

2.1 Метод скінченних різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + i h \quad (i=1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$. Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні

(6.1) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$. Випишемо розклади за формулою Маклорена до h^3 включно. Потім додамо і віднімемо розклади, отримаємо:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3) \\ y_{i-1} &= y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3) \end{aligned}$$

$$y_{i+1} - y_i = 2h y'(x_i) + o(h^2) \Rightarrow y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + o(h)$$

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2 y''(x_i) + o(h^3) \Rightarrow y''(x_i) = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + o(h)$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (6.1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (6.2)$$

Тепер розглянемо крайові умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через скінченні різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0$$

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + o(h^2) \rightarrow 4y_1 = 4y_0 + 4h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2h y'(x_0) + o(h^2)$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h)$$

$$x = b = x_n$$

$$\begin{aligned}
y_{n-1} &= y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + o(h^2) \rightarrow 4y_{n-1} = 4y_n - 4hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + o(h^2) \\
y_{n-2} &= y_n - 2hy'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2) \\
\hline
4y_{n-1} - y_{n-2} &= 3y_n - 2hy'(x_n) + o(h^2) \\
y'(x_n) &= -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + o(h)
\end{aligned}$$

Отримане дозволяє записати крайові умови у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A; \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (6.3)$$

Таким чином одержимо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи систему, можна знайти значення функції $y(x)$ у вузлах розбиття.