

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

У системах масового обслуговування (СМО) розглядаються черги і вирішуються питання по обслуговуванню ряду (поток) вимог від людей, приладів, подій.

Приклади СМО: черга у магазині (касир розглядається як «прилад», що обслуговує чергу); телефонна станція (розглядається як прилад, що обслуговує потік замовлень на телефонні розмови); оператори ЕОМ (вони розглядаються як прилад, що обслуговує потік інформації від приладів, підприємств та інших операторів); n робітників цеху, які можуть звернутися з вимогами інструменту до комірника («приладу обслуговування») і т.п.

Вимоги на виконання робіт поступають у випадкові моменти часу, обслуговуючі пристрої задовольняють вимоги (обробляють їх) за випадковий термін. **Кількість вимог** є статистично оціненою величиною.

Таким чином, СМО мають дві головні ознаки: обслуговуючий пристрій і чергу.

СМО розрізняються:

1. За конструкцією обслуговуючого пристрою: одноканальна і багатоканальна.
2. За дисципліною черги. Найбільше розповсюджено правило: перший прийшов – перший обслуговується. Але у СМО розглядаються й інші варіанти обслуговування, наприклад:
 - вимоги за пріоритетом;
 - відсутність черги (якщо для обслуговування черги немає вільного каналу або якщо СМО зайнята, то вимога не задовольняється і зникає).

При аналізі СМО намагаються одержати такі характеристики:

- а) середню довжину черги;
- б) середній термін обслуговування;
- в) середній час, за який обслуговуючий пристрій не працює.

Для отримання математичної моделі СМО потрібно знати:

- а) конструкцію СМО;
- б) математичний опис потоку вимог, які поступають у СМО;
- в) опис дисципліни черги, способу обслуговування;
- г) математичний опис обробки вимог.

ПОЗНАЧЕННЯ

λ – інтенсивність потоку заявок;

μ – інтенсивність потоку обслуговування;

стани СМО (нумеруємо за числом заявок, що знаходяться в системі):

$S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$, де S_k – стан системи, коли в ній знаходиться k заявок, тобто зайнято k каналів;

p_k – ймовірність того, що k каналів зайнято ($k=0, 1, \dots, n$) (зокрема, p_0 – ймовірність того, що усі канали вільні, а p_n – ймовірність того, що усі канали зайняті);

p_{n+s} – ймовірність того, що всі каналів зайняті, а s заявок очікують обслуговування;

m – число заявок, що очікують обслуговування (тобто довжина черги).

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Одноканальна система з відмовами: $p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$

2. Багатоканальна система з відмовами: $p_k = \frac{\alpha^k}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!}}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}.$

3. Припущення в СМО з чергами: заявки, що потрапили до СМО, будуть знаходитися в черзі доти, поки її не обслужать. Тоді $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \beta = \frac{\nu}{\mu}$

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad s \geq 1,$$

$$m = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{nn! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad p_{\pm} = 1 - \sum_{k=1}^n p_k, \quad p_h = \frac{\nu}{\lambda} m, \quad \nu = \frac{1}{t_{cp}},$$

де $p_{\pm}$ - ймовірність наявності черги, p_h - ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною, p_h трактується ще інакше, як відношення середнього числа заявок, що залишають чергу в одиницю часу, до середнього числа заявок, що знаходяться у чергу в одиницю часу. Відносна пропускна спроможність СМО: $q = 1 - p_{n+m}$.

4. Припущення на СМО з **обмеженою довжиною черги**: заявка, що застала усі канали зайнятими, стає в чергу тільки в тому випадку, якщо в ній знаходяться менше, ніж j заявок; якщо ж число заявок у черзі дорівнює j , то заявка, що надійшла, залишає систему не обслуговуваною:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^j \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^j \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad 1 \leq s \leq j.$$

Ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною, дорівнює ймовірності p_{n+j} . Відносна пропускна спроможність $q = 1 - p_{n+m}$. Абсолютна пропускна спроможність характеризує число заявок, що обслуговуються в одиницю часу: $Q = \lambda q$. Ймовірність p_0 може також характеризувати відносний час незайнятості системи обслуговування.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розглянемо задачу про багатоканальну систему з відмовами.

Фірма надає невідкладну допомогу з питань, пов'язаних з програмним забезпеченням комп'ютерної техніки. За рік у фірму звертається у середньому 2000 чол по певному питанню. Фірма приймає клієнтів 6 год. На день протягом 255 днів у рік. Середній час обслуговування клієнта t_{cp} . Визначити ймовірність зайнятості обслуговуючого персоналу фірми, коли їх кількість $n = 1, 2, 3$.

Розв'язання. Обчислимо щільність вхідного потоку, тобто число клієнтів, що звертаються у фірму протягом хвилини:

$$\lambda = \frac{2000}{255 \cdot 6 \cdot 60} = 0,022 \text{ чол./хв.}$$

Для подальших обчислень застосуємо формули

$$\mu = \frac{1}{t_{cp}}, \quad p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!}}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu},$$

згідно до яких робимо розрахунки за допомогою таблиць Microsoft Exel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		ДАНО									
2	lambda=	0,022									
3	t_cp =	12									
4											
5		Розрахунок									
6	mu=	=1/B3									
7	alfa=	=B2/B6									
8											
9	i		0	1	2	3					
10	alfa^i	=B\$7^C9	=B\$7^D9	=B\$7^E9	=B\$7^F9						
11	i!	=ФАКТР(C9)	=ФАКТР(D9)	=ФАКТР(E9)	=ФАКТР(F9)						
12	дріб	=C10/C11	=D10/D11	=E10/E11	=F10/F11						
13											
14	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3					
15	1	=СУММ(C12:D12)	=C12/\$B\$15	=D12/\$B\$15							
16	2	=СУММ(C12:E12)	=C12/\$B\$16	=D12/\$B\$16	=E12/\$B\$16						
17	3	=СУММ(C12:F12)	=C12/\$B\$17	=D12/\$B\$17	=E12/\$B\$17	=F12/\$B\$17					
18											
19											
20											
21											
22											
23											

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ДАНО												
2	lambda=	0,022												
3	t_cp =	12												
4														
5		Розрахунок												
6	mu=	0,08333333												
7	alfa=	0,264												
8														
9	i		0	1	2	3								
10	alfa^i		1	0,264	0,0697	0,0184								
11	i!		1	1	2	6								
12	дріб		1	0,264	0,03485	0,00307								
13														
14	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3								
15	1	1,264	0,79114	0,20886										
16	2	1,298848	0,76991	0,20326	0,02683									
17	3	1,30191462	0,7681	0,20278	0,02677	0,00236								
18														
19														
20														
21														
22														
23														

Як бачимо, збільшення числа працівників зменшує ймовірність відмови: для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0,20886$, для 2 працівників ймовірність відмови - $p_2 = 0,02683$, для 3 працівників - $p_3 = 0,00236$.

Для такого вхідного потоку навіть один працівник забезпечує високу ефективність роботи фірми.

Розглянемо, як змінюються ймовірнісні характеристики системи обслуговування при тій же продуктивності, але при збільшенні вхідного потоку в 10 разів, число звернень

на рік тепер становить 20 000 чол. Тоді $\lambda = 0,22$ чол./рік, а ймовірнісні характеристики обчислюємо допомогою таблиць Microsoft Excel, змінивши в заготовленій раніше таблиці значення $\lambda = 0,022$ на $\lambda = 0,22$, отримаємо

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		ДАНО											
2	lambda=	0,22											
3	t_cp =	12											
4													
5		Розрахунок											
6	mu=	0,0833333											
7	alfa=	2,64											
8													
9	i		0	1	2	3	4	5					
10	alfa^i		1	2,64	6,9696	18,39974	48,5753	128,239					
11	i!		1	1	2	6	24	120					
12	дріб		1	2,64	3,4848	3,066624	2,02397	1,06866					
13													
14	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5					
15	1	3,64	0,274725	0,725275									
16	2	7,1248	0,140355	0,370537	0,489108								
17	3	10,191424	0,098122	0,259041	0,341935	0,300902							
18													
19													
20													
21													
22													
23													

Отже,

для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0,725275$,

для 2 працівників ймовірність відмови - $p_2 = 0,489108$,

для 3 працівників - $p_3 = 0,300902$.

Зі збільшенням на порядок щільності вхідного потоку ймовірність відмови з ростом числа каналів не змінюється так різко, як у попередньому випадку.

Задамо число відвідувань у рік 200 000 чол. Тоді $\lambda = 2,2$ чол./рік, а ймовірнісні характеристики обчислюємо допомогою таблиць Microsoft Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		ДАНО											
2	lambda=	2,2											
3	t_cp =	12											
4													
5		Розрахунок											
6	mu=	0,0833333											
7	alfa=	26,4											
8													
9	i		0	1	2	3	4	5					
10	alfa^i		1	26,4	696,96	18399,74	485753	1,3E+07					
11	i!		1	1	2	6	24	120					
12	дріб		1	26,4	348,48	3066,624	20239,7	106866					
13													
14	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5					
15	1	27,4	0,036496	0,963504									
16	2	375,88	0,00266	0,070235	0,927104								
17	3	3442,504	0,00029	0,007669	0,101229	0,890812							
18													
19													
20													
21													
22													
23													

Для такого вхідного потоку і розглянутого числа каналів ймовірність відмови досить велика:

для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0,963504$,

для 2 працівників ймовірність відмови - $p_2 = 0,927104$,

для 3 працівників - $p_3 = 0,890812$.

Приклад 2. Розглянемо задачу про багатоканальну систему з чергами за тих же умов, що й у попередньому прикладі.

Для обчислень застосуємо формули

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad m = \frac{\alpha^{n+1} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad p_{\div} = 1 - \sum_{k=1}^n p_k, \quad p_h = \frac{\nu}{\lambda} m, \quad \nu = \frac{1}{t_{cp}},$$

де $p_{\div}$ - ймовірність наявності черги. Режим вважається установленим, якщо $\alpha < 1$. Для $N = 2000$ чол./рік при будь-якому значенні n режим є установленим, а для $N = 20\,000$ чол./рік - тільки для $n \geq 3$. Згідно до зазначених формул робимо розрахунки за допомогою таблиць Microsoft Excel $N = 2000$ чол./рік.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ДАНО							
2	lambda=	0,022							
3	t_cp =	12							
4									
5		Розрахунок							
6	mu=	=1/B3							
7	alfa=	=B2/B6							
8	nu=	=1/B3							
9									
10	i		0	1	2	3			
11	alfa^i		=B\$7^C10	=B\$7^D10	=B\$7^E10	=B\$7^F10			
12	i!		=ФАКТР(C10)	=ФАКТР(D10)	=ФАКТР(E10)	=ФАКТР(F10)			
13	дріб		=C11/C12	=D11/D12	=E11/E12	=F11/F12			
14									
15	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	m	p_ч	p_h
16	1	=СУММ(C13:D13)+D13*B7/(A16-B7)	=C13/\$B\$16	=D13/\$B\$16			=D13*\$B\$7/(A1	=1-СУММ(C16:F1	=B\$3/\$B\$2*G16
17	2	=СУММ(C13:E13)+E13*B7/(A17-B7)	=C13/\$B\$17	=D13/\$B\$17	=E13/\$B\$17		=E13*\$B\$7/(A1	=1-СУММ(C17:F1	=B\$3/\$B\$2*G17
18	3	=СУММ(C13:F13)+F13*B7/(A18-B7)	=C13/\$B\$18	=D13/\$B\$18	=E13/\$B\$18	=F13/\$B\$18	=F13*\$B\$7/(A1	=1-СУММ(C18:F1	=B\$3/\$B\$2*G18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		ДАНО											
2	lambda=	0,022											
3	t_cp =	12											
4													
5		Розрахунок											
6	mu=	0,0833333											
7	alfa=	0,264											
8	nu=	0,0833333											
9													
10	i		0	1	2	3							
11	alfa^i		1	0,264	0,069696	0,0184							
12	i!		1	1	2	6							
13	дріб		1	0,264	0,034848	0,003067							
14													
15	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	m	p_ч	p_h				
16	1	1,3586957	0,736	0,194304			0,0947	0,0697	0,3587				
17	2	1,3041475	0,766784	0,202431	0,026721		0,00468	0,00406	0,01773				
18	3	1,3022105	0,767925	0,202732	0,026761	0,002355	0,00025	0,00023	0,00094				
19													
20													
21													
22													
23													

Маємо: ймовірність наявності черги $p_{\div}$

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,0697,

при 2 працівниках – 0,00406,

при 3 – 0,00023,

ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною p_h

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,3587,

при 2 працівниках – 0,01773,

при 3 – 0,00094,

середня довжина черги m

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,0947 чол.,

при 2 працівниках – 0,00468,

при 3 – 0,00025.

Аналогічно можна отримати, що для $N = 20\,000$ чол./рік при $n = 3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ДАНО							
2	lambda=	0,22							
3	t_cp =	12							
4									
5		Розрахунок							
6	mu=	0,083333333							
7	alfa=	2,64							
8	mu=	0,083333333							
9									
10	i		0	1	2	3			
11	alfa^i		1	2,64	6,9696	18,399744			
12	i!		1	1	2	6			
13	дріб		1	2,64	3,4848	3,066624			
14									
15	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	m	p_ч	p_h
16	3	32,68	0,030599755	0,080783354	0,106634027	0,093837944	5,734541004	0,68814492	2,172174623

Маємо: ймовірність наявності черги $p_ч = 0,688$; середня довжина черги $m = 5,735$ чол.

Приклад 4. Розглянемо задачу СМО з обмеженою довжиною черги, що становить $j = 6$ чол., за тих же умов, що й у попередніх прикладах, у припущенні, що число відвідувань у рік 20 000 чол.

Ймовірнісні характеристики обчислюємо за формулами

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^j \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^j \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad 1 \leq s \leq j.$$

За допомогою таблиць Microsoft Excel. Ті значення ймовірностей, що виділено на рисунках, знайдено за другою з наведених формул.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ДАНО												
2	lambda=	0,22												
3	t_cp =	12												
4	m=6													
5		Розрахунок												
6	mu=	=1/B3												
7	alfa=	=B2/B6												
8														
9	i		0	1	2	3	4	5	6					
10	alfa^i	=B\$7^C9	=B\$7^D9	=B\$7^E9	=B\$7^F9									
11	i!	1	1	2	6									
12	дріб	=C10/C11	=D10/D11	=E10/E11	=F10/F11									
13														
14	n=1	(alfa/n)^i	=B\$7^C9	=B\$7^D9	=B\$7^E9	=B\$7^F9	=B\$7^G9	=B\$7^H9	=B\$7^I9		0			
15	n=2	(alfa/n)^i	=(\$B\$7/2)^C9	=(\$B\$7/2)^D9	=(\$B\$7/2)^E9	=(\$B\$7/2)^F9	=(\$B\$7/2)^G9	=(\$B\$7/2)^H9	=(\$B\$7/2)^I9		0			
16	n=3	(alfa/n)^i	=(\$B\$7/3)^C9	=(\$B\$7/3)^D9	=(\$B\$7/3)^E9	=(\$B\$7/3)^F9	=(\$B\$7/3)^G9	=(\$B\$7/3)^H9	=(\$B\$7/3)^I9		0			
17														
18	n	знаменник	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	q	Q
19	1	=СУММ(C12:D12)+D12*K14	=C12/B\$19	=D12/B\$19	=E12/B\$19	=F12/B\$19	=G12/B\$19	=H12/B\$19	=I12/B\$19	=J12/B\$19	=K12/B\$19	=L12/B\$19	=M12/B\$19	=N12/B\$19
20	2	=СУММ(C12:E12)+E12*K15	=C12/B\$20	=D12/B\$20	=E12/B\$20	=F12/B\$20	=G12/B\$20	=H12/B\$20	=I12/B\$20	=J12/B\$20	=K12/B\$20	=L12/B\$20	=M12/B\$20	=N12/B\$20
21	3	=СУММ(C12:F12)+F12*K16	=C12/B\$21	=D12/B\$21	=E12/B\$21	=F12/B\$21	=G12/B\$21	=H12/B\$21	=I12/B\$21	=J12/B\$21	=K12/B\$21	=L12/B\$21	=M12/B\$21	=N12/B\$21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		ДАНО												
2	lambda=	0,22												
3	t_cp =	12												
4	m=6													
5		Розрахунок												
6	mu=	0,08333												
7	alfa=	2,64												
8														
9	i		0	1	2	3	4	5	6					
10	alfa^i		1	2,64	6,9696	18,3997								
11	i!		1	1	2	6								
12	дріб		1	2,64	3,4848	3,06662								
13														
14	n=1	(alfa/n)^i	1	2,64	6,9696	18,3997	48,5753	128,239	338,551		543,374			
15	n=2	(alfa/n)^i	1	1,32	1,7424	2,29997	3,03596	4,00746	5,28985		17,6956			
16	n=3	(alfa/n)^i	1	0,88	0,7744	0,68147	0,5997	0,52773	0,4644		3,9277			
17														
18	n	знаменни	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	q	Q
19	1	1438,15	0,0007	0,00184	0,00485	0,01279	0,03378	0,08917	0,23541	0,62148			0,37852	0,08328
20	2	68,7906	0,01454	0,03838	0,05066	0,06687	0,08827	0,11651	0,1538	0,20301	0,26797		0,73203	0,16105
21	3	22,2362	0,04497	0,11873	0,15672	0,13791	0,12136	0,1068	0,09398	0,0827	0,07278	0,06405	0,93595	0,20591
22														
23														

Ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною, дорівнює

при 1 працівникові на фірмі $p_h = p_{1+6} = p_7 = 0,62148$

при 2 працівниках $p_h = p_{2+6} = p_8 = 0,24797$

при 3 – $p_h = p_{3+6} = p_9 = 0,06405$.

Відносна пропускна спроможність в таблицях позначена $q = 1 - p_h$. Абсолютна пропускна спроможність $Q = \lambda q$, тобто число заявок, що обслуговуються за 1 хв. дорівнює

при 1 працівникові на фірмі $Q = 0,08328$ чол./хв.,

при 2 працівниках $Q = 0,16105$ чол./хв.,

при 3 – $Q = 0,20591$ чол./хв.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Визначити ймовірнісні характеристики зайнятості обслуговуючого персоналу СМО з відмовами за даними, що наведено в таблиці.

№ варіанту	Щільність вхідного потоку заявок λ , клієнтів/хв.	Середній час обслуговування одного клієнта t_{cp} , хв.	Кількість обслуговуючого персоналу n , чол.
1	0,03	15	1,2,3
2	0,04	12	1,2,3
3	0,8	1	3,4,5
4	0,03	12	1,2,3
5	0,04	15	1,3,4
6	0,02	10	1,2,3
7	0,02	12	2,3,4
8	0,01	10	2,3,4
9	0,05	5	1,2,3
10	0,06	10	1,2,3
11	0,03	10	3,4,5

12	0,04	11	3,4,5
13	0,01	15	1,2,3
14	0,02	5	1,2,3
15	0,03	12	1,2,3
16	0,1	2	1,2,3
17	0,02	10	1,2,3
18	0,01	10	2,3,4
19	0,05	12	1,2,3
20	0,03	11	2,3,4
21	0,04	10	1,2,3
22	0,02	7	2,3,4
23	0,2	4	1,2,3
24	0,07	11	2,3,4
25	0,08	12	1,2,3
26	0,09	9	1,2,3
27	0,3	3	1,2,3
28	0,4	2	1,2,3
29	0,09	10	2,3,4
30	0,1	7	1,2,3