

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння, що містить змінну в показнику степеня, називається **показниковим рівнянням**.

Найпростішим показниковим рівнянням називається рівняння виду

$$\text{Тип 1. } a^x = b.$$

$$\begin{aligned} b \leq 0 &\Rightarrow x \in \emptyset \\ b > 0 &\Rightarrow x = \log_a b \end{aligned}$$

№ 1. Знайти корені рівняння $5^x = 25$.

$$\text{Тип 2. } a^{f(x)} = b$$

$$\begin{aligned} b \leq 0 &\Rightarrow x \in \emptyset \\ b > 0 &\Rightarrow f(x) = \log_a b \end{aligned}$$

$$\text{Тип 3. } a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

Тип 4. $\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)}$ – **степенєво-показникове рівняння**

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 1 &\Rightarrow \forall f(x), g(x). \\ \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1 &\Rightarrow f(x) = g(x). \\ \varphi(x) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тобто

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 1, \\ x \in R; \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \\ \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

№ 2. Розв'язати рівняння $x^{2x+1} = x^{3x-4}$.

Розв'язання показникових рівнянь зведенням до спільної основи

Якщо ліва та права частини заданого показникового рівняння містять лише добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул для степенів звести обидві частини рівняння до однієї основи, тобто до рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

№ 3. Розв'язати рівняння $2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}$.

Розв'язання показникових рівнянь винесенням спільного множника

Якщо показникове рівняння містить вирази виду a^{kx+b} , причому показники степенів відрізняються лише вільними членами, то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a .

№ 4. Знайти корені рівняння $5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$.

Зведення показникових рівнянь до квадратних

До показникових рівнянь, що можна звести до квадратного, відносяться рівняння двох наступних типів.

Показникові рівняння виду

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0,$$

де $A \neq 0$, B, C – деякі числа, $a > 0$, $a \neq 1$, заміною $a^x = t$, $t > 0$ зводяться до квадратних рівнянь.

Зауваження. Після того, як буде виконано заміну, обов'язково на нову змінну потрібно накладати умову додатності, оскільки показникова функція приймає лише додатні значення (див. область значень показникової функції).

№ 5. Розв'язати рівняння $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 10$.

До *квадратних* також можна звести показникові рівняння, що містять степені з однаковими основами, але протилежними показниками степенів, тобто рівняння виду

$$A \cdot a^{f(x)} + B \cdot a^{-f(x)} + C = 0,$$

де A, B, a – деякі ненульові числа, причому $a \neq 1$, C – довільне дійсне число. Для цього обидві частини рівняння потрібно помножити на степінь з додатним показником, тобто на $a^{f(x)} > 0$:

$$A \cdot (a^{f(x)})^2 + B + C \cdot a^{f(x)} = 0.$$

Далі заміною змінних $a^{f(x)} = t$, $t > 0$ зводимо це рівняння до квадратного

$$At^2 + Ct + B = 0.$$

№ 6. Розв'язати рівняння $3^x + 3^{2-x} = 10$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} = 10.$$

Однорідні показникові рівняння

Однорідним рівнянням першого степеня називається рівняння виду

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}.$$

Діленням обох частин цього рівняння на $a^{f(x)} > 0$ (або на $b^{f(x)} > 0$), зводимо його до показникового рівняння виду:

$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0.$$

№ 7. Розв'язати рівняння $2^{x+1} = 3^{x+1}$.

Однорідним рівнянням другого степеня називається рівняння виду

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0.$$

Таке рівняння розв'язується за наступною схемою.

1) Ділимо обидві частини рівняння або на $b^{2f(x)} > 0$ (або на $a^{2f(x)} > 0$), в результаті отримуємо рівняння

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0, \quad | : b^{2f(x)} > 0$$

$$A \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + B \cdot \frac{a^{f(x)} \cdot b^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + C = 0,$$

$$A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0.$$

2) Заміною $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t, t > 0$ останнє рівняння зводиться до квадратного:

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

№ 8. Розв'язати рівняння $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.