в методі кінцевих різниць (див. індивідуальне завдання).

Вказівка до завдання №1 Приклад із завданням такого типу був наведений в задачі 2.7. Порівняння результатів двома методами проведено в задачі 3.1.

Задача 2.6 Розв'яжемо методом Галеркіна крайову задачу (2.26)

$$y'' - (x+1)y' - 2xy = x - 5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2.$$

Розв'язання.

- Визначимо функцію, що задаватиме нев'язку

$$eq := \text{diff}(\text{diff}(y(x), x), x) + p(x) * (\text{diff}(y(x), x)) + q(x) * y(x) - f(x);$$
- Функції $\{u_j(x)\}_{j=0}^N$ і наближений розв'язок визначимо так само, як у задачі 2.1.
- Рівняння системи визначимо з умови ортогональності (2.51) нев'язки до кожної функції $u_j(x)$, $j = \overline{1, N}$:

```

for j to N do
  rr[j] := int(eq*u(x)[j], x = a .. b)
od:

```

- Далі утворюємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу (2.50) аналогічно задачі 2.1. Для присвоєння коефіцієнтам значень розв'язку системи можна використати оператор assign.

На рис. 2.6 побудовано зіставлені наближені розв'язки, отримані при $N = 5$ для крайової задачі методом Рітца (синя штрихова лінія) та методом Галеркіна (червона суцільна).

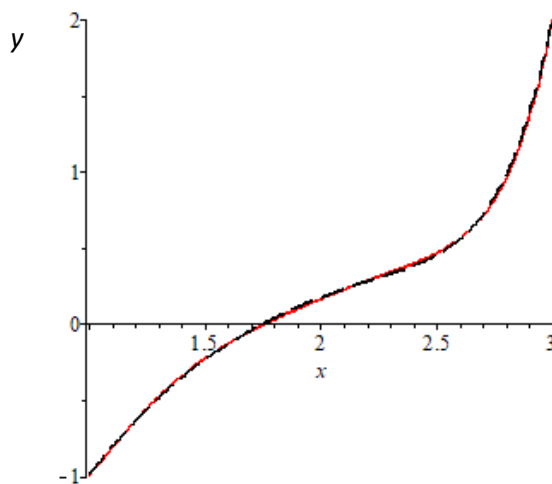


Рис. 2.6 Зіставлення наближених розв'язків за методами Рітца та Галеркіна в задачі 2.6

Для даної задачі варіаційний метод Рітца та проєкційний Галеркіна дають досить близькі результати при $N = 5$.

Зауваження 2.1 Якщо функції крайова умова має загальний характер (2.7), тоді систему лінійно незалежних функцій можна шукати у вигляді

$$u_j(x) = M + (x - a)^{j+1} + N(x - b), \quad j = \overline{0, n},$$

а коефіцієнти M і N шукати, підставляючи зазначене подання неоднорідні або

однорідні крайові умови відповідно:

$$\Gamma_a(u_0) = A, \quad \Gamma_b(u_0) = B; \quad \Gamma_a(u_j) = 0, \quad \Gamma_b(u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача 2.7 Розв'язати задачу (2.48) – (2.49) методом Галеркіна, якщо

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, B = 0.5,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0.$$

Розв'язання. Для пошуку системи лінійно незалежних функцій використаємо зауваження 2.1. Для реалізації зазначеної схеми можна використати код Maple:

```
> for j from 0 to N do
  mn := MM+(x-a)^(j+1)+NN*(x-b); mn1 := diff(mn, x);
  if j = 0 then A1 := A else A1 := 0 fi;
  q1 := alpha0*subs(x = a, mn)+alpha1*subs(x = a, mn1)-A1;
  if j = 0 then B1 := B else B1 := 0 fi;
  q2 := beta0*subs(x = b, mn)+beta1*subs(x = b, mn1)-B1;
  r := solve({q1, q2}, {MM, NN});
  u(x)[j] := subs(MM = rhs(r[1]), NN = rhs(r[2]), mn) od;
```

Подальші кроки методу не відрізняються від зазначених в задачі 2.6.

На рис. 2.7 наведено розв'язки, отримані методом Галеркіна при $N = 5$ (суцільна зелена лінія) і чисельним інтегруванням диференціального рівняння засобами Maple (штрихова червона лінія).

Узгодженість результатів, отриманих різними методами, є високою.

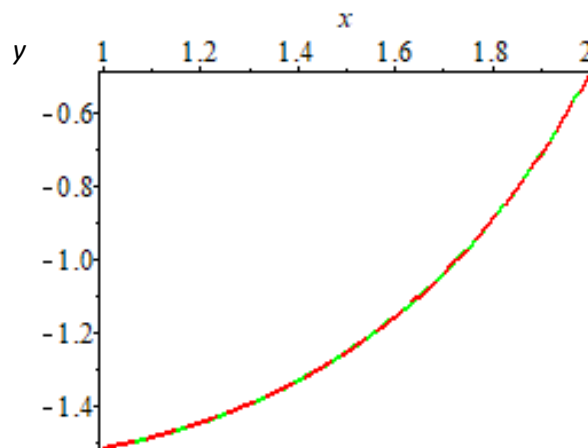


Рис. 2.7 Зіставлення розв'язків, отриманих метдом Галеркіна та чисельними засобами Maple

Задача 3.1 Розв'язати задачу (3.5) – (3.6) методом скінченних різниць, якщо

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, B = 0.5,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0;$$

Розв'язання. Реалізуємо метод в системі Maple.

- Щоб знайти кількість проміжків розбиття N відрізка $[a; b]$, знаючи крок h , можна застосувати оператор $N := \text{trunc}((b - a) / h)$;
- Визначаємо вузли розбиття:

```
> for i from 0 to N do X[i] := h*i+a od;
```

- Утворюємо рівняння (3.3), що відповідають даному звичайному диференціальному рівнянню:

```
> for i to N-1 do
```

```
    pii := subs(x = X[i], p(x));
```

```
    qi := subs(x = X[i], q(x)); fii := subs(x = X[i], f(x));
```

```
    eq[i] := evalf((y[i+1]-2*y[i]+y[i-1])/h^2+pii*(y[i+1]-y[i-1])/(2*h)+qi*y[i]-fii)
```

```
od;
```

- Доповнюємо систему рівняннями (6.3) що відповідають крайовим умовам:

```
> eq[0] := alpha0*y[0]+alpha1*(-3*y[0]+4*y[1]-y[2])/(2*h)-A;
```

```
eq[N] := beta0*y[N]+beta1*(3*y[N]-4*y[N-1]+y[N-2])/(2*h)-B;
```

- Таким чином утворено систему із $N+1$ рівняння $\{seq(eq[j], j = 0..N)\}$ відносно такої ж кількості змінних $\{seq(y[j], j = 0..N)\}$. СЛАР може бути розв'язаною за допомогою функціонала solve.
- Для порівняння результатів побудуємо графіки розв'язків, отриманих методом Галеркіна в задачі 2.6 (суцільна зелена лінія на рис. 3.1), а також методом кінцевих різниць (точкова лінія, побудована за точками, що відповідають вузлам).
- Отже, спостерігаємо високу узгодженість результатів.

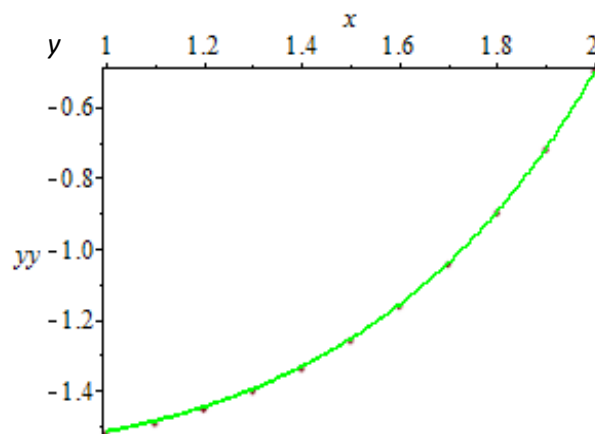


Рис. 3.1 Подання результатів розв'язання задачі 3.1

Завдання №2 Розв'яжіть методом Рітца та методом скінченних різниць крайову задачу для рівняння Пуассона, наведену в лабораторній роботі № 6 з індивідуальними завданнями в табл. 3.2.

Порівняти результати, отримані двома методами.

Вказівка до завдання №2 Приклад із розв'язанням завданням такого типу методом Рітца був наведений в задачі 2.5, а методом скінченних різниць – в задачі 3.2, де в тому числі проведено порівняння результатів двома методами.

Задача 2.4 Методом Рітца знайти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на } G$$

з крайовою умовою

$$u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|,$$

на межі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 (\Gamma)$, області G .

Розв'язання. Знаходимо дві функції, що обмежують область:

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x);$$

$$y_2(x) = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}, \quad y_1(x) = -y_2(x), \quad x \in [-3; 3].$$

В кодї Maple записуємо у формї:

```
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*x^2); y1 := -y2;
```

Координатні функції, що задовольняють умовам (2.41), вибираємо з урахуванням умови:

$$u_0(x, y) = |x| \cdot |y|, \quad u_k(x, y) = x^i y^j \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right) \quad (i, j = \overline{0, n}, k = \overline{1, (n+1)^2}). \quad (2.47)$$

Тут індекс k носить характер лічильника. Фрагмент відповідного програмного коду Maple:

```
> u(x, y)[0] := abs(x)*abs(y);
   k := 0;
   for i from 0 to n do
     for j from 0 to n do
       k := k+1;
       u(x, y)[k] := x^i * y^j * ((1/9)*x^2+(1/25)*y^2-1);
     od: od;
```

Відповідно до (2.42), наближений розв'язок подаємо функцією

```
> U(x,y):=u(x,y)[0]+sum(C[jj]*u(x,y)[jj],jj=1..k);
```

Потім визначаємо функціонал, в який підставляється $U(x, y)$

```
> F := evalf(int(int((diff(U(x, y), x))^2+(diff(U(x, y), y))^2, y = y1 .. y2), x = -3 .. 3));
```

і утворюється функція багатьох змінних $C_1, \dots, C_k$. Для пошуку її мінімуму застосовуємо необхідну умову локального екстремуму

```
> for h to k do eq[h] := diff(F, C[h]) end do;
```

```

sys := {seq(eq[hh], hh = 1 .. k)};
var := {seq(C[hh], hh = 1 .. k)};
RRR := solve(sys, var); assign(RRR);

```

Для аналізу точності отриманого розв'язку можна знайти нев'язку $(Fu)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ для наближеного розв'язку в точках (x, y) області G . При виборі $n=4$ абсолютні значення нев'язки не перевищували 1.5. За даної умови, зважаючи на симетрію функцій, за координатні можна взяти функції $u_k(x, y) = x^{2i} y^{2j} \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right)$, тоді при $n=5$, модуль нев'язки не перевищить 0,3.

На рис. 2.4 побудовано графік функції, що визначає наближений розв'язок поставленої задачі Діріхле.

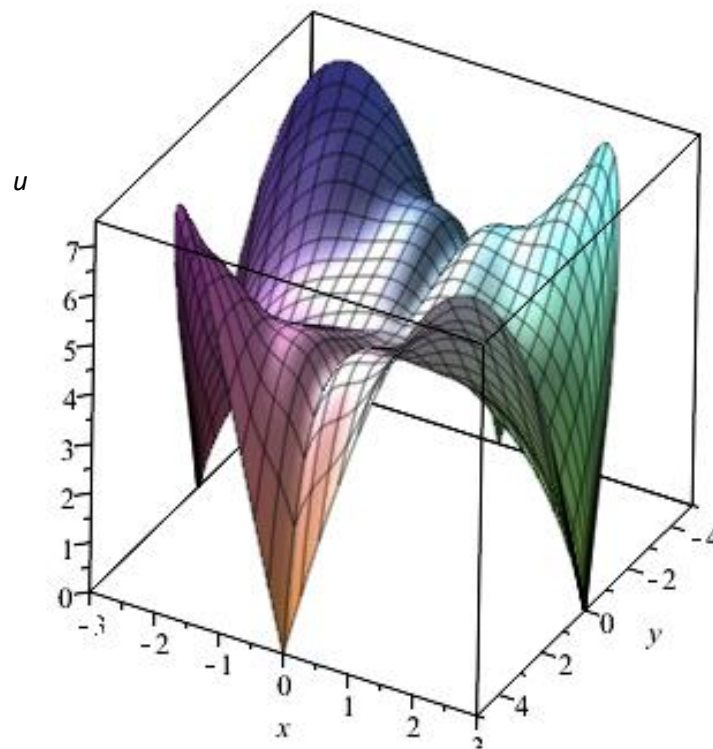


Рис. 2.4 Наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Задача 2.5 Розв'язати рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G$$

з функцією правої частини $f(x, y) = 0.6 \sin(x) - 1.25 y^2 + 1$, з крайовими умовами та областю, як в задачі 2.4.

Розв'язання. Зважаючи на відмінність даного рівняння Пуассона від форми запису рівняння (2.34), функціонал, що підлягає мінімізації, має бути поданим у вигляді

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] dx dy.$$

Для спрощення процесу інтегрування, до тригонометричної функції застосуємо формулу Маклорена, тоді

$$f(x, y) \approx 0.6 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) - 1.25 y^2 + 1.$$

Для подальшої реалізації методу Рітца використовуємо лінійно незалежну систему (2.47) і проводимо дії, аналогічні викладеним в задачі 2.4.

В результаті розрахунків при $n = 5$ отримано функцію, зображену на рис. 2.5, обчислюємо нев'язку, яка не перевищила 1.3.

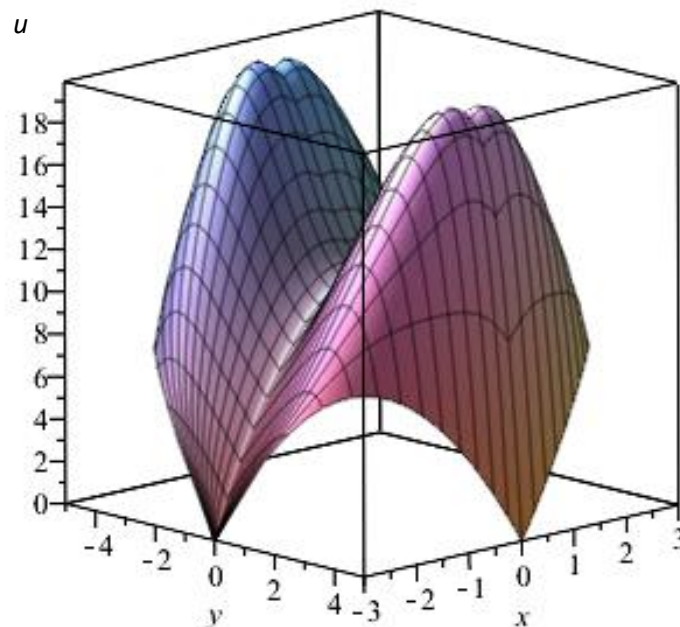


Рис. 2.5 Наближений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

Задача 3.2 Методом скінченних різниць розв'язати крайову задачу (3.7) – (3.8), якщо

$$\phi(x, y) = |x| \cdot |y|, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 (\Gamma)$$

у випадках **а)** $f(x, y) = 0$; **б)** $f(x, y) = 0.6 \sin(x) - 1.25 y^2 + 1$, $(x, y) \in G$.

Порівняти результати з отриманими методом Рітца.

Розв'язання. Реалізуємо метод скінченних різниць поетапно у загальному випадку рівняння Пуассона.

Спочатку визначимо функції, що визначають праві частини (3.7) і (3.8), а також межу області

```
> psi1 := abs(X)*abs(Y):
  F := .6*sin(X)-1.25*Y^2+1:
```

```
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*X^2);
x2 := 3*sqrt(1-((1/5)*Y)^2);
```

Далі визначимо квадратну сітку на прямокутнику, що обмежує дану область, підрахувавши кількість вертикальних та горизонтальних відрізків:

```
> i := 1: x[i] := -3:
while x[i] < 3 do i := i+1; x[i] := -3+(i-1)*h; nn := i od:
> i := 1: h := .25: y[i] := -4:
while y[i] < 5 do i := i+1; y[i] := -5+(i-1)*h; mm := i od:
```

Визначаємо рівняння системи та її змінні, використовуючи лічильник *nom*. Нижче наведемо один з варіантів коду з коментарями

```
pr := 0; nom := 0;
> for i from 2 to nn - 1 do
  for j from 2 to mm - 1 do
    fij := subs(X=x[i], Y=y[j], F) :

    #` Крок 1. Перевіряємо, чи відповідає точка позначенню "кружок".
    if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j])
      < subs(X=x[i+1], y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1], y2) then
      nom := nom + 1;
    # Для визначення утворення рівняння використовуємо формулу (3.10).
    ur[nom] := -w[i,j] + 1/4*(w[i-1,j] + w[i+1,j] + w[i,j-1] + w[i,j+1]) - (1/4)*h
      ^2*fij;
    w[i,j] := qw[nom] fi;

    #` Крок 2. Перевіряємо точки, що мають позначку "трикутником".
    # Для утворення рівнянь використовуємо формулу (3.11).
    # Щоб виключити з розгляду вивчені точки, змінній pr присвоюємо значення 1 на
      подальших кроках.

    # Перевіряємо такі точки на близькість до лінії верхньої межі.
    if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) ≥ subs(X=x[i], y2) then
      yy := subs(X=x[i], y2);
      psij := subs(X=x[i], Y=yy, psi1);
      rho1 := abs(y[j]-yy);
      nom := nom + 1;
      ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j-1]/(h+rho1) + h*psij/(h+rho1);
      # Відповідає (3.11).
      pr := 1;
      w[i,j] := qw[nom] fi;

    # Перевіряємо такі точки на близькість до лінії нижньої межі.
    if abs(y[j-1]) ≥ subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i], y2) then
      yy := -subs(X=x[i], y2);
      psij := subs(X=x[i], Y=yy, psi1);
      rho1 := abs(y[j]-yy); nom := nom + 1;
      ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j+1]/(h+rho1) + h*psij/(h+rho1);
      # Відповідає (3.11).
      pr := 1; w[i,j] := qw[nom] fi;
```

Перевіряємо такі точки на близькість до лінії правої межі.

```
if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i+1], y2)$ 
then
   $xx := \text{subs}(Y=y[j], x2);$ 
   $psij := \text{subs}(X=xx, Y=y[j], psi1);$ 
   $\rho1 := \text{abs}(x[i] - xx);$ 
   $nom := nom + 1;$ 
   $ur[nom] := -w[i, j] + \rho1 * w[i-1, j] / (h + \rho1) + h * psij / (h + \rho1);$ 
  # Відповідає (3.11).
   $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
```

Перевіряємо такі точки на близькість до лінії лівої межі.

```
if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i+1], y2)$ 
then
   $xx := -\text{subs}(Y=y[j], x2);$ 
   $psij := \text{subs}(X=xx, Y=y[j], psi1);$ 
   $\rho1 := \text{abs}(x[i] - xx);$ 
   $nom := nom + 1;$ 
   $ur[nom] := -w[i, j] + \rho1 * w[i+1, j] / (h + \rho1) + h * psij / (h + \rho1);$ 
  # Відповідає (3.11).
   $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
```

$pr := 0$ **od**: **od**:

Після розв'язання системи

> $var := \{seq(qw[i], i = 1 .. nom)\}; solve(sys, var); assign(\%);$

ідентифікуємо матрицю

> $w := Matrix(1 .. nn, 1 .. mm);$

в яку вносимо розв'язок системи, що фактично відповідає зворотнім крокам:

```
>  $pr := 0; nom := 0;$ 
for  $i$  from 2 to  $nn - 1$  do
  for  $j$  from 2 to  $mm - 1$  do
    if  $\text{abs}(y[j-1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j])$ 
       $< \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
    if  $\text{abs}(y[j-1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) \geq \text{subs}(X=x[i], y2)$  then
       $pr := 1;$ 
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
    if  $\text{abs}(y[j-1]) \geq \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  then
       $pr := 1;$ 
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
    if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
    if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i, j] := qw[nom]$  fi;
     $pr := 0$ 
  od: od:
```

Для утворення таблиці результатів можна використати операнд

$> data := [seq([seq([x[i], y[j], w[i, j]], i = 2 .. nn-1)], j = 2 .. mm-1)];$

З таблиці визначимо деякі дані у вузлах сітки. Для відповідних координат вузлів знайдемо значення функції, що були отримані методом Рітца в задачах 2.4 і 2.5 для рівнянь Лапласа та Пуассона відповідно.

В табл. 3.3 співставлено результати для випадку рівняння Лапласа, а в табл. 3.4 – Пуассона. Відхилення в результатах становить до 14%.

Таблиця 3.3 – Зіставлення результатів розв’язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	4.25	5.822507010	5.850067812
-0.5	4	4.324959506	4.678348986
-1.5	-3.75	6.379314915	6.412557045

Таблиця 3.4 – Зіставлення результатів розв’язання крайової задачі для рівняння Пуассона, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	3,5	15.47767245	15.65203466
0.75	3.25	18.1009523	18.62563842
1.25	3.75	13.86975877	14.05630631