

Завдання: за наданими матрицями гри $[a_{ij}]_{4 \times 5}$ виконати:

- розрахунок нижньої та верхньої ціни гри;
- зробити висновок про наявність чистої або мішаної стратегії;
- скласти взаємодвоїсті задачі лінійного програмування згідно до матриці гри $[a_{ij}]_{4 \times 5}$;
знайти їх розв'язок за допомогою інструменту «Поиск решений» Microsoft Excel;
- розрахувати ціну гри;
- розрахувати оптимальні стратегії для першого та другого гравця, зробити висновки.

Варіант 1

11	1	-6	-8	-7
-6	9	-10	-2	8
-1	4	-7	0	8
-9	-7	9	-1	7

Варіант 2

-2	-2	-6	5	6
-2	9	7	-7	2
-2	11	-6	4	-6
7	-8	-4	-3	8

Варіант 3

-7	6	9	7	9
-2	6	6	1	6
4	8	-1	0	2
-6	2	-1	-4	9

Варіант 4

-3	0	5	-6	8
9	9	3	-1	2
-10	3	-3	10	-9
-9	8	-2	0	1

Варіант 5

4	-3	-7	-5	-7
-4	7	-3	3	-6
10	-6	-4	2	4
6	7	-6	-1	1

Варіант 6

-10	-1	1	9	-1
-8	11	1	2	-6
-6	-10	-6	4	6
6	3	-9	7	-3

Варіант 7

-8	4	4	-5	9
7	-3	2	11	1
2	-4	7	3	1
-6	-2	1	5	6

Варіант 8

-3	9	-2	-3	1
-1	3	-3	-4	6
3	-4	4	-3	3
1	9	-8	7	-9

Варіант 9

-9	9	7	-10	-4
3	-7	6	0	-3
-1	7	10	1	-9
6	3	11	-1	7

Варіант 10

11	-8	3	-5	7
-10	3	-3	-5	-2
9	4	10	10	4
-7	10	8	9	9

Варіант 11

10	6	8	6	-8
3	9	7	4	6
-6	10	2	1	6
-6	6	-9	3	0

Варіант 12

6	7	1	10	7
8	3	-3	-1	5
0	5	-5	-9	9
-1	-3	4	-3	-10

Варіант 13

8	5	-9	-4	2
8	-1	-3	-6	-7
0	9	-9	2	3
0	-9	2	10	-2

Варіант 14

-3	9	3	1	8
2	-1	-2	9	-10
10	2	10	10	10
2	0	-6	-9	6

Варіант 15

-7	-1	7	-2	-1
-1	1	-3	-6	2
-1	-9	-4	4	-3
-3	7	-1	8	10

Варіант 16

4	9	-8	-6	4
4	-5	1	-9	-3
4	6	-6	-8	7
-7	1	-5	-6	5

Вариант 17

0	3	-7	10	5
-7	5	-4	-6	3
4	-3	4	7	5
7	11	4	2	7

Вариант 18

6	-4	3	-2	-4
4	9	2	5	3
-4	-6	4	-3	10
-2	-9	8	-10	11

Вариант 19

-9	-9	9	-1	-3
2	7	5	-9	7
6	-5	-6	-10	0
2	-6	8	8	-9

Вариант 20

0	2	11	10	-6
-9	-3	2	-7	-5
8	4	8	2	9
-6	0	-1	7	-9

Вариант 21

-3	0	2	-8	11
6	-1	-4	-8	-2
-8	-1	6	-9	6
-9	6	1	-6	10

Вариант 22

-5	7	4	3	2
7	-1	4	3	-4
-3	6	7	-2	3
6	4	-8	7	10

Вариант 23

6	9	7	6	-9
2	9	7	-9	3
9	8	-7	6	-7
6	-9	-5	-2	-7

Вариант 24

-10	-6	0	5	8
3	3	-5	-7	-3
-5	0	9	-8	7
8	-3	-1	-9	-6

Вариант 25

11	1	1	10	4
-4	10	-2	8	-6
-2	6	-4	-5	-10
6	-5	8	-6	5

Варіант 26

4	10	3	8	-1
-7	-9	10	9	6
-1	-5	1	4	7
9	6	-1	10	1

Варіант 27

-2	-1	-10	-6	5
7	-3	-5	-4	-8
-6	4	-3	8	6
4	-9	-8	-9	-8

Варіант 28

-1	3	-1	11	8
-5	-7	2	6	-3
1	1	-5	11	4
4	5	-2	-1	5

Варіант 29

-2	-3	7	9	8
-9	2	-2	6	9
8	1	2	3	2
5	-1	-1	-7	6

Варіант 30

-10	2	-7	-3	1
2	2	8	5	0
5	-7	-7	2	6
6	-9	7	-1	2

ПРИКЛАД. Нехай у грі беруть участь дві сторони А і В. Умови гри задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею)

А		В				
		В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
		Х ₁	Х ₂	Х ₃	Х ₄	Х ₅
А ₁	Y ₁	-8	3	-7	1	-3
А ₂	Y ₂	2	2	6	0	2
А ₃	Y ₃	4	-7	-7	6	3
А ₄	Y ₄	5	-4	4	1	-3

Якщо елемент матриці гри додатній, то його значення відповідає виграшу сторони А, якщо від'ємне, то його абсолютне значення дорівнює виграшу сторони В.

Якщо виграш сторони А дорівнює програшу сторони В, то така гра називається **грою з нульовою сумою**.

Стратегію, яку обирає сторона А будемо позначати А₁, А₂, А₃, А₄, а стратегію сторони В символами В₁, В₂, В₃, В₄, В₅. Ймовірність використання відповідної стратегії гравцем А позначимо Y₁, Y₂, Y₃, Y₄, а гравцем В - X₁, X₂, X₃, X₄, X₅. Змішаною стратегією гравця А, відповідно, гравця В, називаються вектори

$$\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \quad \bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5),$$

для яких

$$\sum_{i=1}^4 Y_i = 1, \quad \sum_{i=1}^5 X_i = 1, \quad Y_i \geq 0 (i = \overline{1, 4}), \quad X_j \geq 0 (j = \overline{1, 5}). \quad (1)$$

Цілі гравців: А намагається забезпечити собі максимальний виграш, а В намагається зробити свій програш мінімальним за рахунок обрання відповідної стратегії. Таким чином, цілі гравців А і В є протилежними. Розв'язання задачі полягає у тому, щоб знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній результат (виграш). Вважаємо, що гравці діють без зайвого ризику і використовують *мінімаксу та максимінну стратегії*. А саме: гравці обирають таку з альтернатив стратегій, песимістична оцінка якої найкраща.

Гравець А використовує принцип максиміна: для кожної стратегії обирається найгірший для А (мінімальний) виграш, і серед них вибирається гарантований максимальний виграш – **нижня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим максимальним виграшем, а гарантованим найбільшим виграшем серед мінімальних виграшів.

Гравець В використовує принцип мінмакса: для кожної стратегії обирається найгірший для А (максимальний) програш, і серед них вибирається гарантований найменший програш – **верхня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим мінімальним програшем, а гарантованим найменшим програшем серед максимальних програшів.

А		В					Мінімум рядків
		В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅	
		Х ₁	Х ₂	Х ₃	Х ₄	Х ₅	
А ₁	Y ₁	-8	3	-7	1	-3	-8
А ₂	Y ₂	2	2	6	0	2	0*
А ₃	Y ₃	4	-7	-7	6	3	-7
А ₄	Y ₄	5	-4	4	1	-3	-4
Максимум стовпчиків		5	2*	6	6	3	

Нижня ціна гри у даному випадку дорівнює 0, а верхня - 2.

У тих випадках, коли верхня і нижня ціни гри співпадають, гра є грою з сідлою відповідною точкою. У такому випадку стратегії, що відповідають цим цінам, є єдиним можливим способом дій двох гравців, що відповідають розв'язку задачі в чистих стратегіях.

У даному прикладі сідлою відповідної точки не існує, тому для розв'язання задачі використовується *змішана стратегія*, яка пов'язана з випадковим обранням гравцями на кожному ході однієї стратегії серед кількох чистих стратегій.

У випадку гри з нульовою сумою середня величина виграшу (програшу) – математичне сподівання, є функцією від змішаних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$:

$$S(\bar{Y}, \bar{X}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 a_{ij} Y_i X_j.$$

Функція $S(\bar{Y}, \bar{X})$ називається **платіжною функцією гри з матрицею** $[a_{ij}]_{4 \times 5}$. Стратегії

$\bar{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\bar{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ називаються оптимальними, якщо для довільних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ виконуються умови

$$S(\bar{Y}, \bar{X}^*) \leq S(\bar{Y}^*, \bar{X}^*) \leq S(\bar{Y}^*, \bar{X})$$

Це означає, що використання в грі оптимальних змішаних стратегій $\bar{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\bar{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ забезпечує гравцеві А виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$; другому гравцеві – програш не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає **ціну гри С**, тобто

$$S(\bar{Y}^*, \bar{X}^*) = C.$$

Застосуємо теореми теорії матричних ігор, отримаємо, що для того, щоб значення C було ціною гри, а $\bar{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\bar{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ - оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^4 a_{ij} Y_i^* \geq C \quad (j = \overline{1,5}) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} X_j^* \leq C \quad (i = \overline{1,4}) \quad (3)$$

Для подальшого розв'язування потрібно, щоб $C > 0$. Це завжди можна мати завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці виграшів одного і того ж постійного числа d не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на d .

Тепер після зазначених припущень можна обидві частини (2) і (3) поділити на C і увести позначення

$$y_i = Y_i / C, \quad x_j = X_j / C,$$

змінивши відповідним чином рівності (1)

$$\sum_{i=1}^4 y_i^* = 1/C, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^* = 1/C,$$

отримати пару двоїстих задач лінійного програмування:

$f = \sum_{i=1}^4 y_i \rightarrow \min$ $\sum_{i=1}^4 a_{ij} y_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,5}), \quad y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,4})$	$F = \sum_{i=1}^5 x_i \rightarrow \max$ $\sum_{j=1}^5 a_{ij} x_j \leq 1 \quad (i = \overline{1,4}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5})$
---	---

Алгоритм розв'язання задачі теорії матричних ігор

- 1) знаходимо верхню та нижню ціни гри і робимо висновок про розв'язання задачі у чистих чи мішаних стратегіях (у даному випадку задача розв'язується у мішаних стратегіях);
- 2) якщо серед елементів матриці є від'ємні, то для того, щоб ціна гри була додатною, знаходимо модуль мінімального елементу матриці, позначивши його через d (у даному випадку $d = 8$); додаємо його до всіх елементів матриці;
- 3) розв'язуємо пару двоїстих задач лінійного програмування;
- 4) знаходимо значення C за формулою

$$C = 1 / \sum_{i=1}^4 y_i^* \quad \text{або} \quad C = 1 / \sum_{i=1}^5 x_i^* ;$$

- 5) визначаємо стратегії гравців:

$$\text{гравця А: } Y_i^* = y_i^* \cdot C \quad (i = \overline{1,4}) \quad \text{гравця В: } X_j^* = x_j^* \cdot C \quad (j = \overline{1,5}),$$

- 6) робимо висновок з врахуванням пункту 2 алгоритму, що ціна гри дорівнює $C - d$.

Зразок розв'язання задачі матричних ігор за допомогою інструменту «Поиск решений» Microsoft Excel наведено на послідовності наступних рисунків.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				Платежна матриця							
2				-8	3	-7	1	-3			
3				2	2	6	0	2			
4				4	-7	-7	6	3			
5				5	-4	4	1	-3			
6											
7				=МИН(D2:H5)	d=	8					
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ		
9									=СУММ(C9:H9)		
10											
11	y1			=D2+\$F\$7	=E2+\$F\$7	=F2+\$F\$7	=G2+\$F\$7	=H2+\$F\$7	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$H\$9,\$I\$9:\$I\$11)	<=	1
12	y2			=D3+\$F\$7	=E3+\$F\$7	=F3+\$F\$7	=G3+\$F\$7	=H3+\$F\$7	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$H\$9,\$I\$12:\$I\$12)	<=	1
13	y3			=D4+\$F\$7	=E4+\$F\$7	=F4+\$F\$7	=G4+\$F\$7	=H4+\$F\$7	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$H\$9,\$I\$13:\$I\$13)	<=	1
14	y4			=D5+\$F\$7	=E5+\$F\$7	=F5+\$F\$7	=G5+\$F\$7	=H5+\$F\$7	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$H\$9,\$I\$14:\$I\$14)	<=	1
15	ЦФ	=СУММ(B11:E14)		=СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$B\$14,\$I\$11:\$I\$14)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$B\$14,\$I\$11:\$I\$14)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$B\$14,\$I\$11:\$I\$14)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$B\$14,\$I\$11:\$I\$14)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$B\$14,\$I\$11:\$I\$14)			
16				>=	>=	>=	>=	>=			
17				1	1	1	1	1			

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Times New Roman 10

И9 =СУММ(D9:H9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1				Платежна матриця											
2				-8	3	-7	1	-3							
3				2	2	6	0	2							
4				4	-7	-7	6	3							
5				5	-4	4	1	-3							
6															
7				-8 d=		8									
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ						
9				0,01018	0,04206	0	0,0597	0	0,11194						
10															
11	y1			0	11	1	9	5	1	<=	1				
12	y2			10	10	14	8	10	1	<=	1				
13	y3			12	1	1	14	11	1	<=	1				
14	y4			13	4	12	9	5	0,83786	<=	1				
15	ЦФ		0	0	0	0	0	0							
16				>=	>=	>=	>=	>=							
17				1	1	1	1	1							

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$I9

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: 0 ☐ минимальному значению

Изменить ячейки: \$D9:\$H9

Ограничения: \$I11:\$I14 <= \$K11:\$K14

Выполнить Закрыть Параметры

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1				Платежна матриця											
2				-8	3	-7	1	-3							
3				2	2	6	0	2							
4				4	-7	-7	6	3							
5				5	-4	4	1	-3							
6															
7				-8 d=		8									
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ						
9				0,01018	0,04206	0	0,0597	0	0,11194						
10															
11	y1	0,01493		0	11	1	9	5	1	<=	1				
12	y2	0,08209		10	10	14	8	10	1	<=	1				
13	y3	0,01493		12	1	1	14	11	1	<=	1				
14	y4	0		13	4	12	9	5	0,83786	<=	1				
15	ЦФ	0,11194		1	1	1,1791	1	1,0597							
16				>=	>=	>=	>=	>=							
17				1	1	1	1	1							
18															
19															
20															
21															
22															
23															

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$B15

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: 0 ☐ минимальному значению

Изменить ячейки: \$B11:\$B14

Ограничения: \$D15:\$H15 >= \$J17:\$J17

Выполнить Закрыть Параметры

Microsoft Excel - теорія матричних ігор

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Times New Roman 10

C05 =B18:F7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
4				4	-7	-7	6	3							
5				5	-4	4	1	-3							
6															
7				-8 d=		8									
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ						
9				0,01018	0,04206	0	0,0597	0	0,11194						
10															
11	y1	0,01493		0	11	1	9	5	1	<=	1				
12	y2	0,08209		10	10	14	8	10	1	<=	1				
13	y3	0,01493		12	1	1	14	11	1	<=	1				
14	y4	0		13	4	12	9	5	0,83786	<=	1				
15	ЦФ	0,11194		1	1	1,1791	1	1,0597							
16				>=	>=	>=	>=	>=							
17				1	1	1	1	1							
18	C=	=1/B15		оптимальні стратегії											
19				гравця B											
20				=D9*\$B\$18	=E9*\$B\$18	=F9*\$B\$18	=G9*\$B\$18	=H9*\$B\$18							
21				=B11*\$B\$18											
22	гравця A	=B12*\$B\$18		ціна гри											
23		=B13*\$B\$18													
24		=B14*\$B\$18													
25															

Действия: Автозагрузка

Панель задач: ИОД для минимизации, Microsoft Excel - 1, Задача теории игр...

Microsoft Excel - теорія матричних ігор

Введіть слово:

Times New Roman 10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
4				4	-7	-7	6	3							
5				5	-4	4	1	-3							
7				-8 d=		8									
8				x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ						
9				0,01018	0,04206	0	0,0597	0	0,11194						
11	y1	0,01493		0	11	1	9	5	1	<=	1				
12	y2	0,08209		10	10	14	8	10	1	<=	1				
13	y3	0,01493		12	1	1	14	11	1	<=	1				
14	y4	0		13	4	12	9	5	0,83786	<=	1				
15	ЦФ	0,11194		1	1	1,1791	1	1,0597							
16				>=	>=	>=	>=	>=							
17				1	1	1	1	1							
18	C=	8,93333		оптимальні стратегії											
19				гравця В											
20				0,09091	0,37576	0	0,53333	0							
21		0,13333													
22	гравця А	0,73333		ціна гри		0,93333									
23		0,13333													
24		0													
25															

Готово

пуск

ИСО_для менедж... Microsoft Excel - Т... Задана теорія иг...

EN 1:09

ВІДПОВІДЬ: оптимальна мішана стратегія гравця А включає стратегії A_1 , A_2 , A_3 , які застосовується гравцем А з ймовірностями $Y_1=0,13333$, $Y_2=0,73333$, $Y_3=0,13333$, а мішана стратегія гравця В включає стратегії B_1 , B_2 , B_4 з ймовірностями $X_1=0,09091$, $X_2=0,37576$, $X_4=0,53333$. При цьому ціна гри складатиме 0,93333. Це означає, що гравець А виграве 0,93333 у.о., а гравець В – програє 0,93333 у.о.