

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

ТЕМА: ОПТИМАЛЬНІ ШЛЯХИ ТА ПОТОКИ В МЕРЕЖАХ

Завдання

1. Для наданого графа (мережевої моделі):

- скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі мінімізації ТА максимізації в мережі;
- знайти у побудованому графі мінімальне ТА максимальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала;
- зробити висновки в термінах постановки задачі.

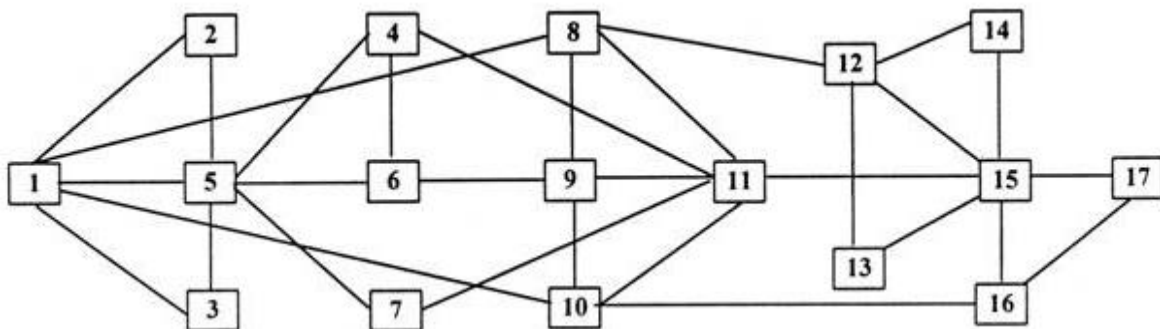
2. Надано зважений орієнтований граф (мережева модель). Для заданої мережі (див. індивідуальні варіанти):

- скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі про максимальний потік;
- знайти потік максимальної величини за допомогою алгоритму Форда—Фалкерсона
- знайти максимальний потік з використанням процедури «Пошук розв’язку» у Microsoft Excel for Windows;
- зробити висновки в термінах постановки техніко-економічної задачі.

ВИБІР ІНДИВІДУАЛЬНОГО ВАРІАНТА

Кожен студент обирає собі індивідуальне завдання на роботу, номер якого відповідає його номеру у журналі групи. Щоб уникнути випадкового дублювання варіантів, студент зобов’язаний погодити свій варіант з викладачем.

ЗАВДАННЯ 1



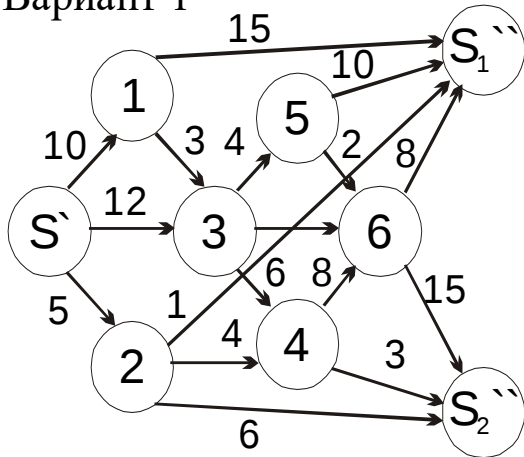
Варіанти завдань:

Рєбро	Вана ребра (№ варіанта)													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(1;2)	5	12	6	14	10	9	8	13	7	5	3	14	18	4
(1;8)	2	11	17	10	12	4	9	6	7	18	5	10	2	9
(1;5)	1	4	20	15	13	7	3	6	9	22	12	5	6	12
(1;10)	2	5	9	19	21	12	17	3	4	15	14	13	14	7
(1;3)	17	8	3	5	4	2	1	18	14	2	20	2	19	28
(2;5)	22	16	1	3	6	8	5	2	3	8	6	8	3	10
(5;3)	10	2	11	7	5	10	19	1	10	9	9	19	6	1
(5;6)	3	7	5	11	16	15	4	10	5	6	18	1	9	5
(5;4)	8	9	2	1	9	3	11	5	2	10	11	11	12	16
(5;7)	3	15	13	4	10	1	15	11	8	1	10	17	10	25
(4;6)	14	10	5	9	8	13	2	4	11	5	4	5	4	3
(4;11)	5	3	1	2	2	5	6	9	9	17	7	6	7	4
(6;9)	11	4	4	8	1	2	1	7	12	13	20	2	6	18
(7;11)	10	12	5	6	7	18	10	6	17	21	1	9	22	15
(8;9)	5	4	15	8	9	8	6	10	3	12	9	12	6	17
(8;11)	7	8	2	10	12	3	17	4	12	4	17	15	16	20
(8;12)	18	9	6	3	4	5	18	20	10	9	15	8	18	16
(9;11)	3	10	9	4	18	20	20	3	6	7	3	17	2	4
(9;10)	1	3	10	13	2	6	4	6	9	13	4	10	1	7
(10;11)	7	2	4	18	9	13	7	19	26	5	3	2	7	2
(10;16)	5	7	17	2	10	7	3	14	19	17	9	8	17	10
(11;15)	16	17	12	1	3	14	12	3	15	20	2	23	8	5
(12;13)	19	12	11	19	7	10	11	7	2	10	16	10	15	17
(12;14)	3	1	8	4	4	7	7	5	1	2	19	19	5	13
(12;15)	7	7	9	9	19	9	8	10	9	1	7	4	11	2
(13;15)	4	4	3	2	1	2	15	21	6	11	6	6	10	9
(14;15)	10	14	12	7	7	1	24	9	17	7	8	5	4	12
(15;16)	11	10	5	12	9	11	18	13	11	19	3	8	2	6
(15;17)	4	3	3	10	3	3	4	10	11	4	7	12	7	15
(16;17)	8	8	7	3	10	16	9	7	5	6	2	7	6	4

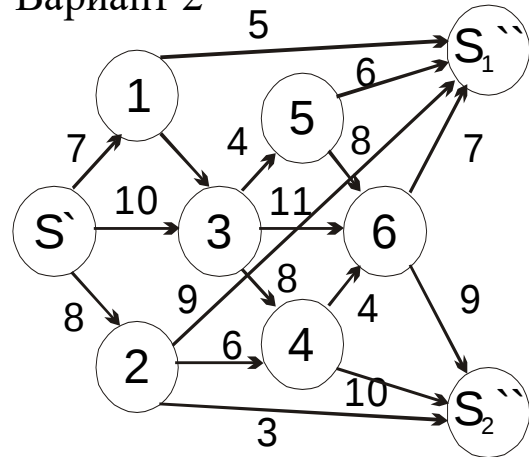
Ребро	Вага ребра (№ варіанта)												
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
(1;2)	12	11	17	3	12	8	3	5	6	12	17	5	14
(1;8)	10	3	2	9	17	9	8	17	8	10	3	15	23
(1;5)	5	9	6	12	10	4	19	13	23	5	1	8	1
(1;10)	16	17	23	16	3	15	3	14	4	8	9	19	9
(1;3)	7	15	19	19	7	13	17	6	15	2	4	3	17
(2;5)	3	3	10	20	8	18	10	10	14	9	17	10	12
(5;3)	8	4	4	7	20	12	13	2	8	5	15	3	3
(5;6)	15	8	8	2	12	16	9	3	18	14	8	7	5
(5;4)	17	6	9	3	5	7	3	7	2	16	13	14	8
(5;7)	18	15	20	7	8	3	7	4	5	10	14	19	17
(4;6)	20	19	17	10	12	6	12	16	9	28	9	10	10
(4;11)	5	2	3	11	9	18	19	11	14	3	5	2	3
(6;9)	8	21	6	5	2	3	6	19	1	6	17	1	6
(7;11)	16	10	3	7	5	17	18	26	23	9	14	38	4
(8;9)	19	18	9	9	7	11	13	17	7	16	2	15	9
(8;11)	3	20	17	3	14	10	17	2	18	17	7	17	23
(8;12)	5	3	13	2	18	4	5	7	3	11	3	10	11
(9;11)	7	8	15	6	1	8	9	15	6	7	9	3	18
(9;10)	10	17	5	16	9	2	16	19	8	3	16	8	19
(10;11)	3	14	2	14	10	3	12	1	1	9	10	5	5
(10;16)	1	10	2	12	11	7	10	6	9	2	11	23	8
(11;15)	18	8	7	1	14	11	5	4	16	8	9	5	12
(12;13)	25	10	10	4	6	3	8	7	10	10	7	8	17
(12;14)	10	4	11	1	3	8	13	18	2	10	3	3	28
(12;15)	6	12	19	2	19	6	7	3	7	22	2	6	13
(13;15)	8	19	14	6	3	17	5	12	1	6	8	19	11
(14;15)	13	4	11	9	7	15	14	10	8	15	16	12	5
(15;16)	15	7	7	11	5	10	9	8	11	9	19	7	3
(15;17)	7	2	4	18	2	1	10	5	5	4	16	11	8
(16;17)	9	1	2	15	8	8	25	2	6	8	4	2	9

ЗАВДАННЯ 2

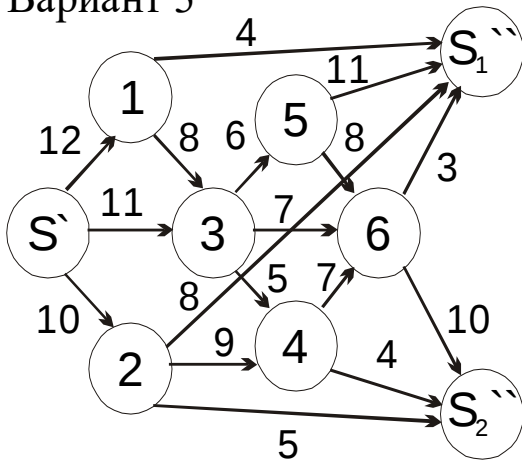
Вариант 1



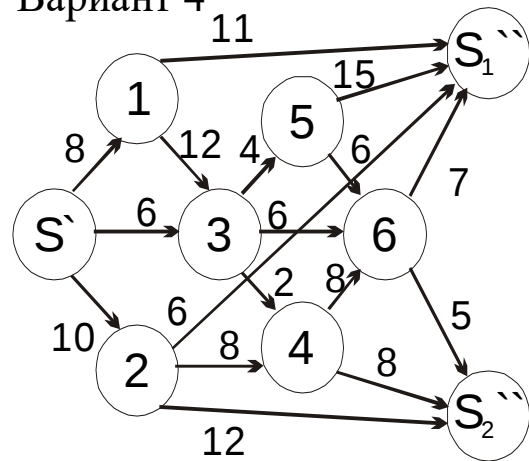
Вариант 2



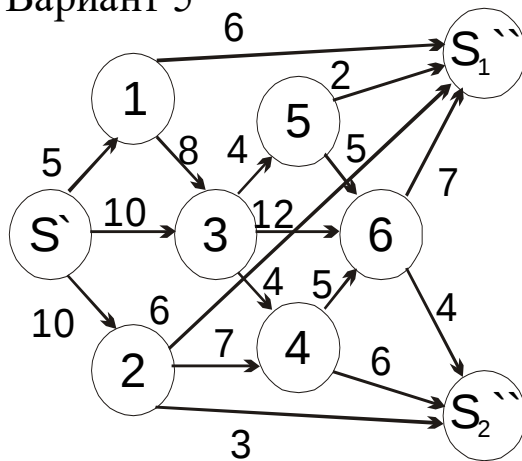
Вариант 3



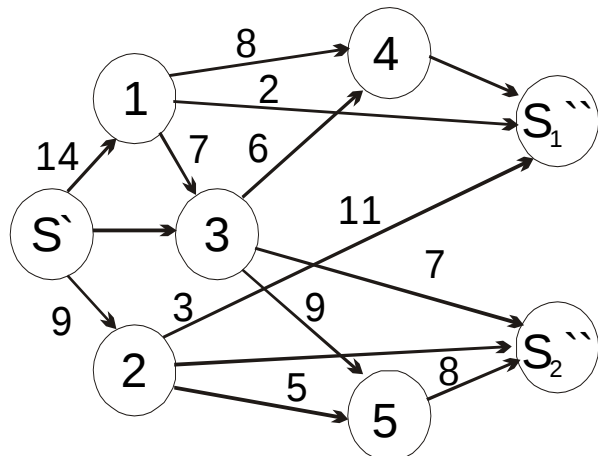
Вариант 4



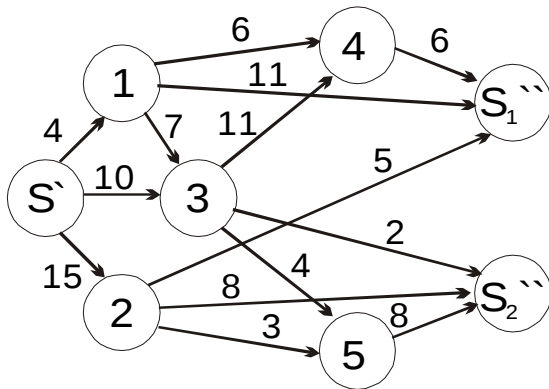
Вариант 5



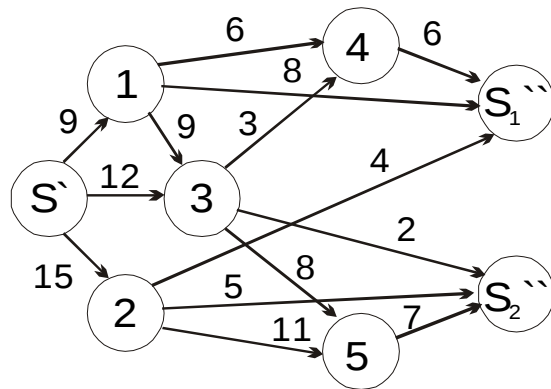
Вариант 6



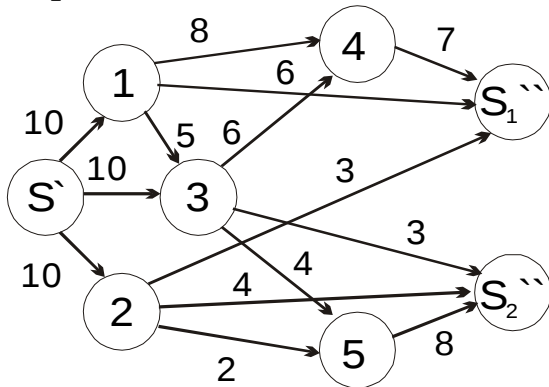
Вариант 7



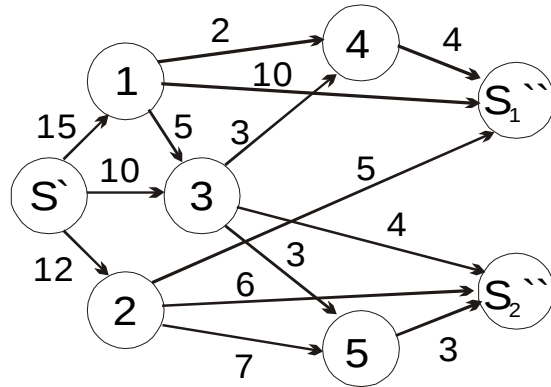
Вариант 8



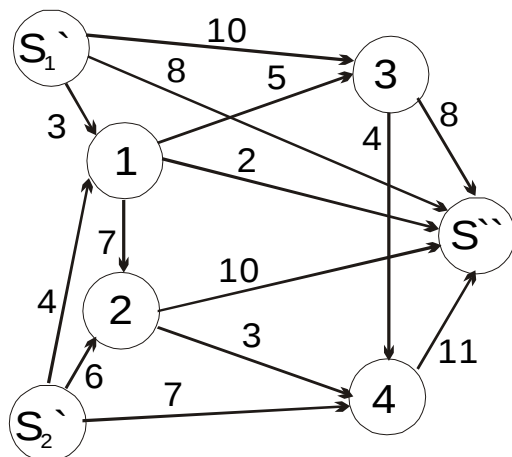
Вариант 9



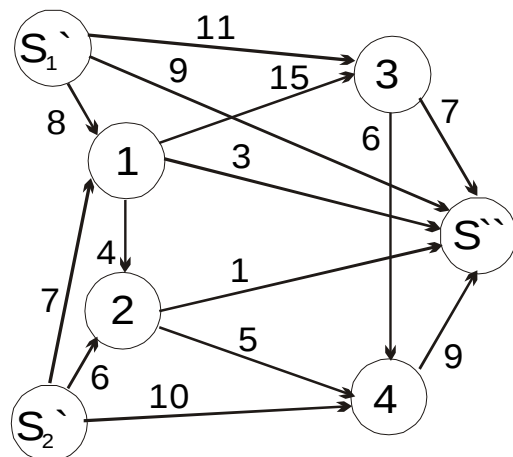
Вариант 10



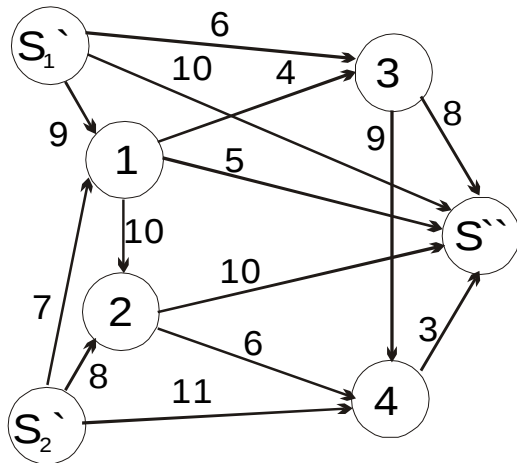
Вариант 11



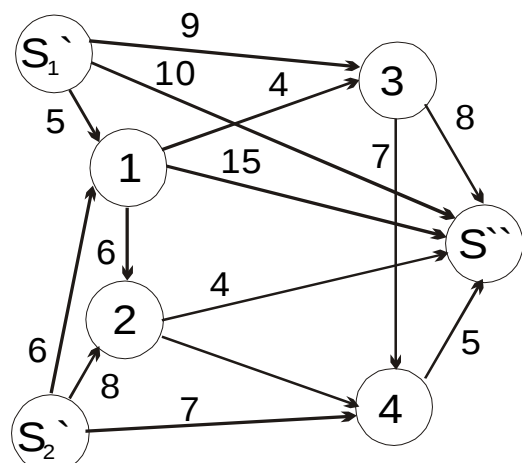
Вариант 12



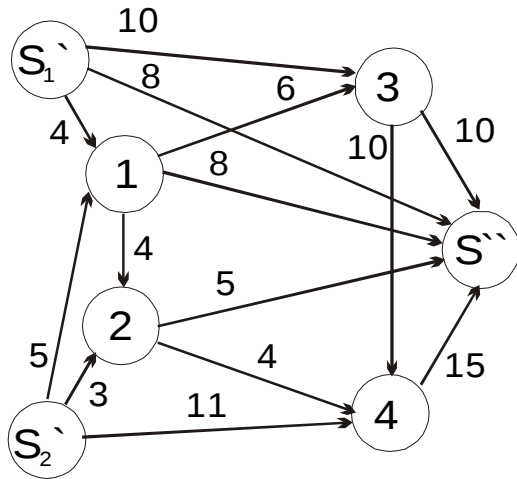
Вариант 13



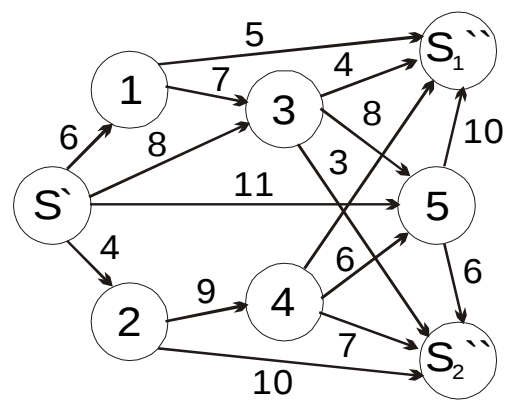
Вариант 14



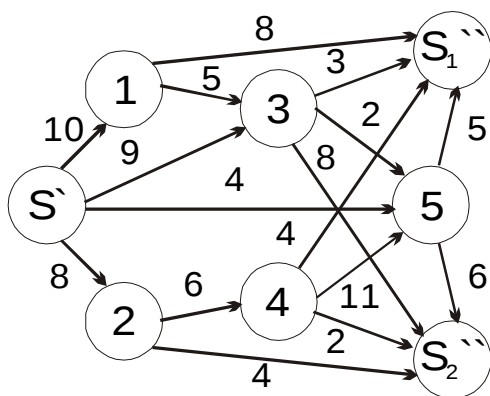
Вариант 15



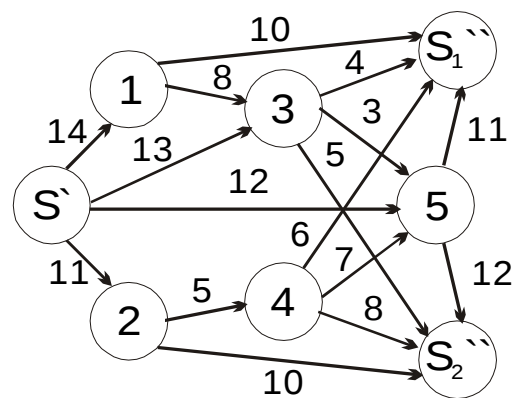
Вариант 16



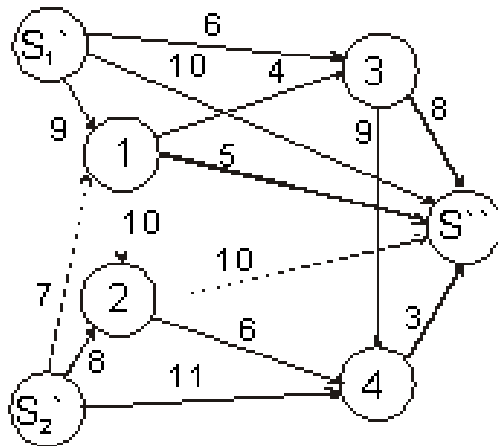
Вариант 17



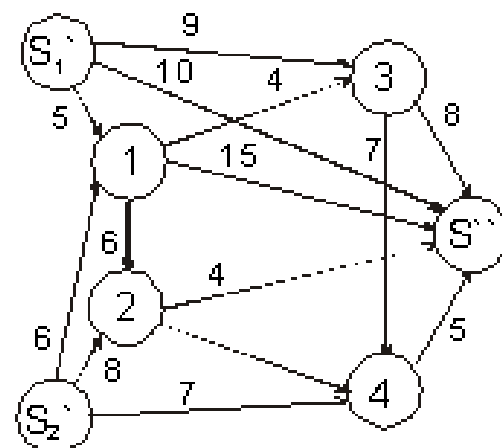
Вариант 18



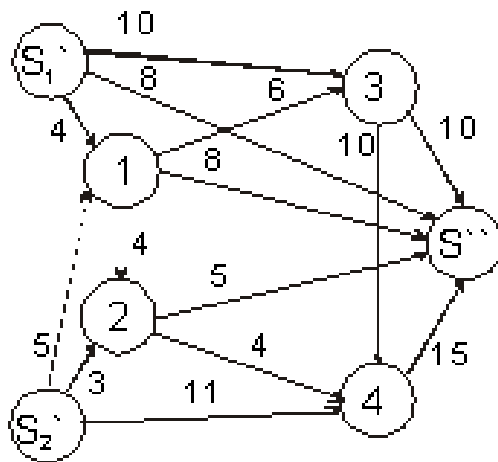
Вариант 19



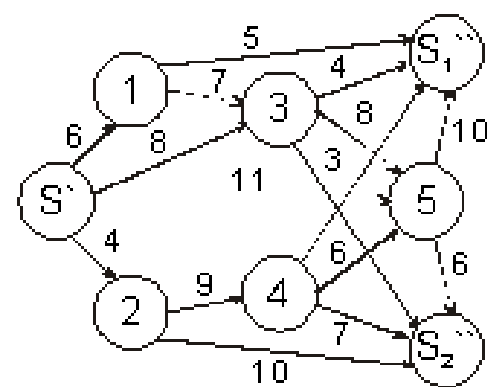
Вариант 20



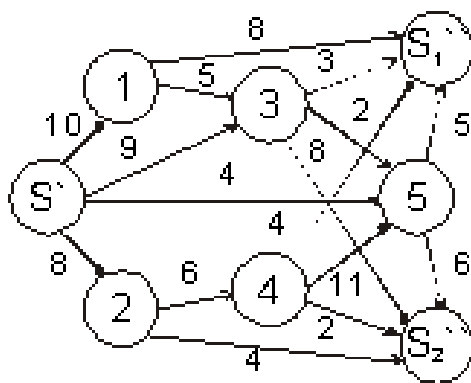
Вариант 21



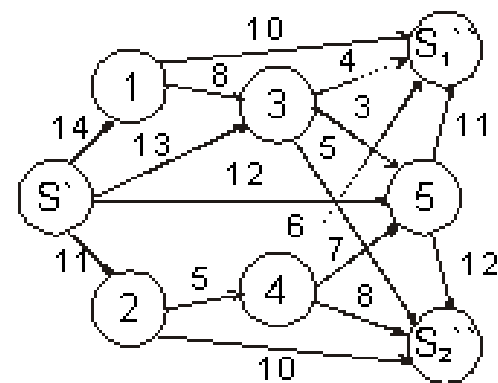
Вариант 22



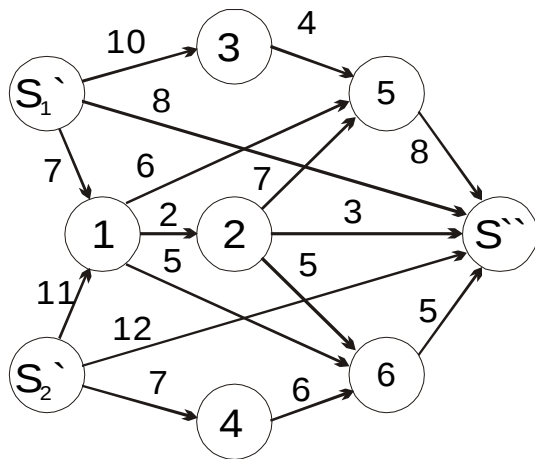
Вариант 23



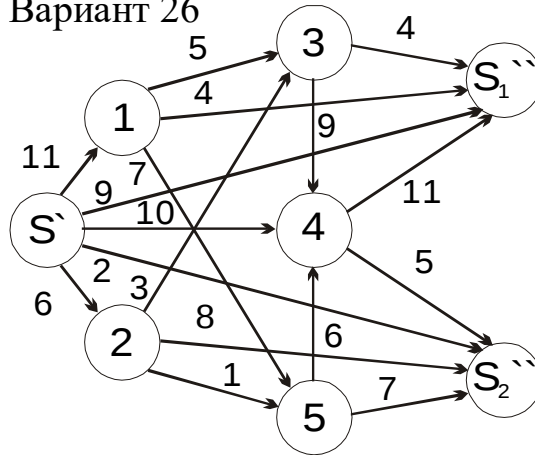
Вариант 24



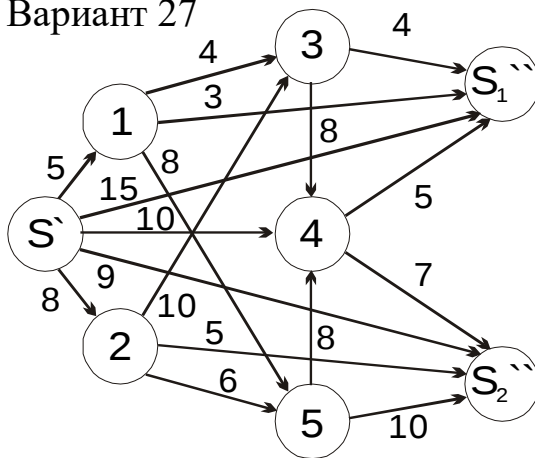
Вариант 25



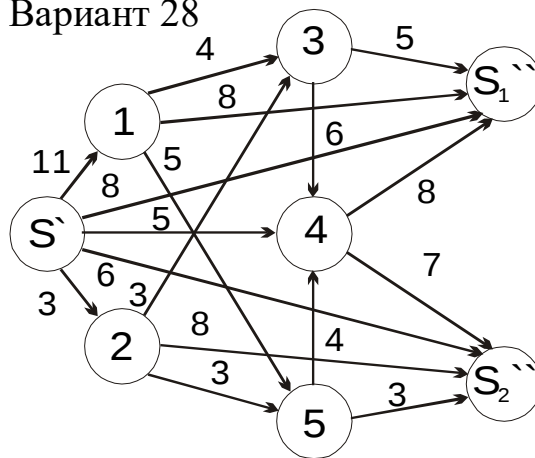
Вариант 26



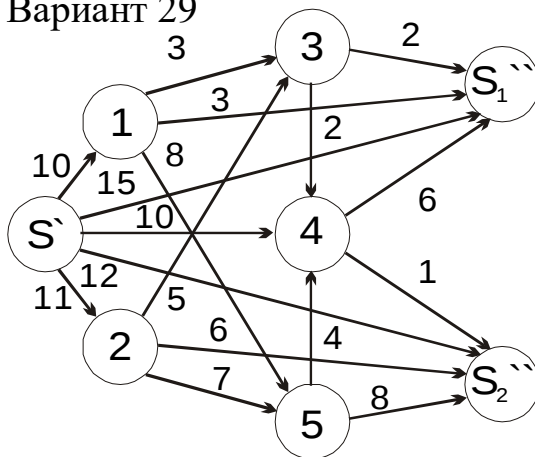
Вариант 27



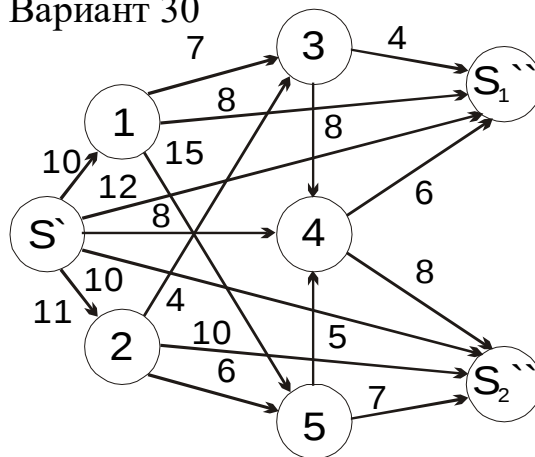
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

ЗАВДАННЯ №1

Для заданого графа (див. рис. 1):

- скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі мінімізації (або максимізації) в мережі;
- знайти у побудованому графі мінімальне (або максимальне) остовне дерево за допомогою алгоритмів Прима та Краскала;
- зробити висновки в термінах постановки задачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Змістовна постановка задачі

Агрофірма «Колос» планує створення меліоративної системи для зрошення полів. Відоме майбутнє розташування польових насосних станцій і можлива комунікаційна мережа трубопроводів, що з'єднують ці станції як між собою, так і з основним резервуаром. Необхідно розробити оптимальну схему прокладання трубопроводів мінімальної довжини, яка дозволить з'єднати кожен насосну станцію з основним резервуаром (безпосередньо або через інші насосні станції), якщо відомі довжини трубопроводів (у кілометрах), що з'єднують усі станції між собою та з резервуаром.

Математична модель:

Побудуємо математичну модель цієї задачі у вигляді мережі (див. рис. 1):

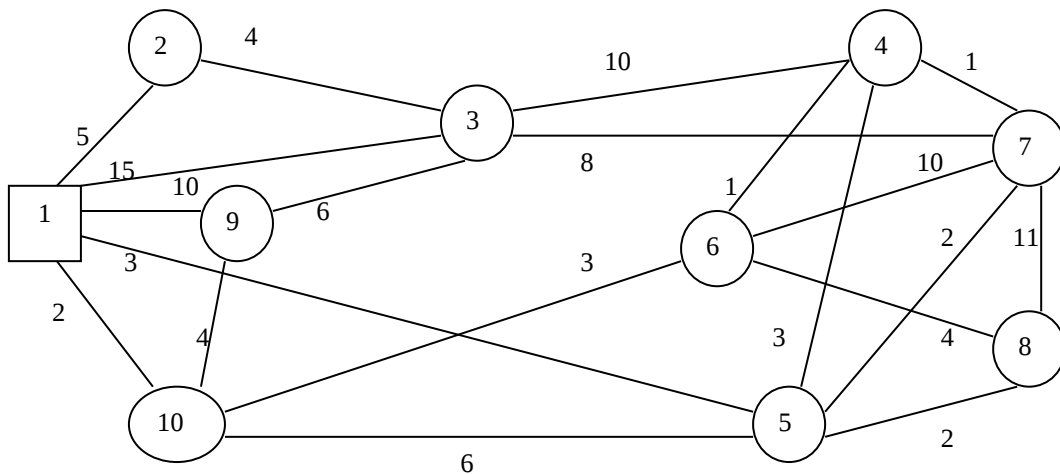


Рис. 1. Мережева модель задачі

Нехай вершина 1 мережі відповідає основному резервуару, а вершини 2–10 — насосним станціям. Ребра, що з'єднують пари вершин мережі, позначають трубопроводи, а їхні ваги — довжину відповідного трубопроводу. Необхідно знайти в заданій мережі остовне дерево мінімальної ваги, яке з'єднує вершину 1 з усіма іншими вершинами мережі.

Розв'язання:

Розв'яжемо початкову задачу за допомогою побудованої математичної моделі, використовуючи **алгоритм Краскала**. Для цього впорядкуємо ребра за зростанням їхніх ваг:

Ребро, l	$(4,7)^*$	$(4,6)^*$	$(1,10)^*$	$(5,7)^*$	$(5,8)^*$	$(1,5)^{*(-)}$	$(6,10)^{*(-)}$	$(4,5)^-$	$(9,10)^*$	$(2,3)^*$
Вага ребра, $w(l)$	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
Ребро, l	$(6,8)^-$	$(1,2)^*$	$(3,9)^-$	$(5,10)^-$	$(3,7)^-$	$(1,9)^-$	$(3,4)^-$	$(6,7)^-$	$(7,8)^-$	$(1,3)^-$
Вага ребра, $w(l)$	4	5	6	6	8	10	10	10	11	15

Знаком «*» позначені ребра, що включаються до остовного дерева, знаком «-» - не включаються.

Таким чином, дана задача має два оптимальні розв'язки (остовні дерева мінімальної ваги), побудована на рис. 2.

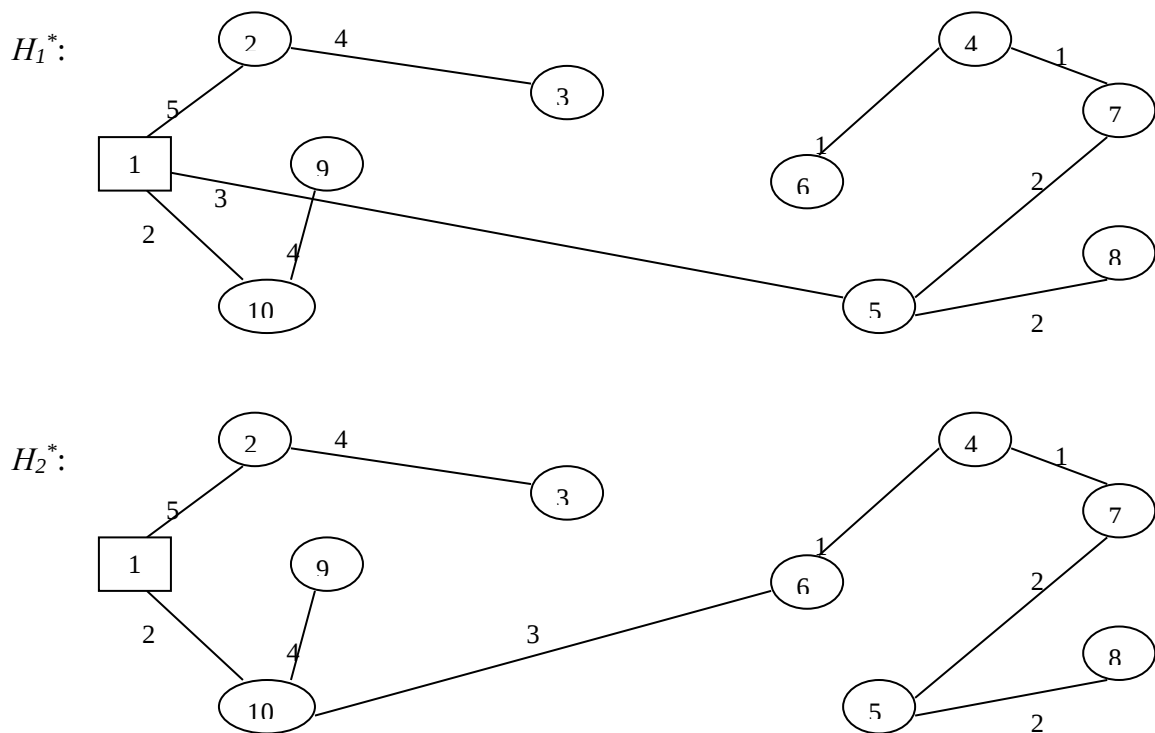


Рис. 2. Оптимальні розв'язки задачі

Розрахуємо вагу мінімального остовного дерева:

$$w(l) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 24$$

Відповідь:

Для прокладки меліоративної системи знадобиться мінімум 24 км. трубопроводу, укладеного так, як показано на рис. 2.

ЗАВДАННЯ 2

Задано зважений орієнтований граф (мережева модель). Для заданої мережі:

- скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі про максимальний потік;
- знайти потік максимальної величини за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона;
- зробити висновки в термінах постановки техніко-економічної задачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Змістовна постановка задачі

Міжнародний олімпійський комітет обрав місто «N» для проведення чергових Олімпійських ігор. Це місто має два міжнародні аеропорти, які з'єднані з містом мережею шосейних доріг. Відомі пасажиропровідні здатності кожної з цих доріг, які різняться через техніко-експлуатаційні особливості. Необхідно визначити таке розподілення пасажиропотоку по заданій дорожній мережі, щоб загальна кількість пасажирів, які прибувають до міста з обох аеропортів за одиницю часу, була максимальною.

Математична модель:

Нехай S_1' , S_2' – два аеропорти міста, S'' – саме місто «N»; вершини 1–4 – передмістя міста «N», через які проходить дорожня мережа; *дуги мережі* – це шосейні дороги, що з'єднують аеропорти з містом; *вага дуги* – максимальний пасажиропотік, який може пройти цією дорогою за одиницю часу.

Математична модель подана на рис. 3:

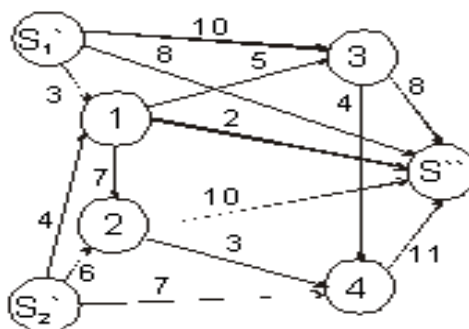


Рис. 3. Мережева модель задачі

Розв'яжемо дану задачу як задачу про максимальний потік у мережі з використанням алгоритму Форда—Фалкерсона.

Орієнтовані шляхи від умовного джерела S' до стоку S'' :

- 1) $S' \rightarrow S_2' \rightarrow 4 \rightarrow S''$, $\alpha_1 = \min\{17; 7; 11\} = 7$, $(S_2'; 4) \downarrow$;
- 2) $S' \rightarrow S_2' \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow S''$, $\alpha_2 = \min\{10; 4; 7; 10\} = 4$, $(S_2'; 1) \downarrow$;
- 3) $S' \rightarrow S_2' \rightarrow 2 \rightarrow S''$, $\alpha_3 = \min\{6; 6; 6\} = 6$, $(S'; S_2'), (S_2'; 2), (2; S'') \downarrow$;
- 4) $S' \rightarrow S_1' \rightarrow 3 \rightarrow S''$, $\alpha_4 = \min\{21; 10; 8\} = 8$, $(3; S'') \downarrow$;
- 5) $S' \rightarrow S_1' \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow S''$, $\alpha_5 = \min\{13; 2; 4; 4\} = 2$, $(S_1'; 3) \downarrow$;
- 6) $S' \rightarrow S_1' \rightarrow S''$, $\alpha_6 = \min\{11; 8\} = 8$, $(S_1'; S'') \downarrow$;
- 7) $S' \rightarrow S_1' \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow S''$, $\alpha_7 = \min\{3; 3; 5; 2; 2\} = 2$, $(3; 4), (4; S'') \downarrow$;
- 8) $S' \rightarrow S_1' \rightarrow 1 \rightarrow S''$, $\alpha_8 = \min\{1; 1; 2\} = 1$, $(S'; S_1'), (S_1'; 1) \downarrow$.

Розв'язання оформимо на мережевій моделі (рис. 4).

Величина максимального потоку, знайденого за допомогою даного алгоритму, дорівнює:

$$\rho_{\max} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 7 + 4 + 6 + 8 + 2 + 8 + 2 + 1 = 38.$$

Оптимальне розв'язання цієї задачі, тобто потік максимальної величини, зображено на рис. 5.

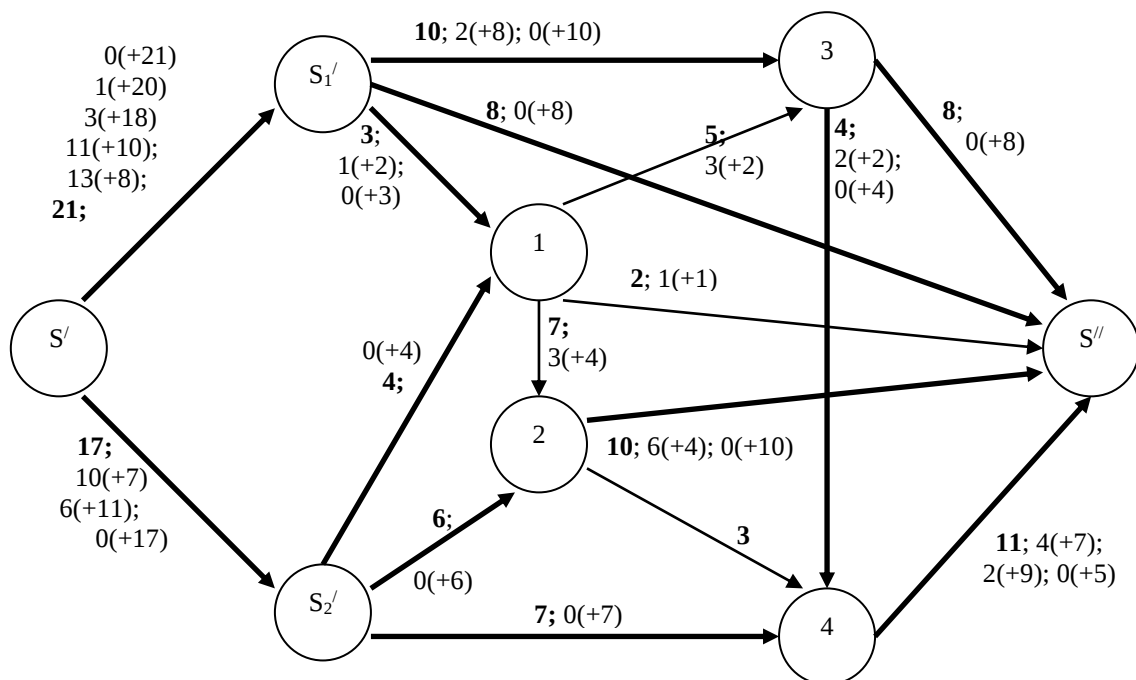


Рис. 4. Розв'язання задачі про максимальний потік за алгоритмом Форда—Фалкерсона

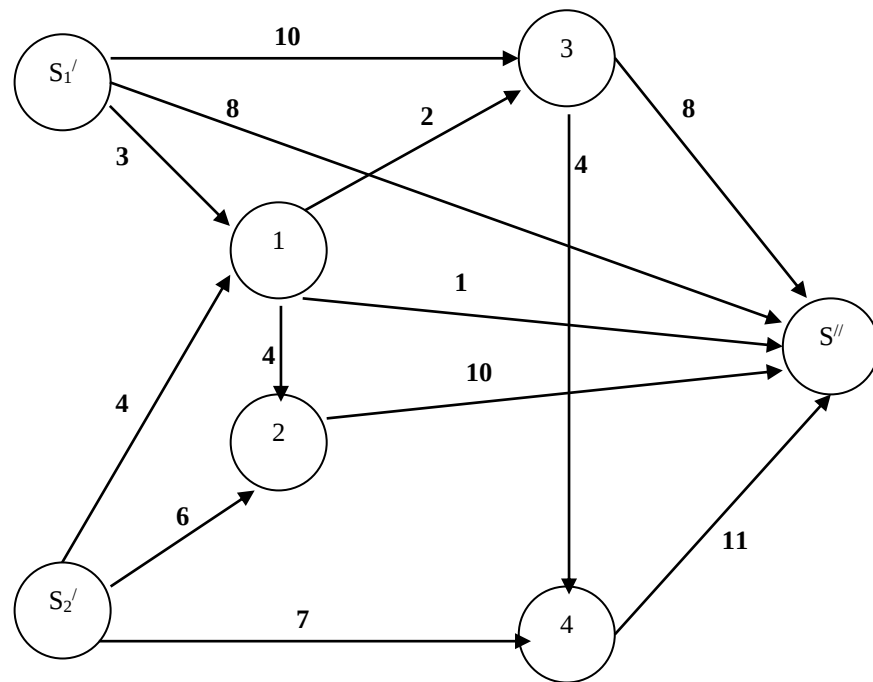


Рис. 5. Оптимальний розв'язок задачі (максимальний потік)

Оптимальні розв'язки задачі про максимальний потік за допомогою процедури «Пошук розв'язку» в Microsoft Excel for Windows наведені на рис. 6.

Як видно з рис. 6, дана задача має три оптимальні розв'язки.

Відповідь:

Перевезення пасажирів з аеропортів до міста слід здійснювати відповідно до схеми, поданої на рис. 6 (або на рис. 7 або на рис. 8). При цьому кількість перевезених пасажирів буде максимальною і становитиме 38 тисяч осіб на годину (наприклад).

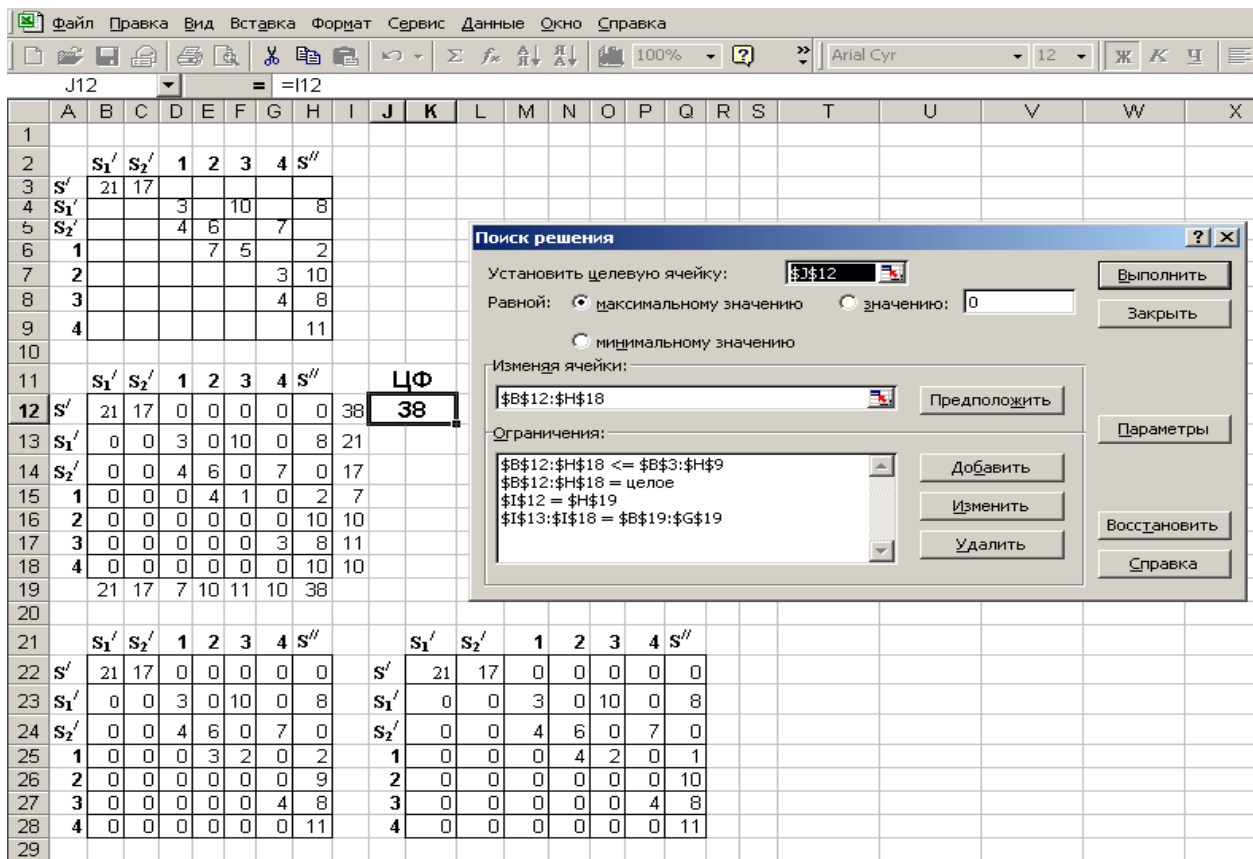


Рис. 6. Оптимальные решения задачи (максимальный поток) с помощью процедуры «Поиск решения»

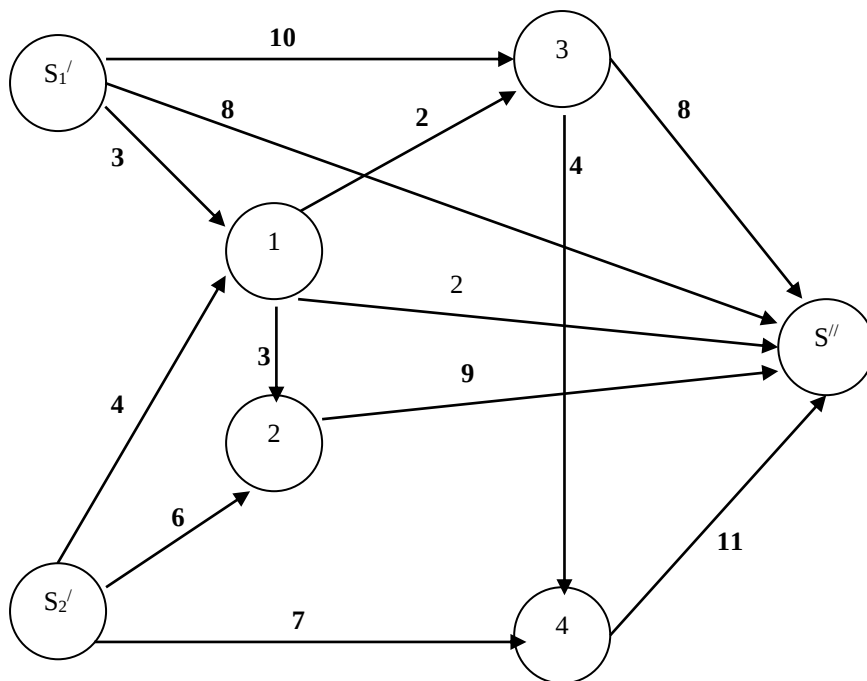


Рис. 7. Оптимальный розв'язок задачі (варіант розв'язку 2)

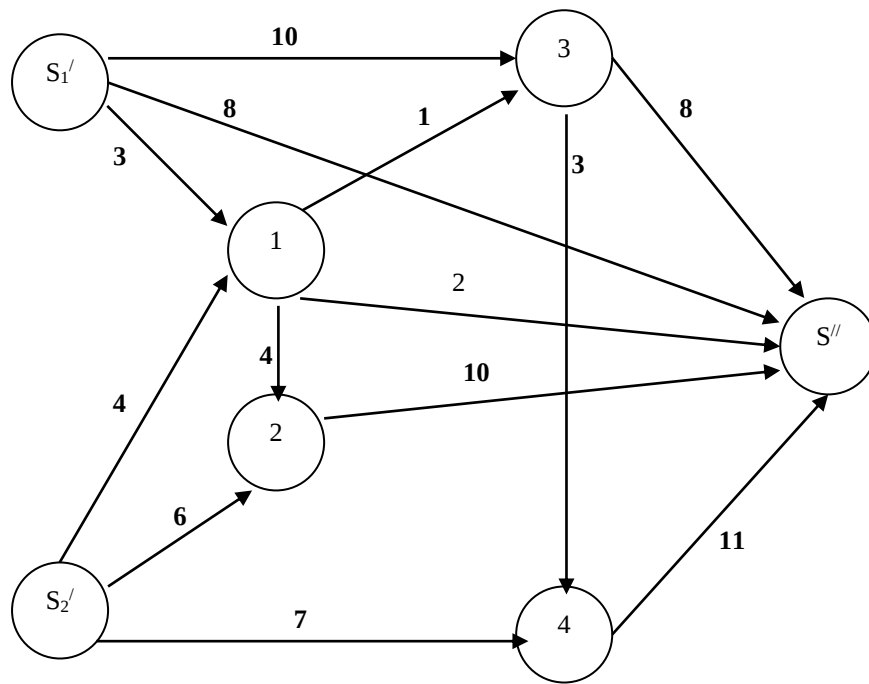


Рис. 8. Оптимальний розв'язок задачі (варіант розв'язку 3)