Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

С. І. Гоменюк, С. М. Гребенюк, Є. В. Панасенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Комп’ютерні науки
освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 7
від 29.12.2025

Запоріжжя
2025

УДК 517.9(075.8)
Г641

Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Панасенко Є. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Комп'ютерні науки освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 73 с.

У навчальному посібнику подано у систематизованому вигляді програмний матеріал дисципліни «Диференціальні рівняння». Структура посібника така, що сприяє розвитку і активізації самостійної роботи студентів. Викладено основи класичної теорії диференціальних рівнянь. Видання містить основні теоретичні відомості дисципліни, приклади та пояснення до застосування формул і методів розв'язання типових диференціальних рівнянь та їх систем. У кінці кожної теми наведено питання та завдання для самоперевірки, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами дисципліни та їх якісну підготовку до екзамену.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Комп'ютерні науки освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки».

Рецензент
А.О. Лісняк, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск
С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП

Фахівці, які володіють методами розв'язання диференціальних рівнянь, затребувані не тільки галузі математики, а і у сферах IT, фінансів, інженерії, медицини та наукових досліджень. Диференціальні рівняння описують безліч природних та технічних процесів. Це і рух тіл, електромагнітні хвилі, квантова механіка, моделювання епідемій, ріст популяцій, фармакокінетика, механіка, теплообмін, динаміка рідин і газів, моделі зростання, прогнозування ринкових змін і так далі. Тому й виникла потреба вивчати у провідних університетах країни курс диференціальних рівнянь.

На сучасному етапі розвитку диференціальні рівняння мають чисельні застосування в інформаційних технологіях. У першу чергу це машинне навчання, де вивчають алгоритми оптимізації (градієнтний спуск, динамічні системи). По-друге це у комп'ютерній графіці та ігровій індустрії, де вивчають фізичні симуляції (рух, деформації). Далі, це моделювання та симуляції, де вивчають комп'ютерні моделі клімату та застосування у обчислювальній біології.

Крім того, диференціальні рівняння в абстрактних просторах (наприклад, в банахових чи гільбертових просторах) є ключовими для сучасної науки та технологій, оскільки вони дозволяють розв'язувати задачі, які неможливо сформулювати в елементарних функціональних просторах. Диференціальні рівняння в абстрактних просторах пов'язані з теорією операторів та функціональним аналізом, теорією еволюційних рівнянь та геометричним аналізом. Вивчення диференціальних рівнянь у абстрактних просторах є важливим для глибокого математичного аналізу реальних процесів, особливо в областях, де класичні методи не працюють.

Курс «Диференціальних рівнянь» дає теоретичні та практичні навички, необхідні для аналізу та моделювання складних процесів у природничих, технічних і соціально-економічних науках. Основні розділи курсу – це звичайні диференціальні рівняння (загальні та частинні розв'язки, порядок рівняння, початкові та крайові задачі, рівняння 1-го порядку, рівняння вищих порядків) та системи диференціальних рівнянь (лінійні однорідні та неоднорідні системи диференціальних рівнянь, визначник Вронського).

Метою вивчення навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» є засвоєння систематичних знань із основних методів та технік розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем; ознайомлення з методами моделювання різноманітних явищ та процесів за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, що, в свою чергу, дає можливість аналізувати та моделювати процеси та явища в галузях майбутньої діяльності студентів як фахівців; набуття навичок із методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, які можна успішно використовувати в різних областях науки і техніки.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» є:

- ознайомитися із загальною теорією диференціальних рівнянь та їх системами;

- ознайомитися із основними типами диференціальних рівнянь та методами їх розв’язання;
- засвоїти метод розділення змінних;
- засвоїти метод інтегруючого множника;
- засвоїти метод варіації довільної сталої та метод підстановки;
- засвоїти метод введення параметра;
- знаходити розв’язки задачі Коші;
- виробити навичок із використання теорії звичайних диференціальних рівнянь для моделювання різноманітних явищ та процесів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних компетентностей:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;
- здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтовування вибору методів і підходів для розв’язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп’ютерних наук, аналізу та інтерпретування;
- здатність використовувати сучасні методи математичного моделювання об’єктів, процесів і явищ, розробляти моделі й алгоритми чисельного розв’язування задач математичного моделювання, враховувати похибки наближеного чисельного розв’язування професійних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких програмних результатів навчання:

- застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп’ютерних наук;
- використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв’язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об’єктів інформатизації;
- використовувати методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій, розв’язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до інженерних задач, мати навички програмної реалізації чисельних методів.

Набуті знання при вивченні курсу «Диференціальні рівняння» необхідні для подальшого вивчення курсу «Методи обчислень» та подальшої дослідницької діяльності у природничих науках, математиці та інших галузях науки та техніки.

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

1.1. Загальні поняття про диференціальні рівняння

Теорія звичайних диференціальних рівнянь є одним з найпотужніших інструментів пізнання довколишнього світу. Вона дозволяє вивчати й досліджувати різноманітні еволюційні процеси, що мають властивості детермінованості, скінченновимірності, диференційованості тощо.

Процес називається *детермінованим*, якщо його майбутній розвиток і минуле однозначно визначаються його станом у теперішній час. Множину всіх можливих станів процесу називають *фазовим простором*. Процес називається *скінченновимірним*, якщо його фазовий простір скінченновимірний. *Диференційованість процесу* визначається тим, що його фазовий простір має структуру диференційованого багатовиду, а зміна стану у часі описується диференційованими функціями.

Вивчаючи фізичні явища, не завжди вдається безпосередньо знайти закони або формули, які пов'язують між собою величини фізичного процесу, але часто можна виявити певну функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. Такі рівняння називають *диференціальними*.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають *інтегральною кривою*. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих*. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 7$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = \frac{7}{2}x^2 + C_1x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у *квадратурах* (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння *зінтегроване у скінченному вигляді*.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їх властивостей.

1.2. Означення диференціального рівняння

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = y(x)$ та її похідні $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$.

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку* називається співвідношення

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

при цьому припускається, що $y^{(n)}$ входить у (1.1), а будь-який з інших аргументів функції F може в це співвідношення не входити.

Означення. *Порядком звичайного диференціального рівняння* називається порядок найвищої похідної, яка входить до рівняння.

Наприклад,

– $y' + ye^x = \sin x$ – рівняння першого порядку;

– $y'' + 5xy' + 3y = x^2$ – рівняння другого порядку;

– $y'' + (y')^3 \ln x = x^2$ – рівняння другого порядку.

Означення. Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають *рівнянням з частинними похідними*.

Наприклад,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* (1.1) на деякому інтервалі $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$ називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.1) на I.

Це означає, що для всіх $x \in (a; b)$ виконується тотожність:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Наприклад, функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ є розв'язками диференціального рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $I = (-\infty; +\infty)$. Але розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, взагалі є всі функції вигляду $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Означення. Графік функції $y = y(x)$ називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

Означення. Сукупність інтегральних кривих $y = \varphi(x, C)$, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих* або *загальним розв'язком* диференціального рівняння.

1.3. Задача Коші

Нехай задано диференціальне рівняння (1.1) першого порядку, що розв'язане відносно першої похідної:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (1.2)$$

Функція $f(x, y)$ припускається визначеною на деякій підмножині $D \subset \mathbb{R}^2$ змінних x та y.

Означення. Задача знаходження розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння (9), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \qquad (1.3)$$

називається *задачею Коші*.

Розв'язати задачу Коші (1.2), (1.3) з геометричного погляду означає знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (1.2) ту, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$.

Відповідь на питання про те, за яких умов задача Коші (1.2), (1.3) має розв'язок, дає теорема Пеано.

Теорема (Пеано). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна у деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$, то існує неперервна разом зі своєю похідною функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$, де $(x_0; y_0) \in D$.

Теорема (Пікара). Нехай функція $f(x,y)$ диференціального рівняння (1.2) визначена й неперервна в обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і точка $(x_0; y_0)$ – внутрішня точка області D:

$$D = \{x, y : |x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b\}, \ \ (a > 0, b > 0).$$

І, функція $f(x,y)$, обмежена

$$|f(x,y)| \le M, \ \ \forall (x;y) \in D \ \ (M > 0),$$

і має обмежену похідну за змінною y на області D:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K, \ \ \forall (x;y) \in D \ \ (K > 0).$$

За цих умов задача Коші (1.2), (1.3) має єдиний неперервно диференційовний розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

1.4. Метод ізоклін

Означення. Проекція інтегральної кривої на вісь ординат називається *фазовою кривою* або *траєкторією* диференціального рівняння.

Означення. *Ізокліною* називається крива, у кожній точці якої напрямок поля однаковий.

Таким чином, сім'я ізоклін диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ визначається рівністю

$$f(x,y) = k = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α – кут нахилу поля напрямів до осі Ox.

Змінюючи значення k, одержимо множину ізоклін в області D. За допомогою ізоклін і відомих сталих кутів $\alpha \ (k = \operatorname{tg} \alpha)$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна *схематично* побудувати інтегральні криві диференціального рівняння. Такий метод дослідження диференціальних рівнянь називають *методом ізоклін*.

Крива перетинає поле напрямів (див. рис. 1.1), причому напрямок поля однаковий.

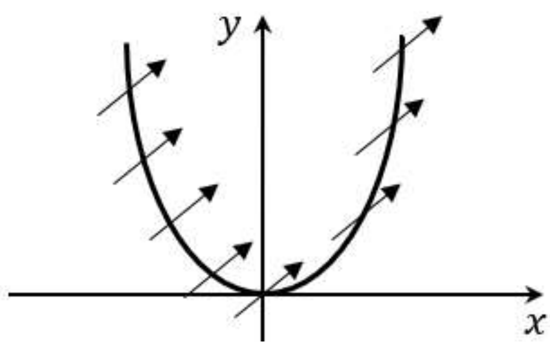

Рисунок 1.1 – Крива перетинає поле напрямів

Наприклад, побудувати інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння (див. рис. 1.2).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

$$\int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y^2 + x^2 = C^2.$$

$y^2 + x^2 = C^2$ – сім'я інтегральних кривих (кола).

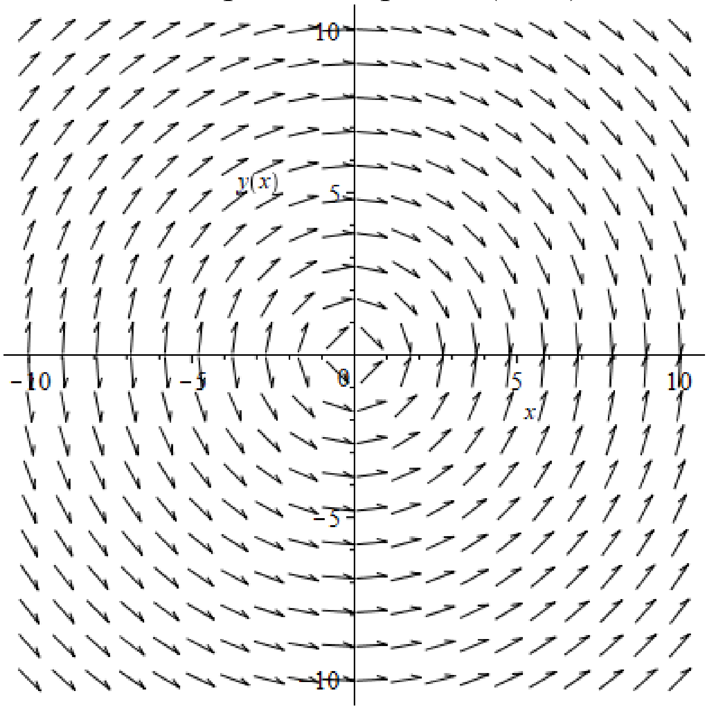

Рисунок 1.2 – Поле напрямів

Питання для самоконтролю до теми 1

1. Що розуміють під фазовим простором?
2. Яка крива називається інтегральною кривою? Наведіть приклади.
3. Яка є основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння?
4. Наведіть приклади динамічних математичних моделей процесів та систем.
5. Яке рівняння називається Звичайним диференціальним рівнянням *n*-го порядку?
6. Як визначити порядок звичайного диференціального рівнянням?
7. Що розуміють під розв'язком диференціального рівнянням?
8. Сформулюйте задачу Коші.
9. Сформулюйте теорему Пеано.
10. Сформулюйте теорему Пікара.
11. Яка крива називається ізокліною?

Завдання до теми 1

1. Побудуйте інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

2. Побудуйте інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = y + x$.
3. Побудуйте інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$.
4. Побудуйте інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = 1 + xy^2$.
5. Побудуйте інтегральні криві та поле напрямів для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{1 + x^2}$.

2. Диференціальні рівняння першого порядку

2.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* 1-*го порядку* називається співвідношення

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – невідома функція; $y' = \frac{dy}{dx}$; $F(x, y, y')$ – задана функція змінних x, y, y'.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно похідної, то його можна записати у вигляді:

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

де $f(x, y)$ – задана функція змінних x, y.

Означення. Рівняння (2.2) називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*. Таку форму диференціального рівняння називають *нормальною*.

Означення. *Розв'язком диференціального рівнянням* (2.1) або (2.2) на деякому інтервалі $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$ називають неперервно диференційовну функцію $y = \varphi(x)$, яка задовольняє рівняння (2.1) на інтервалі I:

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0.$$

Означення. Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$ називається *розв'язком рівняння* (2.2) *у неявному вигляді* (або *загальний інтегралом рівняння* (2.2)), якщо цей розв'язок визначає y як функцію від x: $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (2.2).

2.2. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. *Диференціальне рівняння з відокремленими змінними* називають диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0, \tag{2.3}$$

де $f_1(x)$, $f_2(y)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$.

Проінтегрувавши рівняння (2.3), отримаємо

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C,$$

загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Зінтегруємо:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\frac{1}{2}\ln|1+y^2|=\frac{1}{2}\ln C,\ \ \left(C_1=\frac{1}{2}\ln C\right),$$
$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln C,$$
звідки загальний розв'язок має вигляд:
$$(1+x^2)(1+y^2)=C.$$

Означення. Диференціальне рівняння вигляду
$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \tag{2.4}$$
називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними в симетричній формі.*

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$$(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0.$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Нехай $x\neq 0$ і $y\neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2. Тоді
$$\frac{x+1}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0,$$
$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=0,$$
$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0,$$
$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=C,$$
$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=C.$$

При відокремленні змінних ми вважали, що $x,y\neq 0$, але $x=0$ і $y=0$ є розв'язками заданого диференціального рівняння. Ці розв'язки не можна одержати із загального інтеграла при жодному значенні C. Тобто $x=0$ та $y=0$ – особливі розв'язки, їх слід дописати додатково до загального інтеграла.

Отже, остаточно розв'язками заданого диференціального рівняння є
$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=C,\ \ x=0,\ \ y=0.$$

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називають *неповним*, якщо функція f явно залежить тільки від однієї змінної: або від x, або від y.
$$y'=f(y). \tag{2.5}$$

Означення. Диференціальне рівняння (2.5) називають *автономним*.

2.3. Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функцію $f(x,y)$ називають *однорідною функцією виміру n* відносно змінних x та y, якщо для довільного допустимого значення $t\in\mathbb{R}$ виконується тотожність:
$$f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

Означення. Диференціальне рівняння
$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{2.6}$$

де функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного виміру n називають *однорідним диференціальним рівнянням*.

Отже, однорідне відносно змінних x та y диференціальне рівняння завжди можна записати у вигляді:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \qquad (2.7)$$

У рівнянні (2.7) можна ввести заміну $z(x) = \frac{y}{x}$. Іноді однорідне диференціальне рівняння інтегрують, вважаючи x функцією від y. Для таких рівнянь запроваджують заміну $z(y) = \frac{x}{y}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}.$$

Перевіримо на однорідність функцію $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$.

$$f(tx,ty) = \frac{atx+bty}{ctx+dty} = \frac{t(ax+by)}{t(cx+dy)} = \frac{ax+by}{cx+dy} = t^0 \cdot f(x,y).$$

Функція $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$ є однорідною функцією виміру 0. Отже, рівняння є однорідним. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + b\frac{y}{x}}{c + d\frac{y}{x}}.$$

Вводимо нову змінну: $z(x) = \frac{y}{x}$. Звідки

$$y = z \cdot x \Rightarrow y' = z'x + z.$$

Тоді, одержимо рівняння:

$$z'x + z = \frac{a+bz}{c+dz},$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a+bz-cz-dz^2}{c+dz},$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a+(b-c)z-dz^2}{c+dz}.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{c+dz}{a+(b-c)z-dz^2}dz = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{c+dz}{a+(b-c)z-dz^2}dz = \int\frac{dx}{x},$$

Інтеграл у лівій частині розв'язується методом розкладу дробу на елементарні дроби або методом підстановки. Припустимо, що після інтегрування отримуємо:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Це і є шуканий загальний розв'язок даного однорідного диференціального рівняння.

2.4. Лінійне рівняння та методи його розв’язання

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називають диференціальне рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{2.8}$$

яке лінійне відносно y та $y' = \frac{dy}{dx}$ і функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні в інтервалі $(a; b)$.

Досить часто лінійне диференціальне рівняння першого порядку записується у наступному вигляді:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{2.9}$$

де $A(x), B(x), C(x)$ – неперервні функції. У цьому випадку рівняння (2.9) можна привести до вигляду диференціального рівняння (2.8), якщо коефіцієнти позначити

$$P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \ \ Q(x) = -\frac{C(x)}{A(x)}.$$

Означення. Якщо функція $Q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (2.8) називають *лінійним однорідним*:

$$y' + P(x)y = 0. \tag{2.10}$$

Означення. Рівняння (2.8), в якому функція $Q(x)$ тотожно не дорівнює нулю називається *неоднорідним*.

Метод варіації довільної сталої

Знайдемо загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (2.8), яке є водночас рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \ \ (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Така форма запису загального розв’язку описує всі розв’язки однорідного рівняння, бо розв’язок $y = 0$, який міг бути втраченим при відокремленні змінних, міститься у цій формі, якщо $C = 0$.

Далі розв’язок лінійного диференціального рівняння першого порядку (2.8) шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{2.11}$$

замінивши довільну сталу C деякою невідомою функцією $C(x)$.

Означення. Такий метод називається *методом варіації довільної сталої* (*метод Лагранжа*).

Підставимо функцію (2.11) у рівняння (2.8), одержимо

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(-P(x)\right) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Підставляючи тепер знайдену функцію $C(x)$ у (2.11), одержимо формулу загального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} =$$

$$= C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\,. \qquad (2.12)$$

У записі (2.12) перший доданок є загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння, а другий є *частинним розв'язком* неоднорідного диференціального рівняння (він отримується, коли $C_1 = 0$).

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - y = e^{5x}.$$

Це – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = \int dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln|y| = x + \ln C \Rightarrow y = Ce^x.$$

Розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^x.$$

Підставляючи у рівняння, одержимо

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{5x},$$

$$C'(x)e^x = e^{5x},$$

$$C'(x) = e^{4x},$$

$$C = \int e^{4x}dx + C_1,$$

$$C = \frac{1}{4}e^{4x} + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = \left(\frac{1}{4}e^{4x} + C_1\right)e^x.$$

Метод підстановки (метод Бернуллі)

Розв'язок лінійного диференціального рівняння (2.8) шукається у вигляді добутку двох диференційовних функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто

$$y = u \cdot v.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}.$$

Підставляючи тепер у диференціальне рівняння (2.8), отримаємо:

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x).$$

Користуючись довільністю функції v, виберемо її такою, щоб вона була розв'язком рівняння $\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$ (коефіцієнт при функції u дорівнює нулю), тоді

$$\frac{du}{dx}v = Q(x).$$

Таким чином, для знаходження невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ одержимо систему двох диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + P(x)v = 0, \\ \dfrac{du}{dx}v = Q(x). \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1| \Rightarrow v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Внаслідок довільності функції v, виберемо у ролі $C_1 = 1$. Тоді

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставимо знайдений вираз для функції $v(x)$, у друге рівняння системи, отримаємо:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Підставляючи знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$, одержимо формулу загального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку методом Бернуллі:

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} =$$

$$= Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx. \qquad (2.13)$$

Отримали той же вигляд загального розв'язку, що й при застосуванні методу Лагранжа (формули (2.12) та (2.13) ідентичні).

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - y = e^{5x}.$$

Інтегруємо методом Бернуллі. Нехай $y = u \cdot v$. Тоді

$$u'v + uv' - uv = e^{5x},$$

$$u'v + u(v' - v) = e^{5x}.$$

Для знаходження невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ одержимо систему двох диференціальних рівнянь з відокремленими змінними:

$$\begin{cases} v' - v = 0, \\ \dfrac{du}{dx}v = e^{5x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{dx} - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow$$

$$\ln|v| = \int dx + \ln|C_1| \Rightarrow v = C_1 e^x.$$

Внаслідок довільності функції v, виберемо у ролі $C_1 = 1$. Тоді

$$v = e^x.$$

Підставимо знайдений вираз для функції $v(x)$, у друге рівняння системи, отримаємо:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^x = e^{5x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{4x} \Rightarrow du = e^{4x}dx \Rightarrow u = \int e^{4x}dx + C_1 \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{4}e^{4x} + C_1.$$

Тоді

$$y = \left(\frac{1}{4}e^{4x} + C_1\right)e^x.$$

Метод інтегруючого множника (метод Ейлера)

Розглянемо ще один метод побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, який був запропонований Ейлером. Помножимо обидві частини рівняння (2.8) на функцію $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. Отримаємо рівняння:

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)ye^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

в якому ліва частина є похідною від функції $ye^{\int P(x)dx}$. Тоді, можемо переписати це рівняння у вигляді:

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

звідки

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C,$$

отже

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} =$$

$$= Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \qquad (2.14)$$

Отримали той же вигляд загального розв'язку, що й при застосуванні методу Лагранжа (формули (2.12) та (2.14) ідентичні).

Означення. Функція $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ називається *інтегруючим множником* методу Ейлера.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - y = e^{5x}.$$

Інтегруємо методом метод Ейлера. Знайдемо інтегруючий множник:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на функцію $\mu(x) = e^{-x}$. Отримаємо рівняння:

$$y' \cdot e^{-x} - y \cdot e^{-x} = e^{4x}.$$

Можемо переписати це рівняння у вигляді:

$$(y \cdot e^{-x})' = e^{4x},$$

звідки

$$y \cdot e^{-x} = \int e^{4x}\,dx + C_1 \Rightarrow y \cdot e^{-x} = \frac{1}{4}e^{4x} + C_1,$$

отже

$$y = \left(\frac{1}{4}e^{4x} + C_1\right)e^{x}.$$

2.5. Рівняння Бернуллі

Нехай функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні в інтервалі $(a; b)$.

Означення. Рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \tag{2.15}$$

де m – деяке число, називають *рівнянням Бернуллі*.

Якщо у (2.15) $m = 0$, то одержуємо лінійне неоднорідне рівняння (2.8), якщо $m = 1$, то рівняння з відокремлюваними змінними, тому надалі будемо вважати, що $m \neq 0, m \neq 1$.

Перетворимо спочатку праву частину рівняння Бернуллі до вигляду правої частини лінійного рівняння. Для цього поділимо обидві частини рівняння (2.15) на y^m:

$$y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} = Q(x).$$

Рівняння Бернуллі завжди може бути зведено до лінійного рівняння підстановкою:

$$z = y^{1-m}, m \neq 1.$$

Тоді

$$z' = (1-m)y^{-m}y' \Rightarrow y' = \frac{z'}{(1-m)y^{-m}}.$$

Отже, рівняння набуде вигляду:

$$y^{-m}\frac{z'}{(1-m)y^{-m}} + P(x)z = Q(x),$$

$$\frac{z'}{1-m} + P(x)z = Q(x),$$

$$z' + (1-m)P(x)z = (1-m)Q(x),$$

одержане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової функції z. Інтегруючи це рівняння й повертаючись до змінної y, отримаємо загальний розв’язок рівняння Бернуллі у вигляді:

$$y = \left((1-m)\int Q(x) \cdot e^{(1-m)\int P(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{(1-m)}} \cdot e^{\int (m-1)P(x)dx}$$

Рівняння Бернуллі, як і лінійне рівняння, можна інтегрувати безпосередньо за допомогою підстановки $y = u \cdot v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

2.6. Рівняння Ріккаті

Означення. Нелінійне звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2, \tag{2.16}$$

де $q_0(x), q_1(x), q_2(x)$ – неперервні в інтервалі $(a; b)$ функції, називається *рівнянням Ріккаті*.

За певних умов рівняння Ріккаті (2.16) зводиться до рівняння Бернуллі.

У випадку $q_2(x) = 0$ рівняння Ріккаті є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку, а у випадку $q_0(x) = 0$ – диференціальним рівнянням Бернуллі. В обох цих часткових випадках рівняння Ріккаті легко інтегрується. У загальному випадку рівняння Ріккаті не інтегрується у квадратурах.

Якщо рівняння (2.16) у частковому випадку може бути записане як

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \tag{2.17}$$

де a, b, α – сталі, то його називають *спеціальним рівнянням Ріккаті.*

Спеціальне рівняння Ріккаті допускає відшукання загального розв'язку в елементарних функціях, якщо $\alpha = -2$ або $\alpha = \frac{-4n}{2n-1}, n \in \mathbb{Z}$. При всіх інших значеннях α це рівняння вже не можна зінтегрувати в елементарних функціях. Його загальний розв'язок виражається через циліндричні функції.

Розглянемо деякі випадки інтегрованості у квадратурах рівняння Ріккаті:

1. Якщо q_0, q_1, q_2 – сталі, то (2.16) – рівняння з відокремлюваними змінними, а його інтеграл виражається через елементарні функції.
2. $y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c)$, де a, b, c – сталі і $a^2 + b^2 \neq 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними.
3. $y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c$, де a, b, c – сталі і $a^2 + b^2 \neq 0$ – однорідне рівняння.

Якщо відомий деякий частинний розв'язок рівняння Ріккаті, то це рівняння можна звести до рівняння Бернуллі. Нехай $y_1 = y_1(x)$ – розв'язок рівняння (2.16). Тоді

$$y_1' = q_0(x) + q_1(x)y_1 + q_2(x)y_1^2. \tag{2.18}$$

Зробимо заміну змінної:

$$y = y_1 + z,$$

де $z = z(x)$ – нова функція. Підставимо заміну у рівняння (2.16), отримаємо

$$y_1' + z' = q_0(x) + q_1(x)(y_1 + z) + q_2(x)(y_1 + z)^2,$$

$$y_1' + z' = q_0(x) + q_1(x)y + q_1(x)z + q_2(x)y_1^2 + q_2(x)2y_1z + q_2(x)z^2.$$

З врахуванням рівняння (2.18), отримаємо

$$z' = q_1(x)z + q_2(x)2y_1z + q_2(x)z^2,$$

$$z' = q_2(x)z^2 + (q_1(x) + q_2(x)2y_1)z,$$

$$z' - (q_1(x) + q_2(x)2y_1)z = q_2(x)z^2.$$

Останнє рівняння є рівнянням Бернуллі відносно функції z. яке завжди інтегрується у квадратурах.

Зауваження. Особливим розв'язком рівняння Ріккаті може бути функція $y = y_1(x)$.

2.7. Рівняння у повних диференціалах

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.19}$$

де функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ неперервні по обом змінним у деякій області D і ні в одній точці одночасно не обертаються в нуль.

Означення. Диференціальне рівняння (2.19) називають *диференціальним рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y). \qquad (2.20)$$

Теорема (умова Ейлера). Нехай функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ у рівнянні (2.19) неперервні у деякій області D і ні в одній точці одночасно не обертаються в нуль та існують частинні похідні $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ і $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Для того щоб диференціальне рівняння (2.19) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб у області D виконувалася умова:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\underbrace{(2xy + 3x^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^2 + 4y)}_{N(x,y)}dy = 0.$$

Перевіримо умову $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(2xy + 3x^2)}{\partial y} = 2x; \ \frac{\partial(x^2 + 4y)}{\partial x} = 2x.$$

Функція $u(x,y)$ повинна задовольняти умову:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y).$$

Проінтегруємо рівність по x:

$$u(x,y) = \int (2xy + 3x^2)dx + \varphi(y) = x^2y + x^3 + \varphi(y).$$

Функція $u(x,y)$ повинна задовольняти умову:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y).$$

$$\left(x^2y + x^3 + \varphi(y)\right)'_y = x^2 + 4y,$$

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 4y,$$

$$\varphi'(y) = 4y,$$

$$\varphi(y) = \int 4ydy = 2y^2 + C_1.$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^2y + x^3 + 2y^2 + C_1$$

Таким чином, маємо загальний інтеграл ($u(x,y) = C$):

$$x^2y + x^3 + 2y^2 = C.$$

У багатьох випадках рівняння (2.19) не є рівнянням у повних диференціалах. Це означає, що не виконується умова

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Тому, виникає питання: чи можна рівняння не у повних диференціалах звести до рівняння у повних диференціалах? Виявляється, що у багатьох випадках це можна зробити. Іноді вдається підібрати таку функцію $\mu(x,y) \neq 0$, після множення на яку рівняння (1) перетворюється на рівняння у повних диференціалах:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0, \tag{2.21}$$

Для отриманого рівняння перевіряють нову умову:

$$\frac{\partial\big(\mu(x,y)M(x,y)\big)}{\partial y}=\frac{\partial\big(\mu(x,y)N(x,y)\big)}{\partial x}.$$

Означення. Функція $\mu(x,y)$ називається *інтегрувальним множником* рівняння (2.19).

У випадку інтегрувального множника, який залежить тільки від x, його можна знайти у вигляді:

$$\mu=e^{\int\varphi(x)dx}. \tag{2.22}$$

У випадку інтегрувального множника, який залежить тільки від y, його можна знайти у вигляді:

$$\mu=e^{\int\varphi(y)dy}. \tag{2.23}$$

Нехай інтегрувальний множник залежить від заданої функції $\omega(x,y)$, тобто $\mu=\mu\big(\omega(x,y)\big)$. Позначимо

$$\psi(\omega)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}, \tag{2.24}$$

$$\ln|\mu(\omega)|=\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\int\psi(\omega)d\omega+\ln|C|,$$

$$\mu(\omega)=Ce^{\int\psi(\omega)d\omega}.$$

Можна вважати, що $C=1$, тому, що досить мати один інтегрувальний множник:

$$\mu(\omega)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}, \tag{2.25}$$

де $\omega=\omega(x,y)$.

Очевидно, що інтегрувальні множники $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$, визначені формулами (2.22), (2.23), є частинними випадками інтегрувального множника (2.25).

Зауваження. Досить часто вдається підібрати інтегрувальний множник у вигляді $\mu=\mu(x\pm y)$, $\mu=\mu(xy)$, $\mu=\mu\left(\frac{x}{y}\right)$, $\mu=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$, $\mu=\mu(x^2\pm y^2)$. Якщо не вдається підібрати інтегрувальний множник, то доцільніше шукати інші шляхи інтегрування.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\underbrace{(x-y)}_{M}dx+\underbrace{(x+y)}_{N}dy=0.$$

Перевіримо умову $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=-1;\ \ \frac{\partial(x+y)}{\partial x}=1.$$

Рівняння не є рівнянням у повних диференціалах, бо $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Помножимо задане рівняння на інтегрувальний множник $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x-y)dx+\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x+y)dy=0.$$

Для того щоб диференціальне рівняння було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб у області D виконувалася умова:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\Rightarrow\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Умова виконується, отже, отримане рівняння – це диференціальне рівняння у повних диференціалах.

$$\frac{xdx-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy+ydy}{x^2+y^2}=0,$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$$

Так як

$$\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2},$$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)'=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

$$d\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)=0.$$

Тоді, загальний розв’язок має вигляд:

$$\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=C.$$

Якщо $\mu(x,y)$ обертається у нескінченність лише в окремих точках, то рівняння не має особливих розв’язків. Для заданого рівняння $\mu(x,y)$ перетворюється у нескінченність, тільки коли $x=0$ і $y=0$. Отже, рівняння не має особливих розв’язків.

Питання для самоконтролю до теми 2

1. Сформулюйте означення звичайного диференціального рівняння 1-го порядку.
2. Який вигляд має диференціальне рівнянням першого порядку, розв’язане відносно похідної?
3. Яку форму диференціального рівняння називають нормальною?
4. Що розуміють під розв’язком диференціального рівняння 1-го порядку?
5. Наведіть приклади диференціальних рівнянь 1-го порядку.
6. Сформулюйте означення диференціального рівняння з відокремленими змінними. Наведіть приклади.
7. Сформулюйте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними в симетричній формі. Наведіть приклади.
8. Яке диференціальне рівняння називають неповним? Наведіть приклади.

9. Яке диференціальне рівняння називають автономним? Наведіть приклади.
10. Як визначити вимір однорідної функції?
11. Яке диференціальне рівняння називають однорідним диференціальним рівнянням? Наведіть приклади.
12. Яка заміна робиться при розв'язанні однорідного диференціального рівняння?
13. Сформулюйте означення лінійного диференціального рівняння першого порядку.
14. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння? Чим воно відрізняється від неоднорідного рівняння?
15. Розкажіть про метод варіації довільної сталої.
16. Розкажіть про метод Бернуллі.
17. Яка функція називається інтегруючим множником у методі Ейлера?
18. Розкажіть як зінтегрувати рівняння Бернуллі.
19. Розкажіть як зінтегрувати рівняння Ріккаті. Чи завжди це можливо зробити?
20. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах?
21. Яка умова повинна виконуватися, щоб диференціальне рівняння було рівнянням у повних диференціалах?
22. Якими способами можна знайти інтегрувальний множник?

Завдання до теми 2

1. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = (9x + 7y - 3)^2$.
2. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = (-2x + 5y + 1)^2$.
3. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння: $x\frac{dy}{dx} - 3y = \sqrt{x^2 + 9y^2}$.
4. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = \frac{6x-7y}{5x-8y}$.
5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = \frac{-3x+4y}{x+y}$.

3. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язні відносно похідної

3.1. Основні поняття і означення

Означення. *Диференціальним рівнянням першого порядку, нерозв'язним відносно похідної* (або *неявним диференціальним рівнянням першого порядку*) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.1}$$

де функція $F(x, y, z)$ неперервна у деякій області $D \subset \mathbb{R}^3$.

Означення. Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на інтервалі $(a; b)$, називають *розв'язком* рівняння (3.1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Якщо рівняння (3.1) можна розв'язати через елементарні функції відносно y', то одержимо одне або декілька рівнянь, розв'язних відносно похідної:

$$y' = f_k(x, y), \;\; k = 1,2, \dots$$

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

називають *диференціальним рівнянням першого порядк*у *степеня* n.

Сукупність загальних розв'язків або загальних інтегралів останніх і дає в цьому випадку загальний інтеграл рівняння (3.1).

Задача Коші для рівняння (3.1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язаного відносно похідної: потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (3.1), який задовольняє початкову умову:

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.3}$$

При цьому, якщо розв'язків, які задовольняють початкову умову (3), не більше, ніж кількість напрямів поля, визначеного рівнянням (3.1) у цій точці, тобто не більше кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, то кажуть що Задача Коші (3.1), (3.3) має єдиний розв'язок. В інакшому випадку вважають, що єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Теорема. Нехай ліва частина рівняння (3.1) задовольняє такі умови:

1) функція $F(x_0, y_0, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\frac{\partial F}{\partial y}$ і $\frac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y');

2) $F(x_0, y_0, y') = 0$;

3) $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y')} \neq 0$.

Тоді рівняння (3.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і такий що $y'(x_0) = y_0'$.

Означення. *Особливим розв'язком* називають розв'язок, у кожній точці якого порушується умова його єдиності.

Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку диференціального рівняння при жодному значенні сталої C.

З теореми випливає, що особливі розв'язки можуть існувати тільки у тих точках, де порушуються умови цієї теореми. Тобто, якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки потрібно шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} p = y'.$$

Якщо ця система сумісна, то виключаючи параметр p, отримаємо деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком рівняння (1). Однак потрібно ще перевірити, чи геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$ є розв'язком заданого рівняння, і чи у кожній точці порушується властивість єдиності розв'язку.

Означення. *Обвідною* називають інтегральну криву, яка у кожній точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих, але на жодній ділянці не збігається з жодною з інтегральних кривих.

3.2. Типи рівнянь нерозв'язних відносно похідної, які інтегруються у квадратурах

Розглянемо деякі типи рівнянь вигляду (3.1), які інтегруються у квадратурах.

I. Диференціальні рівняння, які містять тільки похідну:

$$F(y') = 0. \tag{3.4}$$

Нехай рівняння (3.4) має скінченну або нескінченну кількість дійсних розв'язків $y' = k_i, i = 1,2, \ldots (k_i = \text{const})$. Тоді

$$y = k_i x + C \Rightarrow k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Підставивши ці значення у рівність (3.4) замість y', одержимо загальний інтеграл рівняння (3.4) у вигляді:

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$(y')^{10} + 2(y')^5 + y' + 5 = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^{10} + 2\left(\frac{y - C}{x}\right)^5 + \frac{y - C}{x} + 5 = 0 \Rightarrow$$
$$(y - C)^7 + 2x^5(y - C)^5 + x^9(y - C) + 5x^{10} = 0.$$

II. Диференціальні рівняння, які не містять явно невідомої функції:

$$F(x, y') = 0. \tag{3.5}$$

Диференціальне рівняння (3.5) інтегрується шляхом введення параметра t (метод введення параметру).

Припустимо, що це рівняння можна записати у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \;\; y' = \psi(t).$$

Скориставшись рівністю $\frac{dy}{dx} = y'$, маємо

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y=\int \psi(t)\varphi'(t)dt+C.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (3.5) записується у параметричній формі:

$$x=\varphi(t),\ \ y=\int \psi(t)\varphi'(t)dt+C. \tag{3.6}$$

III. Диференціальні рівняння, які не містять явно незалежної змінної:

$$F(y,y')=0. \tag{3.7}$$

Припустимо, що це рівняння можна записати у параметричній формі:

$$y=\varphi(t),\ \ y'=\psi(t).$$

Скориставшись рівністю $\frac{dy}{dx}=y'$, маємо

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}\Rightarrow x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C.$$

Інтегральні криві у параметричній формі визначаються рівняннями

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C,\ \ y=\varphi(t). \tag{3.8}$$

Якщо рівняння (3.8) легко розв’язати відносно y, тобто $y=\varphi(y')$, то зручно ввести заміну $y'=t$, тоді

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{t}+C,\ \ y=\varphi(t). \tag{3.9}$$

IV. Загальний метод введення параметра.

Розглянемо рівняння

$$F(x,y,p)=0, \tag{3.10}$$

де позначено через $p=y'$.

Якщо ми будемо розглядати x,y,p, як декартові координати в просторі, то рівняння (3.10) визначить деяку поверхню. Відомо, що координати точок поверхні можуть бути виражені як функції двох параметрів u і v. Нехай нам відомо таке параметричне зображення поверхні:

$$\begin{cases}x=\varphi(u,v),\\ y=\psi(u,v),\\ p=\chi(u,v).\end{cases} \tag{3.11}$$

то загальний розв’язок рівняння (3.10) одержимо у параметричній формі безпосередньо з (3.11):

$$x=\varphi\big(u,\omega(u,C)\big),\ \ y=\psi\big(u,\omega(u,C)\big).$$

Нехай неявне диференціальне рівняння (3.10) можна розв’язати відносно y, тобто

$$y=f(x,y'). \tag{3.12}$$

Тоді, можна використати *метод введення параметру*. Якщо позначити $y'=p(x)$, то з (3.12) маємо співвідношення:

$$y=f(x,p), \tag{3.13}$$

диференціюючи яке, одержуємо диференціальне рівняння:

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp\Rightarrow pdx=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp. \tag{3.14}$$

Нехай загальний розв'язок рівняння (3.14) має вигляд: $x = \varphi(p, C)$. Тоді, підставляючи його у (3.13), одержимо загальний розв'язок рівняння (2) у параметричній формі:

$$x = \varphi(p, C), \;\; y = f(\varphi(p, C), p).$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (3.14) у вигляді $p = h(x, C)$, то підставивши його у (3.13), одержимо загальний розв'язок рівняння (3.12) у явному вигляді:

$$y = f\big(x, h(x, C)\big).$$

Якщо рівняння (3.14) має особливий розв'язок $p = \psi(x)$, то функція $y = f\big(x, \psi(x)\big)$ може бути особливим рівняння (3.12).

Нехай диференціальне рівняння (1) можна розв'язати відносно x, тобто

$$x = f(y, y'). \tag{3.15}$$

Тоді, аналогічно, можна використати *метод введення параметру*. Якщо позначити $y' = p(y)$, то з (3.15) маємо співвідношення:

$$x = f(y, p), \tag{3.16}$$

диференціюючи яке, одержуємо диференціальне рівняння:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp. \tag{3.17}$$

Нехай загальний розв'язок рівняння (3.17) має вигляд: $y = \varphi(p, C)$. Тоді, підставляючи його у (3.16), одержимо загальний розв'язок рівняння (3.15) у параметричній формі:

$$x = f(\varphi(p, C), p), \;\; y = \varphi(p, C).$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (3.17) у вигляді $p = h(y, C)$, то підставивши його у (3.16), одержимо загальний розв'язок рівняння (3.15) у явному вигляді:

$$x = f\big(y, h(y, C)\big).$$

Якщо рівняння (3.17) має особливий розв'язок $p = \psi(y)$, то функція $x = f\big(y, \psi(y)\big)$ може бути особливим рівняння (3.15).

3.3. Рівняння Лагранжа

Частинним випадком диференціального рівняння (3.12) є рівняння вигляду:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{3.18}$$

Означення. Якщо функція $\varphi(y')$ тотожно не збігається з y', то диференціальне рівняння (3.18) називається *рівнянням Лагранжа*.

Зінтегруємо диференціального рівняння (3.18) описаним вище методом введення параметра. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{3.19}$$

Продиференціюємо одержане рівняння, отримаємо:

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$
$$\|dy = y'dx = pdx\|$$
$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$
$$\big(p - \varphi(p)\big)dx = \big(x\varphi'(p) + \psi'(p)\big)dp,$$

поділимо обидві частини рівняння на $p-\varphi(p)$, отримаємо

$$dx=\frac{x\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}+\frac{\psi'(p)dp}{p-\varphi(p)},$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Останнє рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку $\left(y'+P(x)y=Q(x)\right)$ відносно функції $x(p)$. Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку має вигляд:

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Тоді, враховуючи, що $P=-\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}, Q=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$, одержимо

$$x=Ce^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}+e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\cdot\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\,dp=\omega(p,C),$$

що разом з (3.18) визначатиме загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі.

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y=5xy'-\ln y'.$$

Задане неявне диференціальне рівняння – це рівняння Лагранжа, так як $\varphi(y')=5y', \psi(y')=-\ln y'$. Нехай $y'=p$. Тоді

$$y=5xp-\ln p.$$

Продиференціюємо одержане рівняння, отримаємо:

$$dy=5pdx+5xdp-\frac{1}{p}dp\Rightarrow\|dy=y'dx=pdx\|\Rightarrow$$

$$pdx=\left(5x-\frac{1}{p}\right)dp+5pdx\Rightarrow 4pdx+\left(5x-\frac{1}{p}\right)dp=0,$$

$$4p\frac{dx}{dp}+5x-\frac{1}{p}=0\Rightarrow 4\frac{dx}{dp}+\frac{5x}{p}=\frac{1}{p^2}.$$

Це – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Інтегруємо методом варіації довільної сталої. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$4\frac{dx}{dp}+\frac{5x}{p}=0\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{5}{4p}dp\Rightarrow\ln|x|=-\frac{5}{4}\ln|p|+\ln C\Rightarrow x=\frac{C}{p^{\frac{5}{4}}}.$$

Розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку шукаємо у вигляді

$$x=\frac{C(p)}{p^{\frac{5}{4}}}.$$

Підставляючи у рівняння, одержимо:

$$4\cdot\frac{C'(p)p^{\frac{5}{4}}-\frac{5}{4}p^{\frac{1}{4}}C(p)}{p^{\frac{5}{2}}}+5\cdot\frac{\frac{C(p)}{p^{\frac{5}{4}}}}{p}=\frac{1}{p^2},$$

$$4C'(p) \cdot p^{-\frac{5}{4}} - 5C(p) \cdot p^{-\frac{9}{4}} + 5C(p) \cdot p^{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{p^2},$$

$$\frac{4dC}{dp} \cdot \frac{1}{p^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{p^2} \Rightarrow dC = \frac{1}{4} p^{-\frac{3}{4}} dp \Rightarrow C = \frac{1}{4} \cdot \frac{p^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C_1 = p^{\frac{1}{4}} + C_1.$$

Тоді $x = \frac{p^{\frac{1}{4}}+C_1}{p^{\frac{5}{4}}}$. Загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі має вигляд:

$$x = \frac{p^{\frac{1}{4}} + C_1}{p^{\frac{5}{4}}}, \;\; y = 5\left(\frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^{\frac{5}{4}}}\right) p - \ln p,$$

або

$$x = \frac{p^{\frac{1}{4}} + C_1}{p^{\frac{5}{4}}}, \;\; y = 5\left(1 + \frac{C_1}{p^{\frac{1}{4}}}\right) p - \ln p,$$

Якщо $p = 0$, то підставляючи його у вираз $y = 5xp - \ln p$, переконуємося, що ця функція не є розв'язком, бо $\ln 0$ не існує.

3.4. Рівняння Клеро

Розглянемо окремий випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y') = y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{3.20}$$

Означення. Рівняння (3.20) називають *рівнянням Клеро*.

Зінтегруємо його за тією схемою, що і рівняння Лагранжа. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp + \psi(p).$$

Продиференціюємо одержане рівняння, отримаємо:

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$
$$\|dy = y'dx = pdx\|$$
$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$
$$\big(x + \psi'(p)\big)dp = 0,$$
$$1)\ dp = 0 \vee 2)\ x + \psi'(p) = 0.$$

Розглянемо ці два випадки окремо.

$$1)\ dp = 0 \Rightarrow p = C.$$

Одразу отримаємо загальний розв'язок рівняння Клеро у вигляді:

$$y = xC + \psi(C). \tag{3.21}$$

Питання для самоконтролю до теми 3

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку, нерозв'язним відносно похідної?
2. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку степеня n?
3. Сформулюйте означення особливого розв'язку.

4. Сформулюйте означення обвідної кривої.
5. Охарактеризуйте типи рівнянь нерозв'язних відносно похідної, які інтегруються у квадратурах. Наведіть приклади.
6. Розкажіть про метод введення параметру, його особливості.
7. Яке рівняння називається рівнянням Лагранжа?
8. Яке рівняння називається рівнянням Клеро?

Завдання до теми 3

1. Зінтегрувати рівняння $y = (y')^2 + 8xy' - 9x^2$.
2. Зінтегрувати рівняння $y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$.
3. Зінтегрувати рівняння $x = 5(y')^7 - 3y'$.
4. Зінтегрувати рівняння $y = (y')^2 + xy' - x$.

4. Лінійні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

4.1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4.1}$$

де коефіцієнти p, q – дійсні числа.

Означення. Будь-які два лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння другого порядку називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

Теорема 1. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння (1) є лінійна комбінація двох лінійно незалежних розв'язків

$$y = \sum_{i=1}^{2} C_i y_i(x).$$

Згідно *методу Ейлера*, частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \tag{4.2}$$

де λ – деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Продиференціювавши, одержимо:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставивши y', y'' у диференціальне рівняння (4.1), отримаємо

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{4.3}$$

Означення. Рівняння (4.3) називається *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними числами* лінійного однорідного рівняння другого порядку (4.1).

$$D = p^2 - 4q,\ \ \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Алгебраїчне рівняння 2-го порядку має 2 кореня. У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}.$$

У цьому випадку рівняння (4.1) має фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}, y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Загальним розв'язком рівняння (1) буде:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y'' - 16y' + 64y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0 \Rightarrow (\lambda - 8)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -8,\ \ \lambda_2 = -8.$$

Загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{8x}.$$

II. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Функції $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.1). Тоді, загальним розв'язком буде:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y'' - 5y' - 84y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 84 = 0.$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84) = 361, \sqrt{D} = 19,$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5 - 19}{2} = -7,\ \ \lambda_2 = \frac{5 + 19}{2} = 12.$$

Загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{12x}.$$

III. Рівняння (4.1) має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. У цьому випадку рівняння (4.1) має фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\, , y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x\ \ (\alpha \neq 0).$$

Загальним розв'язком рівняння (4.1) буде:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y'' - 6y' + 34y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0.$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = -100, \sqrt{D} = \sqrt{-100} = 10i,$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i.$$

Загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = C_1 e^{3x}\cos 5x + C_2 e^{3x}\sin 5x.$$

4.2. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{4.4}$$

де коефіцієнти p, q – дійсні числа, функція $f(x)$ – непевна на відрізку $[a; b]$.

Теорема 2. Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (4.4) є сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (4.1) та довільного частинного розв'язку, тобто

$$y_{\text{заг.неодн.}} = y_{\text{заг.одн.}} + y_{\text{ч.н.}}. \tag{4.5}$$

Для розв'язання диференціального рівняння (4.4) застосуємо метод варіації довільних сталих, який полягає у наступному. Загальний розв'язок рівняння (4.4) шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \qquad (4.6)$$
де $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції, залежні від x, $y_1(x), y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння.

Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ треба задати дві умови. Перша умова – функції $C_1(x), C_2(x)$ повинні задовольняти задане рівняння (4.4). Другу умову виберемо з наступних міркувань. Продиференціюємо рівність (4.6):
$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x). \qquad (4.7)$$

Накладемо на функції $C_1(x), C_2(x)$ таку умову, щоб вираз (4.7) для похідної y' мав вигляд, як і у випадку сталих C_1, C_2, тобто
$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \qquad (4.8)$$
Тоді
$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$
Продиференціюємо отриману рівність ще раз:
$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$
Підставимо y, y', y'' у диференціальне рівняння (4.4):
$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$
$$+p\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) + q\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = f(x).$$
Перегрупуємо доданки:
$$C_1(x)\left(\underbrace{y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)}_{=0}\right) +$$
$$+C_2(x)\left(\underbrace{y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)}_{=0}\right) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Вирази у дужках дорівнюють нулю, оскільки $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки відповідного диференціального рівняння. Отже, одержано ще одну умову для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$:
$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \qquad (4.9)$$

Таким чином, функція $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ буде розв'язком диференціального рівняння (4.4), якщо функції $C_1(x), C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь:
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (4.10)$$

Означення. Систему (4.10) називають *системою Лагранжа*, а її визначник не дорівнює нулю у жодній точці $x \in [a; b]$.

Приклад. Зінтегрувати рівняння методом варіації довільних сталих:
$$y'' - 2y' + 2y = x^2.$$

1) Розглянемо однорідне диференціальне рівняння:
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
Характеристичне рівняння має вигляд:
$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1.$$
$$y_1(x) = e^x \cos x\,, y_2(x) = e^x \sin x$$
Загальний розв'язок однорідного рівняння буде мати вигляд:
$$y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2) Застосуємо метод варіації довільних сталих. Покладемо, що

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$
Далі треба розв'язати систему (4.10):
$$\begin{cases} C_1'(x)e^x\cos x + C_2'(x)e^x\sin x = 0, \\ C_1'(x)(e^x\cos x - e^x\sin x) + C_2'(x)(e^x\sin x + e^x\cos x) = x^2. \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1'(x)e^x\cos x + C_2'(x)e^x\sin x = 0, \\ C_1'(x)e^x\cos x - C_1'(x)e^x\sin x + C_2'(x)e^x\sin x + C_2'(x)e^x\cos x = x^2. \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1'(x)e^x\cos x + C_2'(x)e^x\sin x = 0, \quad \Rightarrow C_1'(x) = -\dfrac{C_2'(x)\sin x}{\cos x}, \\ C_1'(x)e^x\sin x - C_2'(x)e^x\cos x = -x^2. \end{cases}$$
звідки
$$-\frac{C_2'(x)\sin x}{\cos x}\cdot e^x\sin x - C_2'(x)e^x\cos x = -x^2,$$
$$-C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -x^2e^{-x}\cos x,$$
$$\Rightarrow C_2'(x) = x^2e^{-x}\cos x,$$
$$\Rightarrow C_2 = \int x^2e^{-x}\cos x\,dx =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-x}\cos x - \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\sin x + \widetilde{C_2}.$$
$$C_1'(x) = -x^2e^{-x}\sin x,$$
$$\Rightarrow C_1 = -\int x^2e^{-x}\sin x\,dx =$$
$$= -\left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\cos x - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-x}\sin x + \widetilde{C_1}.$$
$$\Rightarrow y = C_1(x)e^x\cos x + C_2(x)e^x\sin x =$$
$$= e^x\left(\widetilde{C_1}\cos x + \widetilde{C_2}\sin x\right) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

Теорема (*про структуру розв'язку*). Якщо функція $y^*(x)$ є одним з розв'язків диференціального рівняння (4.4), то загальний розв'язок неоднорідного диференціальне рівняння другого порядку має вигляд: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння (4.1).

Метод невизначених коефіцієнтів полягає у підбиранні вигляду частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Вигляд частинного розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння та від правої частини заданого неоднорідного рівняння.

Розглянемо наступні правила підбирання частинного розв'язку $y^*(x)$.

I. Нехай права частина $f(x)$ рівняння (4.4) має вигляд
$$f(x) = P_m(x)e^{kx},$$
де $P_m(x)$ – многочлен степеня m:
$$P_m(x) = p_mx^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1x + p_0, \;\; p_m \neq 0,$$
і число k не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, то рівняння (4.4) має частинний розв'язок вигляду:

$$y^*(x) = Q_m(x)e^{kx},$$
де $Q_m(x)$ – многочлен степеня m.

Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

II. Нехай права частина $f(x)$ рівняння (4.4) має вигляд
$$f(x) = P_m(x)e^{kx},$$
де $P_m(x)$ – многочлен степеня m:
$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0, \;\; p_m \neq 0,$$
і число k є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ та $k = \lambda_1 \neq \lambda_2$, то рівняння (4.4) має частинний розв'язок вигляду:
$$y^*(x) = x \cdot Q_m(x)e^{kx}.$$

Якщо $k = \lambda_1 = \lambda_2$ (*випадок кратних коренів*), то рівняння (4.4) має частинний розв'язок вигляду:
$$y^*(x) = x^2 \cdot Q_m(x)e^{kx}.$$

III. Нехай права частина $f(x)$ рівняння (4.4) має вигляд
$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x),$$
де $P_m(x)$ і $Q_s(x)$ – многочлени степеня m та s відповідно. Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, то рівняння (4.4) має частинний розв'язок вигляду:
$$y^*(x) = e^{\alpha x}(G_m(x)\cos\beta x + H_s(x)\sin\beta x),$$
де $G_m(x)$ і $H_s(x)$ – многочлени степеню, який не перевищує $\max(m, s)$.

IV. Нехай права частина $f(x)$ рівняння (4.4) має вигляд
$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x),$$
де $P_m(x)$ і $Q_s(x)$ – многочлени степені m та s відповідно. Пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ є коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, то рівняння (4.4) має частинний розв'язок вигляду:
$$y^*(x) = x \cdot e^{\alpha x}(G_m(x)\cos\beta x + H_s(x)\sin\beta x),$$
де $G_m(x)$ і $H_s(x)$ – многочлени степеню, який не перевищує $\max(m, s)$.

Приклад. Зінтегрувати рівняння методом невизначених коефіцієнтів:
$$y'' - 2y' + 2y = x^2.$$

1) Загальний розв'язок однорідного рівняння буде мати вигляд (дивись попередній приклад, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1$):
$$y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

2) Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді:
$$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C,$$
бо права частина заданого рівняння x^2 співпадає з загальним виглядом правої частини $P_m(x)e^{kx}$ при $m = 2$ і $k = 0$, причому $k = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді
$$\left(y^*(x)\right)' = 2Ax + B,$$
$$\left(y^*(x)\right)'' = 2A.$$
Підставимо знайдені значення у задане диференціальне рівняння:
$$2A - 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2A - 2B + 2C) = x^2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 4A = 0, \\ 2A - 2B + 2C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = 1, \\ C = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y^*(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1x + \frac{1}{2}.$$

Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

Питання для самоконтролю до теми 4

1. Який вигляд має лінійне однорідне рівняння другого порядку?
2. Що розуміється під фундаментальною системою розв’язків?
3. Яке рівняння називається характеристичним? Як побудувати характеристичне рівняння для однорідного рівняння другого порядку?
4. Наведіть правила для знаходження розв’язків однорідного рівняння другого порядку.
5. У чому полягає метод варіації довільних сталих?
6. Система якого вигляду називають системою Лагранжа?
7. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів? Поясніть різні випадки методу невизначених коефіцієнтів.

Завдання до теми 4

1. Зінтегрувати рівняння $y'' - 18y' + 81y = 0$.
2. Зінтегрувати рівняння $y'' + 9y' - 736y = 0$.
3. Зінтегрувати рівняння $y'' + 20y' + 181y = 0$.

5. Диференціальні рівняння вищих порядків

5.1. Основні поняття та означення

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку
$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (5.1)$$

Означення. Найвищий порядок похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називають *порядком* цього диференціального рівняння.

Означення. Якщо рівняння (5.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то рівняння
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (5.2)$$
називають *рівнянням у нормальній формі*.

Функцію $y = \varphi(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі $(a; b)$, називають *розв'язком* рівняння (5.2) на цьому інтервалі, якщо для всіх $x \in (a; b)$ вона перетворює це рівняння у тотожність.

5.2. Задача Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку

Для рівняння (5.2) задача Коші формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умови:
$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0'; y''(x_0) = y_0''; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (5.3)$$
де $x_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, які називають *початковими даними* розв'язку $y = y(x)$. Число x_0 називають *початковим значенням* незалежної змінної x, сукупність чисел $x_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}$ – *початковими даними рівняння* (5.2), а умови (5.3) – *початковими умовами*.

Для рівняння другого прядку
$$y'' = f(x, y, y') \qquad (5.4)$$
задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$, який задовольняє початковим умовам
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \qquad (5.5)$$

З геометричної точки зору задача Коші (5.4), (5.5) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$ і має у цій точці заданий напрям дотичної y_0', тобто $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Означення. Функція $f(x, y)$ за змінною y задовольняє *умову Ліпшиця*, якщо
$$\left|f\left(x, y^{(1)}\right) - f\left(x, y^{(2)}\right)\right| \le L\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right|, \ \forall\left(x; y^{(1)}\right) \in D, \ \left(x; y^{(2)}\right) \in D.$$
Тут $L > 0$ – найменша константа, що задовольняє цю умову і називається *константою Ліпшиця*.

Теорема (*про існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, розв'язаного відносно похідної*). Нехай у деякому замкненому околі точки $\left(x_0; y_0; y_0'; y_0''; \dots; y_0^{(n-1)}\right)$ функція $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ задовольняє умовам:

1. функція $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ визначена і неперервна по всім змінним;

2. функція $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ліпшицева по всім змінним, починаючи з другої:

$$\left|f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) - f\left(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}\right)\right| \leq$$
$$\leq L\left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + \cdots + \left|y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}\right|\right).$$

Тоді, при $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де – де h – досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (5.2), що задовольняє початковим умовам (5.3).

Теорема (*про існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної*). Нехай у деякому замкненому околі точки $\left(x_0; y_0; y_0'; y_0''; \ldots; y_0^{(n-1)}; y_0^{(n)}\right)$ функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ задовольняє умовам:

1. функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ визначена і неперервна по всім змінним;

2. частинні похідні функції $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ по всім змінним з другої до передостанньої обмежені:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \ldots, \left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_{n-1}.$$

3. частинна похідна по останній змінній не обертається на нуль

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \neq 0.$$

Тоді, при $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де – де h – досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (5.1), що задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0'; y''(x_0) = y_0''; \ldots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}.$$

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Задане рівняння має розв'язки:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Звідси

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Знайдемо довільні сталі C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 1, \\ -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий розв'язок

$$y = \cos x.$$

5.3. Класифікація розв'язків

Означення. *Загальним розв'язком* рівняння (5.2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від n довільних сталих:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

де функція φ визначена у деякій області змінних $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$, яка має частинні похідні по x до порядку n включно.

Зауваження. Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування та містить одну довільну сталу. У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться у результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок рівняння (5.2) містить n довільних сталих.

З геометричної точки зору на площині $(x;y)$ маємо сім'ю інтегральних кривих, залежну від n параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$, причому рівняння цієї сім'ї розв'язане відносно y.

У багатьох випадках, інтегруючи рівняння (5.2), розв'язок отримується у неявному вигляді (не розв'язаному відносно y):

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \tag{5.6}$$

Означення. Загальний розв'язок рівняння (5.2) у неявному вигляді (6) називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

У деяких випадках знаходження загального розв'язку рівняння (5.2) в явній або неявній формі представляє великі труднощі. У таких випадках, інтегруючи диференціальне рівняння (5.2), шукають сімейство інтегральних кривих, яке залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(p, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \tag{5.7}$$

Означення. Сім'ю інтегральних кривих (5.7) називають *загальним розв'язком у параметричній формі*.

Означення. Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (5.2) називають *частинним*, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші, тобто через кожну точку $\big(x_0; y(x_0)\big)$ інтегральної кривої $y = y(x)$ не проходить інший розв'язок $y = y_1(x)$, який би задовольняв початкові умови:

$$y_1(x_0) = y(x_0); y_1'(x_0) = y'(x_0); y_1''(x_0) = y''(x_0); \dots ; y_1^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Кожний розв'язок, який можна одержати з формули загального розв'язку для певних допустимих числових сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, буде, очевидно, частинним.

Означення. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають *особливим*.

Питання для самоконтролю до теми 5

1. Яке рівняння називають рівнянням у нормальній формі?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння n-го порядку?
3. Що Ви розумієте під розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?
4. Сформулюйте задачу Коші для диференціальне рівняння n-го порядку.
5. Що називають початковими даними рівняння, а що початковими умовами задачі Коші для диференціальне рівняння n-го порядку?
6. Сформулюйте умову Ліпшиця.
7. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, розв'язаного відносно похідної.
8. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної.

9. Надайте класифікацію розв’язків диференціального рівняння n-го порядку.
10. Яку функцію називають загальним інтегралом диференціального рівняння n-го порядку?
11. Яку сім’ю інтегральних кривих називають загальним розв’язком у параметричній формі?

Завдання до теми 5

1. Знайти розв’язок задачі Коші $y'' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$.
2. Знайти розв’язок задачі Коші $y'' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1$.
3. Знайти розв’язок задачі Коші $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 1$.
4. Знайти розв’язок задачі Коші $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$.
5. Знайти розв’язок задачі Коші $y'' + 16y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 3$.

6. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

6.1. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку *n*

Розглянемо спочатку рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n, тобто рівняння вигляду:

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \tag{6.1}$$

1 випадок. Рівняння (6.1) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$. Тоді

$$y^{(n)} = f(x). \tag{6.2}$$

де функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$. Тому, вона може бути проінтегрована у квадратурах. Справді, інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

$$\dots$$

$$y = \underbrace{\int \left(\int \left(\dots \int f(x)dx \dots\right)dx\right)dx}_{n} + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+ \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n, \tag{6.3}$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі. Формула (6.3) визначає загальний розв'язок рівняння (6.2).

2 випадок. Рівняння (6.1) не можна розв'язати через елементарні функції відносно $y^{(n)}$ або вираз для $y^{(n)}$ є надто складним. Припустимо, що у цьому випадку існують такі функції:

$$x = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = \psi(t), \tag{6.4}$$

де t – деякий параметр, такий що $F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0$.

Виразимо y через параметр t. Оскільки

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Далі, враховуючи, що

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt,$$

знаходимо, що

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2).$$

Далі, міркуючи аналогічно, зможемо знайти

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (6.1) у параметричній формі можна записати у вигляді:

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Слід відзначити, що досить легко знайти функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ з (6.4) у тому випадку, коли рівняння (6.1) можна розв'язати відносно незалежної змінної, тобто якщо

$$x = \varphi\left(y^{(n)}\right).$$

У цьому випадку замість $y^{(n)}$ можна взяти довільну неперервну функцію $\psi(t)$ і тоді $x = \varphi\left(\psi(t)\right)$. Зокрема, якщо $\psi(t) = t$, то $x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = t$.

6.2. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних

Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.5}$$

де $1 \le k < n$. У цьому випадку порядок рівняння (6.5) можна понизити до порядку $(n-k)$, ввівши нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою:

$$y^{(k)} = z, \tag{6.6}$$

тоді

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

З (6.5) і (6.6) випливає, що функція $z = z(x)$ є розв'язком рівняння:

$$F\left(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0, \tag{6.7}$$

Це рівняння $(n-k)$-го порядку. Звичайно, не гарантовано, що рівняння (6.7) можна зінтегрувати у скінченному вигляді, але його порядок на k менший за порядок рівняння (6.5). Таким чином, за допомогою заміни (6.6) вдалося знизити порядок рівняння.

Якщо $z = \omega(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ – загальний розв'язок або

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0$$

загальний інтеграл рівняння (6.7), то для знаходження функції y одержемо диференціальне рівняння k-го порядку:

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

або

$$\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}\right) = 0.$$

Це рівняння типу, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n. Інтегруючи це рівняння отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$xy''' = y'' - xy''.$$

Зробимо заміну $y'' = z$.

$$xz' = z(1-x).$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{dz} = \frac{1-x}{x}dx \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| - x + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = C_1 x e^{-x} \Rightarrow y'' = C_1 x e^{-x} \Rightarrow$$

$$y' = C_1 \int x e^{-x} dx + C_2 = \begin{Vmatrix} u = x, dv = e^{-x} dx \\ du = dx, v = -e^{-x} \end{Vmatrix} =$$

$$= C_1 \left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right) + C_2 = C_1(-x e^{-x} - e^{-x}) + C_2 =$$

$$= -C_1 x e^{-x} - C_1 e^{-x} + C_2,$$

$$y = -C_1 \int x e^{-x} dx - C_1 \int e^{-x} dx + C_2 \int dx + C_3 =$$

$$= -C_1(-x e^{-x} - e^{-x}) + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 =$$

$$= C_1 x e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 =$$

$$= C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3.$$

Якщо $z = 0$, то $y'' = 0$, тобто $y = C_4 x + C_5$. Кожна з цих функцій є частинним розв'язком заданого рівняння. Функція $x = 0$ не є розв'язком рівняння.

Відповідь: $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3$.

6.3. Рівняння, яке не містить незалежної змінної

Розглянемо рівняння

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (6.8)$$

Порядок такого рівняння можна понизити на одиницю підстановкою:

$$y' = z(y).$$

Зауваження. Фактично робиться подвійна заміна: вводиться нова функція і нова незалежна змінна.

Знайдемо $y'', \dots, y^{(n)}$:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$= \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \cdot z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) \cdot \frac{dy}{dx} = (z''z + (z')^2) \cdot z,$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}\right).$$

Отже, для знаходження функції $z(y)$ отримаємо диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$F\left(y, z, z', z' \cdot z, (z''z + (z')^2) \cdot z, \dots, \omega\left(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0. \qquad (6.9)$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (6.9)

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то загальний інтеграл рівняння (8) зможемо знайти, зінтегрувавши рівняння відокремлюваними змінними

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

а саме

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

6.4. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних

Означення. Диференціальне рівняння

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (6.10)$$

називають *однорідним* відносно шуканої функції та її похідних, якщо його ліва частина для довільного $t \neq 0$ задовольняє умову:

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right), \qquad (6.11)$$

де число m – це вимір однорідності функції F.

Введемо нову невідому функцію $z(x)$, поклавши

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Тоді, порядок рівняння (6.10) можна знизити на одиницю. Оскільки

$$y' = yz,$$
$$y'' = y'z + yz' = yz \cdot z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') =$$
$$= yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz^3 + yzz' + 2yzz' + yz'' =$$
$$= y(z'' + 3zz' + z^3),$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} = y \cdot \psi\left(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}\right),$$

то підставляючи ці вирази в (6.10), отримаємо співвідношення:

$$F\left(x, y, z, y(z^2 + z'), y(z'' + 3zz' + z^3), \dots, y \cdot \psi\left(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0,$$

яке, враховуючи (6.11), можна записати у вигляді:

$$y^m \cdot F\left(x, 1, z, z^2 + z', z'' + 3zz' + z^3, \dots, \psi\left(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0. \qquad (6.12)$$

Якщо зможемо знайти загальний розв'язок рівняння (6.12) у вигляді

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то, замінюючи z на $\frac{y'}{y}$, отримаємо

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Звідси знаходимо загальний розв'язок рівняння (6.10):

$$\ln|y| = \int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})dx + \ln|C_n|,$$
$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})dx}.$$

Питання для самоконтролю до теми 6

1. Як інтегрується рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n?
2. Як інтегрується рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних?
3. Як інтегрується рівняння, яке не містить незалежної змінної?

4. Як інтегрується рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних?

Завдання до теми 6

1. Зінтегрувати рівняння $y^{(4)} = \cos 5x$.
2. Зінтегрувати рівняння $(y'')^3 + 3y'' - x = 0$.
3. Зінтегрувати рівняння $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$.
4. Зінтегрувати рівняння $yy'' - (y')^2 = 0$.
5. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y''y^3 + 1 = 0$ з початковими умовами $y(1) = -1, y'(1) = -1$.
6. Зінтегрувати рівняння $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.

7. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку

7.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Означення. *Лінійним диференціальним рівняння n-го* порядку називають рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (7.1)$$

де $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ – задані й неперервні на відрізку $[a; b]$ функції.

Означення. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння (7.1) називається *лінійним однорідним* і має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (7.2)$$

Означення. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (7.1) називається *лінійним неоднорідним*.

Позначимо ліву частину рівняння (7.1) через лінійний диференціальний оператор L n-го порядку:

$$L[\cdot] = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x),$$

тоді

$$L[y] \coloneqq y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y. \qquad (7.3)$$

Диференціальне рівняння (7.1) можна записати в операторному вигляді:

$$L[y] = f(x). \qquad (7.4)$$

Теорема. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної $x = \varphi(t)$.

Теорема. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні невідомої функції $y = \alpha(x)z$.

Теорема. Якщо $y = y_1(x)$ є розв’язком однорідного лінійного рівняння, то і $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, теж буде розв’язком однорідного лінійного рівняння.

Теорема. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв’язками однорідного лінійного рівняння, то і $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж буде розв’язком однорідного лінійного рівняння.

Теорема. Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – розв’язки однорідного лінійного рівняння, то і

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),$$

де C_i – довільні сталі, також буде розв’язком однорідного лінійного рівняння.

Теорема. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$ є розв’язком однорідного лінійного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна частина $v(x)$ будуть також розв’язками цього рівняння.

7.2. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи функцій

Означення. Систему функцій

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \tag{7.5}$$
називають *лінійно залежною* на відрізку $[a; b]$, якщо існує набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такий що

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$$

і

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \ \ \forall x \in [a; b]. \tag{7.6}$$

Означення. Якщо тотожність (6) справедлива лише коли

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0, \ \ \forall x \in [a; b],$$

то функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними*.

Теорема (*необхідна умова лінійної залежності n функцій*). Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно залежні на відрізку $[a; b]$, то визначник Вронського $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ (або вронскіан) тотожно дорівнює нулю при всіх $x \in [a; b]$:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема (*достатня умова лінійної незалежності розв'язків*). Якщо розв'язки $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ однорідного лінійного рівняння – лінійно незалежні функції, то визначник Вронського $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ не дорівнює нулю у жодній точці $x \in [a; b]$.

Теорема. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння (7.2) є лінійна комбінація n лінійно незалежних розв'язків

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

7.3. Формула Остроградського-Ліувілля

Оскільки максимальне число незалежних розв'язків дорівнює n, то система $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y(x)$ буде залежною і визначник Вронського $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y] \equiv 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{7.7}$$

Справді, якщо підставити у замість y одну з функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, то одержимо визначник, який має два однакові стовпці і тому тотожно рівний нулю.

Розкладаючи визначник (7.7) за елементами останнього стовпця, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots +$$

$$+(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ddots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} y' + (-1)^n + \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ddots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} y \equiv 0. \quad (7.8)$$

Розділимо рівняння (7.8) на визначник Вронського $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$, отримаємо рівняння (7.2), де коефіцієнти дорівнюють:

$$a_1(x) = \frac{-W_1(x)}{W(x)}, \quad a_2(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}, \dots, \quad a_n(x) = (-1)^n \frac{W_n(x)}{W(x)}. \qquad (7.9)$$

$$\frac{d}{dx} W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{=0} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}_{\neq 0;\ = W_1(x)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Усі визначники, крім останнього дорівнюють нулю (вони мають два однакові рядки), а тому

$$\frac{dW(x)}{dx} = W_1(x).$$

Враховуючи, що $a_1(x) = \frac{-W_1(x)}{W(x)} \Rightarrow W_1(x) = -a_1(x)W(x)$, отримаємо:

$$\frac{dW(x)}{dx} = -a_1(x) \cdot W(x),$$

розділимо змінні:

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -a_1(x)dx \Rightarrow \ln|W(x)| = -\int a_1(x)dx - \ln|C| \Rightarrow$$

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}. \qquad (7.10)$$

Означення. Формула (7.10) називається *формулою Остроградського-Ліувілля*.

7.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (7.11)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа.

Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння (7.11) потрібно знати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ цього рівняння.

Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння (7.11) є:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Згідно *методу Ейлера*, частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \qquad (7.12)$$

де λ – деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Продиференціювавши, одержимо:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Підставивши $y', y'', \dots, y^{(n)}$ у диференціальне рівняння (7.11), отримаємо

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (7.13)$$

Означення. Рівняння (7.13) називається *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними числами* лінійного однорідного рівняння n-го порядку (7.11).

Алгебраїчне рівняння n-го степеню має n коренів. У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

I. Нехай всі корні $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – дійсні і різні. Тоді, функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ є розв'язками, причому $e^{\lambda_i x}$ – розв'язки лінійно незалежні, тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=1}^{n}$ – фундаментальна система розв'язків. Загальним розв'язком рівняння (7.11) буде

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y''' - y' = 0.$$

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.$$

II. Нехай λ – кратний корінь, кратності k. Загальним розв'язком рівняння (7.11) буде

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{x}.$$

III. Нехай рівняння (7.11) має одну пару комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Загальним розв'язком рівняння (7.11) буде

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y^{(4)} - y = 0.$$

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i.$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{0\cdot x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

IV. Нехай рівняння (7.11) має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратності k. Загальним розв'язком рівняння (7.11) буде

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big((C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x +$$

$$+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\cdots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x)+C_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}.$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y^{(6)}-y=0.$$

$$\lambda^6-1=0\Rightarrow(\lambda^3-1)(\lambda^3+1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0\Rightarrow$$

$$D=1-4=-3,\sqrt{D}=\sqrt{-3}=i\sqrt{3},$$

$$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+$$

$$+e^{\frac{1}{2}\cdot x}\left(C_5\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_6\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

7.5. Метод варіації довільних сталих побудови загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку

Розглянимо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \quad (7.14)$$

Згідно попередньої лекції, рівняння (1) можна записати в операторному вигляді через лінійний диференціальний оператор L n-го порядку:

$$L[y]=f(x).$$

Тоді, однорідне диференціальне рівняння матиме вигляд:

$$L[y]=0. \quad (7.15)$$

Теорема 1. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння (7.14) дорівнює сумі будь-якого його частинного розв’язку та загального розв’язку відповідного однорідного рівняння (7.15), тобто

$$y_{\text{заг.неодн.}}=y_{\text{заг.одн}}+y_{\text{ч.н.}} \quad (7.16)$$

Нехай маємо загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння (7.15)

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x), \quad (7.17)$$

де $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – деяка фундаментальна система розв’язків цього рівняння, а $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – довільні сталі.

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку (7.14) будемо шукати у вигляді (7.17), вважаючи $C_1,C_2,\ldots,C_n$ не сталими, а невідомими функціями змінної x, тобто

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\cdots+C_n(x)y_n(x). \quad (7.18)$$

Підберемо $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ таким чином, щоб функція (7.17) задовольняла неоднорідне рівняння (7.14). Продиференціюємо рівність (7.17):

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)+\cdots+$$

$$+C_n'(x)y_n(x)+C_n(x)y_n'(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i'(x).$$

В одержаній рівності покладемо

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i(x)=0,$$

тоді

$$y'=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i'(x).$$

Тобто y' має вигляд, як і у випадку, коли $C_1, C_2, \dots, C_n$ – сталі. Продиференціюємо отриману рівність ще раз:

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+$$

$$+C_n'(x)y_n'(x)+C_n(x)y_n''(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i''(x).$$

Покладаючи

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'(x)=0,$$

отримаємо

$$y''=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i''(x).$$

Тобто і друга похідна y'' має такий же вигляд, як і у випадку, коли $C_1, C_2, \dots, C_n$ – сталі. Продовжуючи цей процес до знаходження похідної $y^{(n-1)}$ включно, отримаємо

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n-1)}(x).$$

Покладаючи в цій рівності

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)=0,$$

отримаємо

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n-1)}(x).$$

І нарешті

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i^{(n)}(x).$$

Підставимо $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ у диференціальне рівняння (7.14):

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) +$$

$$+a_2(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-2)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) +$$

$$+a_n(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x) = f(x).$$

Групуючи доданки у лівій частині рівності, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x) \left(\underbrace{y_i^{(n)}(x) + a_1(x) y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y_i'(x) + a_n(x) y_i(x)}_{=0} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x).$$

$$L[y_i] = y_i^{(n)}(x) + a_1(x) y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y_i'(x) + a_n(x) y_i(x) \equiv 0,$$

оскільки $y_i, i = \overline{1,n}$ є розв'язками відповідного диференціального рівняння. Отже, одержано ще одну умову:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Таким чином, невідомі функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ з рівності (7.17) можна знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \cdots + C_n'(x) y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + \cdots + C_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ \cdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (7.19)$$

Система (7.19) має єдиний розв'язок, оскільки визначником цієї системи є вронскіан (визначник Вронського)

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

який відмінний від нуля внаслідок лінійної незалежності $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Тому, систему (7.19) можна розв'язати відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ однозначно. Інтегруючи $C_i'(x), i = \overline{1,n}$, знаходимо функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$, які потім треба підставити у формулу (7.17).

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y''' + y'' = e^{2x}.$$

Характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0, \lambda=-1.$$

$$\Rightarrow y(x)=(C_1+C_2x)e^{0\cdot x}+C_3e^{-x}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}.$$

Далі загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y(x)=C_1(x)+C_2(x)x+C_3(x)e^{-x}.$$

Для визначення функцій $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ складемо систему (7.19)

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)x+C_3'(x)e^{-x}=0, \\ C_2'(x)-C_3'(x)e^{-x}=0, \\ C_3'(x)e^{-x}=e^{2x}. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо:

$$C_3'(x)=e^{3x} \Rightarrow C_3(x)=\int e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{3}+\widetilde{C_3}.$$

З другого рівняння знаходимо:

$$C_2'(x)-e^{3x}e^{-x}=0 \Rightarrow C_2'(x)=e^{2x},$$

$$\Rightarrow C_2(x)=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+\widetilde{C_2}.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$C_1'(x)+e^{2x}x+e^{3x}e^{-x}=0 \Rightarrow C_1'(x)=-e^{2x}(x+1),$$

$$\Rightarrow C_1(x)=-\int (x+1)e^{2x}dx=\left\|\begin{matrix} u=x+1, du=dx \\ dv=e^{2x}dx, v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\left((x+1)\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx\right)=-\left((x+1)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right)=$$

$$=-e^{2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\widetilde{C_1}.$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y(x)=-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\widetilde{C_1}+\left(\frac{e^{2x}}{2}+\widetilde{C_2}\right)x+\left(\frac{e^{3x}}{3}+\widetilde{C_3}\right)e^{-x}$$

$$=\frac{e^{2x}}{12}+\frac{\widetilde{C_3}}{x}+\widetilde{C_2}x+\widetilde{C_1}.$$

7.6. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянимо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$L[y]:=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (7.20)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі $(a;b)$.

Якщо права частина рівняння (7.20) має спеціальний вигляд, то для відшукання частинного розв'язку цього рівняння можна використати *метод невизначених коефіцієнтів*.

Означення. *Спеціальною правою частиною* диференціального рівняння (7.20) називають вираз

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x), \qquad (7.21)$$

де $P_m(x)$ і $Q_s(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степені m та s відповідно.

Метод невизначених коефіцієнтів полягає у підбиранні вигляду частинного розв'язку диференціального рівняння. Вигляд частинного розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння та від правої частини заданого неоднорідного рівняння.

Розглянемо наступні випадки.

I. Нехай функція $f(x)$ є добутком многочлена на експоненціальну функцію, тобто

$$L[y] = P_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (7.22)$$

де $P_m(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня m:

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0.$$

Нехай число α не є коренем характеристичного рівняння $L[y] = 0$. Тоді, частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y^*(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (7.23)$$

де $Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0$ – многочлен степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, підставляючи (7.23) у рівняння (7.22) і прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів.

II. Нехай α є коренем кратності k характеристичного рівняння $L[y] = 0$. Тоді, частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (7.24)$$

де $Q_m(x)$ – многочлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

III. Нехай права частина $L[y] = f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x),$$

де $P_m(x)$ і $Q_s(x)$ – многочлени степеня m та s відповідно.

Тоді, частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_n(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\sin\beta x\right), \qquad (7.25)$$

де $\tilde{P}_n(x)$ і $\tilde{Q}_n(x)$ – многочлени степеня $n = \max(m, s)$, k – кратність пари коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння.

Якщо $\alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння $L[y] = 0$, тоді, частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y^*(x) = e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_n(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\sin\beta x\right). \qquad (7.26)$$

Приклад. Зінтегрувати рівняння:

$$y''' + y'' = e^{2x}.$$

Характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda = -1.$$

$$\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{0\cdot x} + C_3 e^{-x} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Так як число $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння $L[y] = 0$, то частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді:

$$y^*(x) = Ae^{2x}.$$

Підставимо $y^*(x)$ у задане рівняння.

$$y^{*\prime}(x) = 2Ae^{2x};$$
$$y^{*\prime\prime}(x) = 4Ae^{2x};$$
$$y^{*\prime\prime\prime}(x) = 8Ae^{2x}.$$

Тоді, отримаємо рівняння з невизначеними коефіцієнтами:

$$8Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = e^{2x},$$

з якого знаходимо коефіцієнт A:

$$A = \frac{1}{12}.$$

$$\Rightarrow y^*(x) = \frac{e^{2x}}{12}.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{12} + C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{e^x}.$$

Питання для самоконтролю до теми 7

1. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівняння n-го порядку?
2. Якими властивостями володіє оператор L?
3. Сформулюйте властивості лінійних однорідних рівнянь.
4. Яку систему функцій називають лінійно залежною на відрізку $[a; b]$?
5. Яку систему функцій називають лінійно незалежною на відрізку $[a; b]$?
6. Сформулюйте необхідну умову лінійної залежності n функцій.
7. Наведіть приклади лінійно незалежних систем функцій.
8. Сформулюйте достатню умову лінійної незалежності розв'язків.
9. Який вигляд має визначник Вронського?
10. Наведіть формулу Остроградського-Ліувілля.
11. Охарактеризуйте метод варіації довільних сталих побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.
12. Що розуміють під спеціальною правою частиною?
13. Охарактеризуйте метод невизначених коефіцієнтів для неоднорідного диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Завдання до теми 7

1. Зінтегрувати рівняння $y''' + y'' = x^2 e^{5x}$.
2. Зінтегрувати рівняння $y''' + y'' = (4x + 3)e^{5x}$.
3. Зінтегрувати рівняння $y''' + 4y' = x^2 e^{5x}$.

8. Системи звичайних диференціальних рівнянь

8.1. Основні означення і поняття

Позначимо незалежну змінну через t, а через $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – деякі невідомі функції цієї змінної.

Означення. Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') = 0, \\ F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') = 0, \\ \qquad \dots \\ F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

називають *системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку*.

Якщо систему (8.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \qquad \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{8.2}$$

називають *нормальною* (або *системою в нормальній формі*).

Розв'язком системи (8.2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називають впорядковану сукупність функцій

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), \tag{8.3}$$

визначених і неперервно диференційовних на цьому інтервалі, якщо вона кожне рівняння системи (8.2) перетворює у тотожність, яка справджується для всіх $t \in (a; b)$.

Означення. Криву в $(n+1)$-вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка відповідає розв'язку (8.3), називають *інтегральною кривою системи* (8.2).

Означення. Сукупність функцій

$$x_j = \varphi_j(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \ \ j = 1,2, \dots, n, \tag{8.4}$$

які визначені в деякій області змінних $t, C_1, C_2, \dots, C_n$ і мають неперервні частинні похідні за змінною t, називають *загальним розв'язком системи* (8.2) в області G, якщо:

1) систему (8.4) можна розв'язати в області G відносно довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, тобто

$$C_j = \psi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \ \ j = 1,2, \dots, n; \tag{8.5}$$

2) для всіх значень $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ формули (8.5) визначають такі значення $C_1, C_2, \dots, C_n$, для яких сукупність функцій (8.4) є розв'язком системи (8.2).

Означення. *Частинним розв'язком* нормальної системи (8.2) називають розв'язок, який можна одержати із загального для конкретних значень сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Означення. Розв'язок системи, у кожній точці якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, називають *особливим*.

Означення. Неперервно диференційовну функцію $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, тотожно відмінну від сталої, називають *інтегралом* системи (8.2), якщо вона тотожно перетворюється у сталу вздовж довільного частинного розв'язку цієї системи.

Означення. Співвідношення $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ називається *першим інтегралом системи* (8.2).

Означення. Сукупність n перших інтегралів (8.5) називають *загальним інтегралом* цієї системи, якщо інтеграли $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ є незалежними, тобто між $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ не існує співвідношення вигляду $F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$ для жодної функції F.

8.2. Зведення нормальної системи рівнянь до одного диференціального рівняння

Одним із методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є *метод виключення*, за яким нормальну систему можна звести до одного диференціального рівняння.

Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь (8.2), де функції $f_i, i = \overline{1,n}$ n разів неперервно диференційовні в області $D = \mathbb{R}^{n+1}$. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2' + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n'.$$

Враховуючи, що $x_i' = f_i, i = \overline{1,n}$, отримаємо:

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Диференціюючи одержану рівність, знаходимо

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} f_n = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Продовжуючи цей процес, дістанемо нову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_1^{(n-1)} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{8.6}$$

Припустимо, що визначник (якобіан функцій $f_1, F_2, \dots, F_{n-1}$)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля. Тоді, система рівнянь, яка складається з перших $n-1$ рівнянь системи (8.6)

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_1^{(n-1)} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

може бути розв'язана відносно змінних $x_2, \dots, x_n$, при цьому змінні $x_2, \dots, x_n$ виражаються через $t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$. Підставляючи знайдені вирази в останнє рівняння системи (8.6) $x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ одержимо одне рівняння n-го порядку

$$x_1^{(n)} = f\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}\right).$$

8.3. Метод інтегрованих комбінацій

Означення. *Інтегрованою комбінацією* називають диференціальне рівняння, яке є наслідком заданої системи диференціальних рівнянь.

Метод інтегрованих комбінацій полягає в наступному: за допомогою арифметичних операцій із рівнянь системи утворюють рівняння

$$d\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

яке легко інтегрується. Одна комбінація, що інтегрується, дає можливість одержати кінцеве рівняння $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, яке є першим інтегралом системи.

Геометрично перший інтеграл є n-вимірною поверхнею в $(n+1)$-вимірному просторі, що цілком складається з інтегральних кривих.

Приклад. Зінтегрувати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = \dfrac{y}{x-y}, \\ y' = \dfrac{x}{x-y}. \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння системи на друге, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1.$$

Віднімемо друге рівняння системи від першого, одержимо другу інтегровану комбінацію

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{y-x}{x-y} \Rightarrow \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -1$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{d(y-x)}{dt} = 1 \Rightarrow d(y-x) = dt \Rightarrow y - x = t + C_2.$$

Тоді

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ y - x = t + C_2. \end{cases} \Rightarrow y = x + t + C_2$$

$$x^2 - (x^2 + t^2 + C_2^2 + 2xt + 2xC_2 + 2tC_2) = C_1$$

$$x^2 - x^2 - t^2 - C_2^2 - 2xt - 2xC_2 - 2tC_2 = C_1$$

$$-t^2 - C_2^2 - 2x(t + C_2) - 2tC_2 = C_1$$

$$-2x(t + C_2) = C_1 + t^2 + 2tC_2 + C_2^2$$

$$-2x(t + C_2) = C_1 + (t + C_2)^2$$

$$2x = -\frac{C_1}{t + C_2} - t - C_2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{C_1}{t + C_2} - t - C_2\right).$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) + t + C_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{C_1}{t + C_2} - t - C_2\right) + t + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{C_1}{t + C_2} - t - C_2 + 2t + 2C_2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{C_1}{t + C_2} + t + C_2\right).$$

Загальний розв’язок заданої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{C_1}{t + C_2} - t - C_2\right), \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{C_1}{t + C_2} + t + C_2\right). \end{cases}$$

8.4. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь

Означення. Система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона є лінійною відносно шуканих функцій та всіх їх похідних.

Система n лінійно незалежних рівнянь першого порядку, записана у нормальній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ \cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \qquad (8.7)$$

яку скорочено можна записати у формі:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + f_i(t)\,, \ \ i = \overline{1, n}, \qquad (8.8)$$

де всі коефіцієнти $a_{ij}(t)$, а також $f_i(t)$ – відомі неперервні на заданому проміжку $(a; b)$ функції.

Означення. Якщо на проміжку $(a; b)$ всі функції $f_i(t) \equiv 0$, то систему (8.7) називають *лінійною однорідною (ЛОСДР)*. Вона має вигляд:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\,, \ \ i = \overline{1, n}. \qquad (8.9)$$

Якщо у системі (8.7) не всі функції $f_i(t)$ тотожно дорівнюють нулю, то її називають *лінійною неоднорядною*.

Очевидно, лінійна однорідна система має нульовий розв'язок $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0, \dots, x_n(t) = 0$, який називають *тривіальним*.

8.5. Поняття про лінійну незалежність системи функцій

Розглянемо m систем функцій:

$$\begin{gathered} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \\ \dots\dots\dots \\ x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}. \end{gathered} \tag{8.10}$$

Означення. Сукупності функцій (8.10) називають *лінійно незалежними* на інтервалі $(a; b)$, якщо

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \dots + \alpha_m x_{m1} \equiv 0, \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_m x_{m2} \equiv 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \dots + \alpha_m x_{mn} \equiv 0, \end{gathered}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – сталі, виконується тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. В іншому випадку сукупності функцій (8.10) називають *лінійно залежними* на інтервалі $(a; b)$.

Встановимо необхідну умову лінійної залежності довільних n сукупностей функцій.

Введемо у розгляд визначник.

Означення. Визначником *Вронського* або *вронскіаном* сукупностей функцій (8.10) називають визначник

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{8.11}$$

Теорема (*необхідна умова лінійної залежності n сукупностей функцій*). Якщо n сукупностей функцій (8.10) лінійно залежні на інтервалі $(a; b)$, то визначник Вронського тотожно дорівнює нулю: $W(t) \equiv 0$.

Теорема (*необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь*). Якщо n розв'язків (8.10) системи (8.9) лінійно незалежні на інтервалі $(a; b)$, то їх вронскіан не перетворюється в нуль у жодній точці цього інтервалу.

8.6. Формула Остроградського-Ліувілля

Ця формула дозволяє з точністю до сталого множника виразити вронскіан розв'язків ЛОСДР (8.9) через діагональні коефіцієнти цієї системи:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \left(a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau) + \dots + a_{nn}(\tau)\right) d\tau}, \tag{8.12}$$

де t_0 – довільна точка інтервалу $(a; b)$.

Означення. Формула (8.12) називається *формула Остроградського-Ліувілля* (*формула Якобі*) для ЛОСДР (3).

Теорема (*про структуру загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь*). Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь з неперервними на відрізку $[a; b]$ коефіцієнтами $a_{ij}(t)$ і правими частинами $f_i(t)$ дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи (8.9) та деякого частинного розв'язку неоднорідної системи (8.8).

8.7. Матрична форма запису

Розглянемо неоднорідну систему диференціальних рівнянь (8.7), записану у матричній формі:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{8.13}$$

де $x(t)$ є невідомою вектор-функцією з простору $C^1[a; b]$: $x(t) = \mathrm{col}\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$; $A(t)$ – $(n \times n)$-вимірна матриця, компоненти якої дійсні і неперервні на відрізку $[a; b]$ функції: $A(t) \in C[a; b]$; $f(t)$ – n-вимірний вектор-стовпчик з простору $C[a; b]$: $f(t) = \mathrm{col}\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$;

Якщо у (8.13) вектор-стовпчик $f(t) \equiv 0$, то отримаємо однорідну систему, записану у матричній формі:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t). \tag{8.14}$$

Означення. Фундаментальну систему розв'язків можна охарактеризувати квадратною матрицею:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

яку називають *фундаментальною матрицею* системи (стовпцями матриці є лінійно незалежні частинні розв'язки однорідної системи).

Визначником фундаментальної матриці є визначник Вронського, тобто

$$|X(t)| = W(t).$$

Фундаментальна матриця задовольняє матричне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t),$$

де похідною від матриці $X(t)$ називають матрицю:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x'_{21}(t) & x'_{22}(t) & \dots & x'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1}(t) & x'_{n2}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Означення. Повну систему, що складається з n лінійно незалежних розв'язків системи (8.14) називають фундаментальною, а $(n \times n)$-вимірну матрицю $X(t)$, яка є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \ \ X(0) = I_n,$$

називають *нормальною фундаментальною матрицею*.

Загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь, яка записана у матричній формі (8.13), має вигляд:

$$x(t) = X(t)c + \overline{x}(t), \tag{8.16}$$

де $\overline{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи, у якості якого можна вибрати наступний вираз:

$$\overline{x}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) f(\tau) d\tau, \tag{8.17}$$

де $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ при $\tau \le t$ і $K(t,\tau) = 0$ при $\tau > t$, а $t_0 \in [a;b]$.

Означення. Матрична функція двох змінних $K(t,\tau)$ називається *еволюційним оператором* однорідної системи диференціальних рівнянь.

8.8. Метод варіації довільних сталих для систем

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{8.18}$$

Для інтегрування лінійної неоднорідної системи у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, часто використовують *метод варіації довільних сталих*.

Розв'язок ЛОСДР шукаємо у вигляді

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}, \ \ k = \overline{1,n}. \tag{8.19}$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x),\ j,k = \overline{1,n}$ – деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи, а $C_j(x),\ j = \overline{1,n}$ – деякі неперервні функції.

Виберемо у (8.19) функції $C_j(x)$ так, щоб ця формула визначала розв'язок системи (8.18). Підставляючи (8.19) у (8.18), одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(x) \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk} + f_i(x), \ \ k = \overline{1,n}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(x) z_{jk} + f_i(x), \ \ k = \overline{1,n}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \left(z_{jk}' - \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(x) z_{jk} \right) = f_i(x), \ \ k = \overline{1,n}. \tag{8.20}$$

Оскільки $z_{jk}(x)$ фундаментальна система розв'язків однорідної системи, то вираз у дужках у формулі (8.20) дорівнює нулю, а тому для знаходження функції $C_j(x)$ маємо систему:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} = f_i(x), \ \ k = \overline{1,n}. \tag{8.21}$$

Визначник системи (8.21) відмінний від нуля для всіх $x \in (a; b)$, бо ним є вронскіан $W(x)$, а тому вона має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера:

$$C_j'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x), \ \ j = \overline{1, n}, \tag{8.22}$$

де $W_{kj}(x)$ – алгебраїчне доповнення елемента z_{jk} вронскіан $W(x)$. Інтегруючи (8.22), знаходимо

$$C_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x)\, dx + C_j, \ \ j = \overline{1, n},$$

де C_j – довільні сталі, x_0 – довільна точка з інтервалу $(a; b)$.

Підставляючи знайдені вирази для $C_j(x)$ у формулу (8.19), отримаємо:

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \ \ k = \overline{1, n}. \tag{8.23}$$

Якщо в (8.23) підставити $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$, то маємо частинний розв'язок:

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \sum_{s=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x)\, dx, \ \ k = \overline{1, n}.$$

Отже, розв'язок визначений формулою (8.23), є загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи (8.18).

8.9. Метод Ейлера

Розглянемо лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2' = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{8.24}$$

де a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ – дійсні сталі. Таку систему завжди можна зінтегрувати у скінченному вигляді.

Як відомо, систему (8.24) можна звести до одного диференціального рівняння n-го порядку. В даному випадку одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, яке ми можемо розв'язати *методом Ейлера*. Але, не будемо зводити її до одного рівняння, а одразу розв'язок системи (8.24) шукаємо у вигляді:

$$x_1(t) = \gamma_1 e^{kt}, \ \ x_2(t) = \gamma_2 e^{kt}, \ \ \ldots, \ \ x_n(t) = \gamma_n e^{kt}. \tag{8.25}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і k – деякі сталі, причому $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не дорівнюють одночасно нулю. Якщо підставити (8.25) у систему (8.24), скоротити на $e^{kx} \neq 0$ і перенести усі доданки у ліву частину, то одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-k)\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + (a_{nn}-k)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{8.26}$$

Запишемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{8.27}$$

Рівняння (8.27) також може бути записане матричній формі

$$\det(A - kE) = 0,$$

де E – одинична матриця.

Означення. Рівняння (8.27) називають *характеристичним рівнянням* системи (8.24), а його корні *характеристичними числами*.

Ліва частина характеристичного рівняння (8.27) є многочленом з дійсними коефіцієнтами степеня n відносно k. З урахуванням кратності цей многочлен має n коренів. При цьому можливі наступні випадки:

1) корені характеристичного рівняння дійсні та різні;

2) корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні;

3) серед коренів характеристичного рівняння є кратні.

Випадок дійсних різних коренів характеристичного рівняння

Розглянемо випадок, коли всі корені характеристичного рівняння $k_1, k_2, \dots, k_n$ дійсні та різні. Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-k_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-k_i)\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + (a_{nn}-k_i)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

одержимо відповідні ненульові розв'язки системи (верхній індекс вказує на номер розв'язку):

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \vdots \\ \gamma_n^1 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 \\ \gamma_2^2 \\ \vdots \\ \gamma_n^2 \end{pmatrix}, \dots, \gamma^n = \begin{pmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \vdots \\ \gamma_n^n \end{pmatrix},$$

що є *власними векторами*, які відповідають власним числам k_i, $i = \overline{1, n}$. У такий спосіб одержимо n розв'язків:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 e^{k_1 t} \\ \gamma_2^1 e^{k_1 t} \\ \vdots \\ \gamma_n^1 e^{k_1 t} \end{pmatrix}, x_2(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 e^{k_2 t} \\ \gamma_2^2 e^{k_2 t} \\ \vdots \\ \gamma_n^2 e^{k_2 t} \end{pmatrix}, \dots, x_n(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1^n e^{k_n t} \\ \gamma_2^n e^{k_n t} \\ \vdots \\ \gamma_n^n e^{k_n t} \end{pmatrix}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки визначник Вронського такої системи не дорівнює нулю:

$$W(t) = e^{(k_1+k_2+\cdots+k_n)t} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^n \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \cdots & \gamma_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \cdots & \gamma_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок системи (8.24) має вигляд:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\,, \tag{8.28}$$

або у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 e^{k_1 t} & \gamma_1^2 e^{k_2 t} & \cdots & \gamma_1^n e^{k_n t} \\ \gamma_2^1 e^{k_1 t} & \gamma_2^2 e^{k_2 t} & \cdots & \gamma_2^n e^{k_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n^1 e^{k_1 t} & \gamma_n^2 e^{k_2 t} & \cdots & \gamma_n^n e^{k_n t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння

Розглянемо випадок, коли серед коренів характеристичне рівняння є комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Візьмемо один з них, наприклад, $k = \alpha + i\beta$. Числу $k = \alpha + i\beta$ згідно (8.25) відповідає розв'язок:

$$x_1(t) = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)t},\;\; x_2(t) = \gamma_2 e^{(\alpha+i\beta)t},\;\; \dots,\;\; x_n(t) = \gamma_n e^{(\alpha+i\beta)t},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – комплексні числа. Покладаючи

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21},\;\; \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22},\;\; \dots,\;\; \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

одержимо комплексний розв'язок

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(\alpha+i\beta)t},\;\; x_2(t) = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(\alpha+i\beta)t},\;\; \dots,$$
$$x_n(t) = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(\alpha+i\beta)t},$$

Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, отримаємо два лінійно незалежні дійсні розв'язки:

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{\alpha t}(\gamma_{11}\cos\beta t - \gamma_{21}\sin\beta t), \\ x_{12} &= e^{\alpha t}(\gamma_{12}\cos\beta t - \gamma_{22}\sin\beta t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{1n} &= e^{\alpha t}(\gamma_{1n}\cos\beta t - \gamma_{2n}\sin\beta t), \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x_{21} &= e^{\alpha t}(\gamma_{11}\sin\beta t + \gamma_{21}\cos\beta t), \\ x_{22} &= e^{\alpha t}(\gamma_{12}\sin\beta t + \gamma_{22}\cos\beta t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{2n} &= e^{\alpha t}(\gamma_{1n}\sin\beta t + \gamma_{2n}\cos\beta t). \end{aligned}$$

Випадок кратних коренів характеристичного рівняння

Теорема 1. Якщо k_1 – характеристичне число кратності s, то йому відповідає розв'язок системи (1) у вигляді:

$$x_1(t) = P_1(t)e^{k_1 t},\;\; x_2(t) = P_2(t)e^{k_1 t},\;\; \dots,\;\; x_n(t) = P_n(t)e^{k_1 t}. \tag{8.29}$$

де $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ – многочлени степеня не вищого, ніж $s - 1$, які мають у сукупності s довільних коефіцієнтів.

Питання для самоконтролю до теми 8

1. Яку систему називають нормальною (системою в нормальній формі)?
2. Яку криву називають інтегральну криву системи?
3. Що називається загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь?
4. Що називається частинним розв'язком нормальної системи?
5. Охарактеризуйте метод виключення для системи диференціальних рівнянь.
6. У чому суть методу інтегрованих комбінацій?
7. Яка система називається лінійною, лінійною однорідною, лінійною неоднорядною?
8. Яка сукупності функцій називається лінійно незалежною?
9. Який вигляд має визначник Вронського?
10. Сформулюйте необхідну умову лінійної залежності n сукупностей функцій.
11. Сформулюйте необхідну умову лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь.
12. Який вигляд має формула Остроградського-Ліувілля?
13. Який вигляд має фундаментальна матриця?
14. Сформулюйте означення нормальної фундаментальної матриці.
15. Який оператор називається еволюційним?
16. Охарактеризуйте метод варіації довільних сталих для диференціальної системи.
17. Охарактеризуйте метод Ейлера для диференціальної системи.
18. Як побудувати характеристичне рівняння системи?

Завдання до теми 8

1. Розв'язати систему: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + xz, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{2y}{x^3} + \frac{z}{x}. \end{cases}$
2. Розв'язати систему: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$
3. Розв'язати систему: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \frac{dz}{dx} + y - z = \frac{3}{2}x^2. \end{cases}$
4. Розв'язати систему: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t\,, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t\,. \end{cases}$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Ф

Х

Ч

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Богданський Ю. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Київ : Видавництво «Політехніка», 2011. 214 с.
2. Богданський Ю. В. Диференціальні рівняння : конспект лекцій, частина 1. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2019. 74 с.
3. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
4. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник. Тернопіль : Навчальна книга, 2014р. 360 с.
5. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Запоріжжя : Запорізький національний технічний університет, 2018. 102 с.
6. Перестюк М. О., Капустян О. В., Фекета П. В., Задоянчук Н. В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. Київ, 2015. 138 с.
7. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навчальний посібник. Київ : Либідь, 2004. 192 с.
8. Рего В. Л., Варга Я. В. Диференційні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування, частина 1. Ужгород : Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», 2021. 124 с.
9. Рего В. Л., Варга Я. В. Диференційні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, частина 2. Ужгород : Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», 2022. 124 с.
10. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 454 с.
11. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння : підручник. Київ : Либідь, 2003. 600 с.
12. Сясєв А. В. Диференційні рівняння : навчальний посібник. Дніпропетровськ : Видавництво Дніпропетровського національного університету, 2007. 356 с.
13. Хусаінов Д. Я., Скибицький Н. Диференційні рівняння. Дослідження зв'язків між функціями та їхніми похідними. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2019. 157 с.
14. Хусаінов Д. Я., Шатирко А. В. Диференціальні рівняння. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2023. 410 с.
15. Швець О. Ю. Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2022. 189 с.
16. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння : навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей вищих начальних закладів. Київ : Техніка, 2003. 368 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Рего В. Л., Варга Я. В. Диференційні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування, частина 1. Ужгород : Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», 2021. 124 с.
2. Рего В. Л., Варга Я. В. Диференційні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, частина 2. Ужгород : Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», 2022. 124 с.
3. Хусаінов Д. Я., Скибицький Н. Диференційні рівняння. Дослідження зв'язків між функціями та їхніми похідними. Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2019. 157 с.
4. Хусаінов Д. Я., Шатирко А. В. Диференціальні рівняння. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2023. 410 с.
5. Швець О. Ю. Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2022. 189 с.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Гоменюк Сергій Іванович
Гребенюк Сергій Миколайович
Панасенко Євген Валерійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності Комп’ютерні науки
освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки»

Рецензент *А.О. Лісняк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Є.В. Панасенко*