

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Затверджено
Вченою радою
Запорізького національного університету
протокол № __ від _____ 20__ р.
Заступник голови вченої ради, в.о. ректора
_____ О.Г. Бондар

**АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ
ТА ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ**

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

підготовки здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
доктора філософії

Укладачі:

Д'яченко Н.М., доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Грицак В.З., професор кафедри фундаментальної та прикладної математики.
доктор технічних наук, професор

Погоджено:

Проректор з наукової роботи

Г. М. Васильчук

Проректор з науково-педагогічної роботи

Ю. О. Каганов

Зав. відділу аспірантури і докторантури

О. П. Єфіменкова

Запоріжжя 2024

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		Денна, вечірня, заочна форми навчання
Кількість кредитів – 4	Галузь знань 11 – «Математика і статистика»	вибіркова
		Цикл професійної підготовки, вибіркова компонента
Змістових модулів – 6	Спеціальність: 113 – «Прикладна математика»	Рік підготовки:
Загальна кількість годин – 120*		2-й
		Лекції 32 год.
Освітньо-наукова програма «Прикладна математика»		88 год.
	Вид підсумкового контролю: залік	
Рівень вищої освіти: третій (доктор філософії)		

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою вивчення навчальної дисципліни «Асимптотичні методи розв’язання крайових та початкових задач» є засвоєння аспірантом систематичних знань з асимптотичних методів розв’язання крайових і початкових задач для сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами та їх систем для отримання аналітичного розв’язку зазначених задач, з метою подальшої ефективної реалізації наукової діяльності фахівця прикладної математики у широкому спектрі проблематики.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Асимптотичні методи розв’язання крайових та початкових задач» є:

- оволодіння аспірантами базовими знаннями щодо гібридного асимптотичного підходу на базі методу фазних інтегралів;
- застосувати гібридний ВКБ-Гальоркін метод до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами;
- опанування доведення теореми про асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку;
- засвоєння основними етапами побудови гібридного ВКБ-Гальоркін розв’язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами;
- застосувати гібридний ВКБ-Гальоркін підхід до розв’язання крайових задач;
- ознайомлення з гібридним ВКБ-Гальоркін розв’язком для рівняння Бесселя;
- набуття вміння отримувати гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами;
- набуття вміння знаходити гібридний ВКБ-Гальоркін розв’язок диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами;
- застосовувати асимптотичний підхід до розв’язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.

Згідно з вимогами освітньо-наукової програми аспіранти повинні досягти таких програмних **компетентностей і програмних результатів навчання:**

Програмні компетентності	
ЗК 1	Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу нових та комплексних ідей
ЗК 2	Здатність вчитися, оволодівати сучасними знаннями, застосовувати їх у практичних ситуаціях
ЗК 3	Здатність до формування системного наукового світогляду та загального культурного кругозору
ЗК 4	Здатність до критичного мислення
ЗК 15	Здатність до особистісного та професійного розвитку
СК1	Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності
СК3	Здатність до оволодіння методологією та методами наукових досліджень у галузі 11 Математика та статистика
СК5	Здатність до планування і виконання комп'ютерного експерименту та управління ним.
СК9	Здатність до продукування нових ідей і розв'язання комплексних проблем у галузі прикладної математики, а також до застосування сучасних методологій, методів та інструментів наукової діяльності в галузі прикладної математики.
Програмні компетентності	
ПРН 1	Демонструвати системний науковий світогляд та загальний культурний кругозір; володіти техніками і технологіями критичного мислення
ПРН 7	Оволодівати сучасними знаннями та застосовувати їх у практичній діяльності; здійснювати абстрактний аналіз, оцінку і синтез нових та комплексних ідей; демонструвати відданість їх розвитку у передових контекстах професійної та наукової діяльності
ПРН 17	Забезпечувати безперервний саморозвиток та самовдосконалення протягом життя
ПРН 19	Володіти методологією, методами та термінологічним апаратом наукового дослідження у галузі математики та статистики
ПРН 20	Формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для обґрунтування висновків належні докази, зокрема, результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані.
ПРН 24	Застосовувати сучасні аналітичні та чисельні методи розв'язання крайових та початкових задач при математичному моделюванні процесів та явищ.
ПРН 25	Самостійно проводити обчислювальні експерименти та застосовувати дослідницькі навички.

Всі, зазначені вище методи навчання і контрольні заходи, спрямованні на набуття інтегральної компетентності: (ІК) Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та/або професійної практики.

Міждисциплінарні зв'язки. Курс «Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач» є логічним продовженням курсу «Математичне моделювання складних систем», застосовує досвід, отриманий здобувачами вищої освіти під час вивчення дисципліни «Чисельні методи розв'язання механічних задач». Набуті при вивченні даного курсу знання необхідні для виконання дисертаційних робіт та / або подальшої дослідницької діяльності в галузі «Математика і статистика» та інших галузях науки та техніки.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів.

Основні етапи в розвитку асимптотичних методів

Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів. Метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та його застосування. Розвиток гібридного асимптотичного підходу. Висновки.

Змістовий модуль 2. Гібридний ВКБ-Гальоркін метод і його опис в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Формальне зображення гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв'язання диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Висновки.

Змістовий модуль 3. Теорема про основні характеристики гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку.

Асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку. Теорема про асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку

Побудова гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Формальний розв'язок. Теорема про незалежність вибору фундаментальних функцій розв'язку.

Змістовий модуль 4. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач деяких диференціальних рівнянь другого порядку і до рівняння Бесселя.

Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач. Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок деяких рівнянь другого порядку

Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя. Формальний розв'язок. Аналіз чисельних результатів. Висновки.

Змістовий модуль 5. Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами і диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами.

Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок рівняння спеціального типу. Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком.

Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами. Порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра асимптотичного розвинення ϵ з точним розв'язком. Висновки.

Змістовий модуль 6. Асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.

Основна ідея гібридного ВКБ-варіаційного підходу. Приклади застосування підходу. Візуалізація здобутих розв'язків. Застосування підходу до розв'язку рівняння Бесселя. Висновки.

Змістовий модуль 7. Асимптотичний підхід до розв'язання початкових задач для деяких нелінійних диференціальних рівнянь при наявності δ -функції.

Застосування гібридного асимптотичного підходу до розв'язання задач математичної фізики, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ -функції.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви тематичних розділів і тем	Кількість годин			
	усьог о	у тому числі		
		л.	практ.	сам.роб.
1	2	3	4	5
<i>Змістовий модуль 1. Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів.</i>	15	6	-	9
<i>Змістовий модуль 2. Гібридний ВКБ-Гальоркін метод і його опис в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.</i>	15	4	-	11
<i>Змістовий модуль 3. Теорема про основні характеристики гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку.</i>	15	6	-	9
<i>Змістовий модуль 4. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач деяких диференціальних рівнянь другого порядку і до рівняння Бесселя.</i>	15	6	-	9
<i>Змістовий модуль 5. Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами і диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами.</i>	8	4	-	4
<i>Змістовий модуль 6. Асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.</i>	15	4	-	11
<i>Змістовий модуль 7. Асимптотичний підхід до розв'язання початкових задач для деяких нелінійних диференціальних рівнянь при наявності δ-функції.</i>	7	2	-	5
Підсумковий семестровий контроль залік	30	-	-	30
Усього годин	120	32	-	88

5. Теми лекційних занять

№ теми	Назва теми	Кіл-ть годин
<i>Змістовий модуль 1. Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів.</i>		
1	Основні етапи в розвитку асимптотичних методів	2
2	Метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та його застосування	2
3	Розвиток гібридного асимптотичного підходу	2
	Разом за змістовим модулем 1	6
<i>Змістовий модуль 2. Гібридний ВКБ-Гальоркін метод і його опис в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.</i>		
4	Формальне зображення гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній	2
5	Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв'язання диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами	2
	Разом за змістовим модулем 2	4
<i>Змістовий модуль 3. Теорема про основні характеристики гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку.</i>		
6	Асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку Теорема про асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку	2
7	Побудова гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами	2

	Формальний розв'язок	
8	Теорема про незалежність вибору фундаментальних функцій розв'язку	2
	Разом за змістовим модулем 3	6
Змістовий модуль 4. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач деяких диференціальних рівнянь другого порядку і до рівняння Бесселя.		
9	Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок деяких рівнянь другого порядку	2
10	Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя	2
	Формальний розв'язок	
11	Аналіз чисельних результатів	2
	Разом за змістовим модулем 4	6
Змістовий модуль 5. Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами і диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами.		
12	Розв'язок рівняння спеціального типу	2
13	Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком	1
14	Порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра ε асимптотичного розв'язку з точним розв'язком	1
	Разом за змістовим модулем 5	4
Змістовий модуль 6. Асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.		
15	Основна ідея гібридного ВКБ-варіаційного підходу. Приклади застосування підходу. Візуалізація здобутих розв'язків	2
18	Застосування підходу до розв'язку рівняння Бесселя	2
	Разом за змістовим модулем 6	4
Змістовий модуль 7. Асимптотичний підхід до розв'язання початкових задач для деяких нелінійних диференціальних рівнянь при наявності δ-функції.		
19	Застосування гібридного асимптотичного підходу до розв'язання задач математичної фізики, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ -функції.	2
	Разом за змістовим модулем 7	2
	Всього	32

6. Самостійна робота

№ теми	Назва теми	Кіл-ть годин
Змістовий модуль 1. Гібридний асимптотичний підхід на базі методу фазних інтегралів.		
1	Основні етапи в розвитку асимптотичних методів	3
2	Метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та його застосування	3
3	Розвиток гібридного асимптотичного підходу	3
	Разом за змістовим модулем 1	9
Змістовий модуль 2. Гібридний ВКБ-Гальоркін метод і його опис в застосуванні до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.		
4	Формальне зображення гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що містить параметр при старшій похідній	5
5	Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу до розв'язання диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами	6
	Разом за змістовим модулем 2	11
Змістовий модуль 3. Теорема про основні характеристики гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку.		
6	Асимптотичний характер гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку	3

	Теорема про асимптотичність гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку	
7	Побудова гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами Формальний розв'язок	3
8	Теорема про незалежність вибору фундаментальних функцій розв'язку	3
	Разом за змістовим модулем 3	9
Змістовий модуль 4. Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач деяких диференціальних рівнянь другого порядку і до рівняння Бесселя.		
9	Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін підходу до розв'язання крайових задач Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок деяких рівнянь другого порядку	3
10	Гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок для рівняння Бесселя Формальний розв'язок	3
11	Аналіз чисельних результатів	3
	Разом за змістовим модулем 4	9
Змістовий модуль 5. Гібридне ВКБ-Гальоркін наближення у крайових задачах, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами і диференціального рівняння спеціального типу із змінними коефіцієнтами.		
12	Розв'язок рівняння спеціального типу	2
13	Зіставлення наближених результатів з точним розв'язком	1
14	Порівняння розв'язків для великих і малих значень параметра ε асимптотичного розв'язку з точним розв'язком	1
	Разом за змістовим модулем 5	4
Змістовий модуль 6. Асимптотичний підхід до розв'язання крайових задач на основі ВКБ-варіаційного методу.		
15	Основна ідея гібридного ВКБ-варіаційного підходу. Приклади застосування підходу. Візуалізація здобутих розв'язків	6
18	Застосування підходу до розв'язку рівняння Бесселя	5
	Разом за змістовим модулем 6	11
Змістовий модуль 7. Асимптотичний підхід до розв'язання початкових задач для деяких нелінійних диференціальних рівнянь при наявності δ-функції.		
19	Застосування гібридного асимптотичного підходу до розв'язання задач математичної фізики, які зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами при наявності δ -функції.	5
	Разом за змістовим модулем 7	5
	Підсумковий семестровий контроль залік	30
	Всього	88

7. Види контролю і система накопичення балів

№ змістового модуля	Вид контролю	Кіл-ть балів
ПОТОЧНИЙ		
1	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 1	5
	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 1	5
2	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 2	5
	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 2	5
3	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 3	5
	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 3	5
4	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 4	5

	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 4	5
5	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 5	5
	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 5	5
6	Теоретичне опитування при захисті теоретико-практичного завдання 6	5
	Звіт про виконання і захист теоретико-практичного завдання 6	5
	<i>Разом</i>	60
ПІДСУМКОВИЙ		
	<i>Залік. Підготовка презентації за обраною темою та її захист.</i>	40
	Усього	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

За шкалою <i>ECTS</i>	За шкалою університету	За національною шкалою
A	90 – 100 (відмінно)	5 (відмінно)
B	85 – 89 (дуже добре)	4 (добре)
C	75 – 84 (добре)	
D	70 – 74 (задовільно)	3 (задовільно)
E	60 – 69 (достатньо)	
FX	35 – 59 (незадовільно – з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)
F	1 – 34 (незадовільно – з обов’язковим повторним курсом)	

9. Рекомендована література

Основна

1. Вербіцький В. В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференційних рівнянь : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., що навч. за спец. "Прикладна математика". Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Лиходєєва Г. В., Пастирєва К. Ю. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навчальний посібник. Ч. 2 : Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Київ : Центр учбової літератури, 2018. 140 с.
3. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика». Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2018. 194 с. URL: http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/21123/3/Vaisfeld__Mathematiks.pdf
4. Гришак Д. В. Комп’ютерна алгебра у розв’язанні прикладних задач механіки конструкцій зі змінними параметрами: монографія. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2020. 220с.
5. Gristchak V.Z., Gristchak D.D., Fatieieva Yu.A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.

Додаткова:

1. Гришак В. З., Гребенюк С. М., Левчук С. А. Методи обчислень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 86 с. URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2015/02/0034407.doc>
2. Математика: методичні вказівки до написання курсових і кваліфікаційних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра там агістра математичного факультету / Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г., Ткаченко І. Г. Запоріжжя: ЗНУ, 2017. 52 с.
3. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
4. Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных интегро-дифференциальных уравнениях. Киев : Вища школа, 1985. 248 с.
5. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ : Техніка, 2003. 368 с.
6. Andrianov I. V., Manevitch L. I. Asymptotology: ideas, methods, and applications. Springer Science & Business Media, 2002.
7. Gristchak V. Z., Rudenko D. O. Hybrid asymptotic approach to solving nonlinear differential equations with variable coefficients in the presence of the δ -function. Computer Science and Applied Mathematics. 2024. No 1. P. 5– 10. URL: <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-01>.

**Наукові публікації автора курсу
за тематикою дисципліни**

1. Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. Efficient approximate analytic solution for the problem of stability of a three-layer conic shell under combined loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 71–88.
2. Дегтярьов О. В., Гришак В. З., Акімов Д. В., Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Дегтяренко П. Г., Д'яченко Н. М., Клименко Д. В., Клименко М. І., Кудін О. В., Ларіонов І. Ф., Сіренко В. М., Чопоров С. В. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах : колективна монографія / за ред. О. В. Дегтярьова, В. З. Гришака, В. М. Сіренка. Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 260 с.
3. Gristchak V.Z.,Dimitrijeva E.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems. *The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 1998. Т. 2 (8). P.709–713 (1998).
4. Gristchak V. Z., Lysenko V. V. A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-depended parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, 2010, Kharkov, Ukraine. P. 290–295.
5. Gristchak V. Z., Pogrebetskaya A.M. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. *Technische Mechanik*. 2011. Т. 31, № 2. P.112–120.
6. Bihun D. S., Pokutnyi O. O., Panasenko E. V. Autonomous Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Hilbert Space. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 73, No. 7. P. 1009–1022.

Інформаційні ресурси:

1. Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач: дисципліна в СЕЗН ЗНУ Moodle. URL: <https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=13378>
2. Веб-портал: EqWorld. Мир математических уравнений. Асимптотические методы и разложения. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/asymptotic.htm>
3. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: <http://library.znu.edu.ua/>
4. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: <http://www.nbuv.gov.ua/>
5. Maplesoft Media Releases. URL: <https://www.maplesoft.com/company/news/releases/2021/2021-03-10-maple-2021-provides-even-more-tools-to-help-students-learn-math.aspx>