

## Тема 5 НЕІТЕРАЦІЙНІ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДО ЗАДАЧІ КОШІ

*Мета вивчення теми:*

- засвоїти алгоритм неітераційного методу суперпозиції зведення до задач Коші крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку;
- знати ідею методу суперпозиції триточкової задачі для диференціального рівняння третього порядку;
- вміти реалізовувати алгоритм неітераційний метод суперпозиції в системі комп'ютерної алгебри (зокрема, в Maple);
- засвоїти алгоритм ітераційного методу стрільби зведення до задачі Коші крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку;
- вміти реалізовувати алгоритму методу пристрілки в системі комп'ютерної алгебри (зокрема, в Maple).

*Основні поняття теми:*

- крайова задача для диференціального рівняння другого/третього порядку;
- задача Коші для диференціального рівняння другого / третього порядку.

### Теоретичні відомості

#### §1 Метод суперпозиції для крайової задачі другого порядку (неітераційний метод)

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (5.2)$$

Мета: звести крайову задачу (5.1), (5.2) до задачі Коші з умовами

$$y(a) = A, \quad y'(a) = \mu, \quad (5.3)$$

що передбачає пошук (в загальному випадку наближеного) значення  $\mu$  такого, щоб виконувала друга крайова умова (5.2).

Для цього подамо розв'язок у вигляді [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

$$y(x) = y_1(x) + \mu^* y_2(x) \quad (5.4)$$

і доведемо, що  $\mu = \mu^*$ .

Підставимо функцію (5.4) в рівняння (5.1)

$$\begin{aligned} & \left[ y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right]'' + p(x) \left[ y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right]' + q(x) \left[ y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right] = f(x), \\ & \left[ y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) - f(x) \right] + \mu^* \left[ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Прирівняємо обидва доданки із (5.5) до нуля

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = f(x), \quad (5.6a)$$

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0. \quad (5.6б)$$

Отримано два рівняння відносно допоміжних функцій.

Перша із крайових умов (5.2)  $y(a) = A$  і подання шуканої функції у вигляді (5.4) дає співвідношення

$$y_1(a) + \mu^* y_2(a) = A. \quad (5.7)$$

Якщо покласти

$$y_1(a) = A, \quad y_2(a) = 0, \quad (5.8)$$

то буде виконуватися умова (5.7).

Оскільки  $y'(a) = \mu$ , а  $y'(a) = y_1'(a) + \mu^* y_2'(a)$ , то при

$$y_1'(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1 \quad (5.9)$$

матимемо  $\mu = \mu^*$ .

Однак, значення константи  $\mu$  поки що не визначено.

Застосуємо другу умову із (5.2)  $y(b) = B$ , знаючи, що  $\mu = \mu^*$ :

$$y_1(b) + \mu y_2(b) = B. \quad (5.10)$$

Звідки

$$\mu = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)}. \quad (5.11)$$

Таким чином, приходимо до **алгоритму метода суперпозиції зведення крайової задачі до задачі Коші**

1. Розв'язується задача Коші №1

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = f(x), \quad (5.12а)$$

$$y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0. \quad (5.12б)$$

2. Обчислюється значення  $y_1(b)$ .

3. Розв'язується задача Коші №2

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0, \quad (5.12в)$$

$$y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1. \quad (5.12г)$$

4. Обчислюється значення  $y_2(b)$ .

5. Знаходиться значення константи

$$\mu = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)}. \quad (5.12д)$$

6. Отже, крайові задачу (5.1), (5.2) зведено до задачі Коші (5.1), (5.3):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \mu. \quad (5.12 е)$$

Розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу (5.12е) або подавши суперпозицією отриманих розв'язків

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x) \quad (5.12є)$$

## §2 Зведення крайової задачі третього порядку до задачі Коші методом суперпозиції

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (5.13)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (5.14)$$

Її розв'язок подамо сумою [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x). \quad (5.15)$$

Метод передбачає розв'язання двох задач Коші.

Задача Коші №1

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = f(x), \quad (5.16)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_1''(0) = 0. \quad (5.17)$$

Задача Коші №2

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \quad (5.18)$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_2''(0) = 1. \quad (5.19)$$

Константу  $\mu$  обчислюємо, знаючи значення функцій  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  в точці  $x = 1$ :

$$\mu = -\frac{y_1(1)}{y_2(1)}.$$

Із крайових умов (5.17), (5.19) і подання (5.15) отримаємо, що

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = \mu. \quad (5.20)$$

Отже, крайову задачу (5.13), (5.14) зведено до задачі Коші (5.13), (5.20).

Наближений розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу Коші (5.13), (5.20), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (5.15).

## §3 Триточкова задача для диференціального рівняння третього порядку

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (5.21)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(c) = 0. \quad (5.22)$$

Її розв'язок подамо сумою з двома константами [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

$$y(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \lambda y_2(x). \quad (5.23)$$

У даному випадку потрібно розв'язання три задач Коші.

Задача Коші №1

$$y_0''' + p(x)y_0'' + q(x)y_0' + r(x)y_0 = f(x), \quad (5.24)$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 0, \quad y_0''(0) = 0. \quad (5.25)$$

Задача Коші №2

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = 0, \quad (5.26)$$

$$y_1(0)=1, y_1'(0)=0, y_1''(0)=0. \quad (5.27)$$

Задача Коші №3

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \quad (5.28)$$

$$y_2(0)=0, y_2'(0)=0, y_2''(0)=1. \quad (5.29)$$

Константи  $\mu$  і  $\lambda$  обчислюємо, знаючи значення функцій в точках  $x=b$  і  $x=c$ . Утворюємо систему

$$\begin{cases} y_0(b) + \mu y_1(b) + \lambda y_2(b) = 0, \\ y_0'(c) + \mu y_1'(c) + \lambda y_2'(c) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Розв'язуємо її за допомогою пакета комп'ютерної алгебри Maple

```
> restart
> eq1 := y0(b) + mu*y1(b) + lambda*y2(b) :
= eq2 := y01(c) + mu*y11(c) + lambda*y21(c) :
> solve( {eq1, eq2}, {mu, lambda} )
{ lambda = (y01(c) y1(b) - y11(c) y0(b)) / (y11(c) y2(b) - y1(b) y21(c)), mu =
- (y01(c) y2(b) - y0(b) y21(c)) / (y11(c) y2(b) - y1(b) y21(c)) }
```

В результаті отримаємо

$$\lambda = \frac{y_0'(c) y_1(b) - y_1'(c) y_0(b)}{y_1'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_1(b)}, \mu = - \frac{y_0'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_0(b)}{y_1'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_1(b)}. \quad (5.31)$$

Із крайових умов (5.25), (5.27), (5.29) і подання (5.23) отримаємо, що

$$y(0) = \mu, y'(0) = 0, y''(0) = \lambda. \quad (5.32)$$

Отже, крайову задачу (5.21), (5.22) зведено до задачі Коші (5.21), (5.32).

Наближений. розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу Коші (5.21), (5.32), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (5.23).

*Розглянути самостійно [Ошибка! Источник ссылки не найден.] розв'язання задачі про розрахунок тришарової балки методом суперпозиції триточкової задачі для диференціального рівняння третього порядку.*

#### §4 Метод стрільби для крайової задачі другого порядку (ітераційний метод)

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (5.33)$$

$$y(a) = A, y(b) = B. \quad (5.34)$$

**Мета:** звести крайову задачу (5.33), (5.34) до задачі Коші з умовами

$$y(a) = A, y'(a) = \tan \alpha, \quad (5.35)$$

що передбачає пошук наближеного значення кута нахилу  $\alpha^*$  кривої-розв'язку  $y(x, \alpha^*)$  в точці  $x=a$ , або іншими словами, куту нахилу стріляючої «пушки», таким, щоб в точці  $x=b$  задовольнити нерівність

$$|y(b, \alpha^*) - B| \leq \varepsilon \quad (5.36)$$

для наперед заданого  $\varepsilon$  (рис. 5.1).

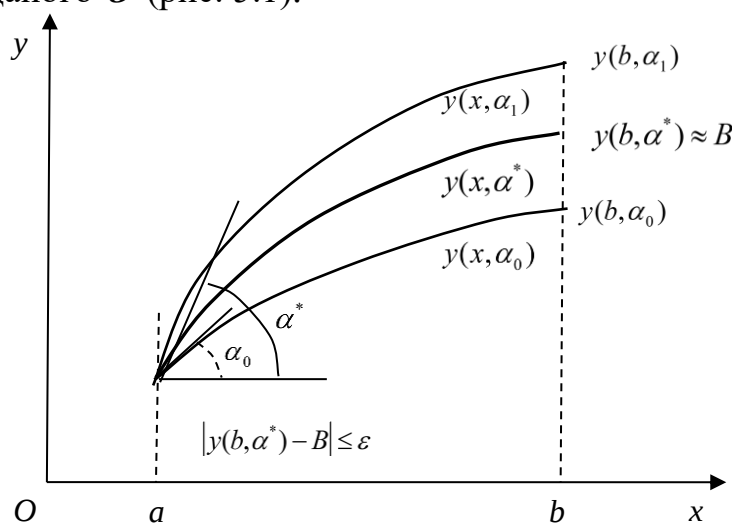


Рис. 5.1

### Алгоритм розв'язання задачі методом стрільби (пристрільки)

1. Обираємо довільне значення кута  $\alpha_0$ . Будь-яким методом розв'язуємо задачу Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (5.37)$$

2. Якщо  $y(b, \alpha_0) > B$ , то підбираємо такий кут  $\alpha_1$ , щоб розв'язок задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (5.38)$$

задовольняв умову  $y(b, \alpha_1) < B$ .

Якщо  $y(b, \alpha_0) < B$ , то підбираємо такий кут  $\alpha_1$ , щоб розв'язок задачі (5.38) задовольняв нерівність  $y(b, \alpha_1) > B$  (рис. 5.1).

Одним із способів підбору кутів  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$ , що задовольняють умову

$$(y(b, \alpha_0) - B)(y(b, \alpha_1) - B) < 0, \quad (5.39)$$

може бути табуляція значень  $y(b, \alpha) - B$  для різних кутів  $\alpha$  із певного діапазону, після чого і вибираються потрібні кути  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$ .

3. Далі реалізуємо метод половинного ділення.

$$3.1. \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}.$$

- 3.2. Розв'язуємо задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_s \quad (s = 0, 1, 2). \quad (5.40)$$

- 3.3. Якщо  $(y(b, \alpha_0) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$ , то  $\alpha_1 := \alpha_2$ .

Якщо  $(y(b, \alpha_1) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$ , то  $\alpha_0 := \alpha_2$ .

- 3.4. Якщо  $|y(b, \alpha_2) - B| \leq \varepsilon$ , то  $\alpha^* := \alpha_2$ , і алгоритм завершує роботу. У супротивному випадку перехід до кроку 3.1.

Таким чином, крайову задачу (5.33), (5.34) зведено до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*. \quad (5.41)$$