ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння, що містить змінну в показнику степеня, називається ***показниковим рівнянням***.

Найпростішим показниковим рівнянням називається рівняння виду

$$\textit{Тип 1}.\ \boxed{a^x = b}.$$

$$b>0 \quad \text{або} \quad b\le 0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$x=\log_a b \qquad\qquad x\in\varnothing$$

№ 1. Знайти корені рівняння

$$5^x = 25. \qquad \text{ОДЗ: } x\in R.$$

Розв'язання. Оскільки для даного рівняння $b=25>0$,
то шуканий розв'язок

$$x=\log_5 25 \Rightarrow x=2.$$

Відповідь. $x=2$.

$$\textit{Тип 2}.\ \boxed{a^{f(x)} = b}$$

$$b>0 \quad \text{або} \quad b\le 0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$f(x)=\log_a b \qquad\qquad x\in\varnothing$$

№ 2. Розв'язати рівняння $0{,}25^{2x-6}=16$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Права частина є додатною, тому переходимо до рівносильного рівняння

$$2x-6=\log_{0,25}16,$$
$$2x-6=-2,$$
$$2x=4,\ |:2$$
$$x=2.$$

Відповідь. $x=2$.

$$\textit{Тип 3}.\ \boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)=g(x)$$

№ 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}^{7x+11}=\sqrt{3}^{6x-8}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Рівні основи, тому рівні й степені:

$$7x+11=6x-8,$$
$$x=-19.$$

Відповідь. $x=-19$.

Тип 4. ***Степенево-показникове рівняння***

$$\boxed{\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)}}$$

$$\varphi(x)=1 \quad \text{або} \quad \varphi(x)>0,\ \varphi(x)\ne 1 \quad \text{або} \quad \varphi(x)=0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$f(x),\ g(x)\in \text{ОДЗ} \qquad f(x)=g(x) \qquad \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Тобто

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) = 1, \\ x \in \text{ОДЗ}; \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

№ 4. Розв'язати рівняння $x^{2x+1} = x^{3x-4}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Дане рівняння еквівалентне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ 2x+1 > 0, \\ 3x-4 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2x+1 = 3x-4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ x \in \text{ОДЗ}, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ x > -1/2, \\ x > 4/3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \cup (1;+\infty), \\ -x = -5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ x \in R, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = 5, \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Відповідь. $x_1 = 1,\ x_2 = 5$.

Розв'язання показникових рівнянь зведенням до спільної основи

Якщо ліва та права частини заданого показникового рівняння містять лише добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул для степенів звести обидві частини рівняння до однієї основи, тобто до рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

№ 5. Розв'язати рівняння $2^{x-3} \cdot 4^x = \dfrac{\sqrt{2}}{16^x}$.

Розв'язання. Зведемо ліву та праву частини заданого рівняння (тобто кожний вираз у цих частинах) до основи 2:

ОДЗ: $\underset{>0 \forall x}{16^x} \neq 0 \Rightarrow x \in R$

$$2^{x-3} \cdot \left(2^2\right)^x = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^4\right)^x}.$$

Перетворимо отриманий вираз за властивостями степенів:

$$2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}},$$

$$2^{x-3+2x} = 2^{\frac{1}{2}-4x},$$
$$2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2}-4x}.$$

Прирівнюючи степені, будемо мати:

$$3x-3 = \frac{1}{2} - 4x,$$
$$7x = \frac{7}{2},$$
$$x = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання показникових рівнянь винесенням спільного множника

Якщо показникове рівняння містить вирази виду a^{kx+b}, причому показники степенів відрізняються лише вільними членами, то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.

№ 6. Знайти корені рівняння $5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$.

Розв'язання. Виносимо 5 у найменшому степені, тобто в степеню $(x-2)$. При винесенні спільного множника потрібно кожний доданок в лівій частині поділити на цей множник: ОДЗ: $x \in R$

$$5^{x-2} \cdot \left(5^{x-(x-2)} - 2\right) = 23,$$
$$5^{x-2} \cdot \left(5^{x-x+2} - 2\right) = 23,$$
$$5^{x-2} \cdot (25-2) = 23,$$
$$5^{x-2} \cdot 23 = 23, \Big| : 23$$
$$5^{x-2} = 1,$$
$$x-2 = \log_5 1,$$
$$x-2 = 0,$$
$$x = 2.$$

Зауваження 1. Рівняння $5^{x-2} = 1$ можна було б звести й до показникового рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, врахувавши, що $1 = a^0$, тобто

$$5^{x-2} = 1 \Rightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Відповідь. $x = 2$.

Зведення показникових рівнянь до квадратних

До показникових рівнянь, що можна звести до квадратного, відносяться рівняння двох наступних типів.

Показникові рівняння виду

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0,$$

де $A \neq 0, B, C$ – деякі числа, $a > 0, a \neq 1$, заміною $a^x = t, t > 0$ зводяться до квадратних рівнянь:

$$A\cdot\left(a^x\right)^2+B\cdot a^x+C=0\Rightarrow At^2+Bt+C=0.$$

Зауваження 2. Після того, як буде виконано заміну, обов'язково на нову змінну потрібно накладати умову додатності, оскільки показникова функція приймає лише додатні значення (див. область значень показникової функції).

№ 7. Розв'язати рівняння $4^{x+1}-3\cdot 2^x=10$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Зведемо рівняння до однієї основи, а саме 2, використовуючи властивості степенів:

$$4^x\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0,$$
$$4\cdot\left(2^2\right)^x-3\cdot 2^x-10=0,$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-10=0.$$

Зробимо заміну

$$2^x=t,\ t>0,$$

тоді в результаті дістанемо:

$$4t^2\overset{+3}{-}3t\overset{\times(-40)}{-}10=0. \qquad \text{ОДЗ: } t\in(0;+\infty)$$

Розв'язок отриманого квадратного рівняння знайдемо за допомогою метода перекидки коефіцієнта:

$$t_1=\frac{8}{4}=2,\ t_2=-\frac{5}{4}<0\notin\text{ОДЗ}.$$

Після оберненої заміни приходимо до найпростішого показникового рівняння:

$$2^x=2,$$
$$2^x=2^1\Rightarrow x=1.$$

Відповідь. $x=1$.

До *квадратних* також можна звести показникові рівняння, що містять степені з однаковими основами, але протилежними показниками степенів, тобто рівняння виду

$$A\cdot a^{f(x)}+B\cdot a^{-f(x)}+C=0,$$

де A, B, a – деякі ненульові числа, причому $a\neq 1$, C – довільне дійсне число. Для цього обидві частини рівняння потрібно помножити на степінь з додатним показником, тобто на $a^{f(x)}>0$:

$$A\cdot\left(a^{f(x)}\right)^2+B+C\cdot a^{f(x)}=0.$$

Далі заміною змінних $a^{f(x)}=t,\ t>0$ зводимо це рівняння до квадратного

$$At^2+Ct+B=0.$$

№ 8. Розв'язати рівняння $3^x+3^{2-x}=10$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$3^x+3^2\cdot 3^{-x}=10.$$

Помножимо почленно обидві частини останнього рівняння на $3^x>0$, в результаті дістанемо рівняння

$$\left(3^x\right)^2+9=10\cdot 3^x\Rightarrow\left(3^x\right)^2-10\cdot 3^x+9=0.$$

Робимо заміну

$$3^x = t,\ t > 0,$$

в результаті отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \qquad \text{ОДЗ: } t \in (0; +\infty)$$

корні якого, згідно з теоремою Вієта, $t_1 = 9, t_2 = 1$; обидва значення належать ОДЗ щодо змінної t.

Повертаючись до початкової змінної x, отримуємо найпростіші показникові рівняння

$$\begin{array}{ccc} 3^x = 9, & \text{або} & 3^x = 1, \\ 3^x = 3^2, & & 3^x = 3^0, \\ x = 2; & & x = 0. \end{array}$$

Відповідь. $x_1 = 2, x_2 = 0$.

Однорідні показникові рівняння

Однорідним показниковим рівнянням першого степеня називається рівняння виду

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}.$$

Діленням обох частин цього рівняння на $a^{f(x)} > 0$ (або на $b^{f(x)} > 0$), зводимо його до показникового рівняння виду:

$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Rightarrow\ f(x) = 0.$$

№ 9. Розв'язати рівняння $2^{x+1} = 3^{x+1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Поділимо обидві частини заданого рівняння на $3^{x+1} > 0$, в результаті дістанемо

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = 1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Відповідь. $x = -1$.

Однорідним показниковим рівнянням другого степеня називається рівняння виду

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0.$$

Таке рівняння розв'язується за наступною схемою.

1) Ділимо обидві частини рівняння або на $b^{2f(x)} > 0$ (або на $a^{2f(x)} > 0$), в результаті отримуємо рівняння

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0, \ \Big| : b^{2f(x)} > 0$$

$$A \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + B \cdot \frac{a^{f(x)} \cdot b^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + C = 0,$$

$$A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0.$$

2) Заміною $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t, t > 0$ останнє рівняння зводиться до квадратного:

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

№ 10. Розв'язати рівняння $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та запишемо їх у вигляді:

$$\left(2^2\right)^x + (2 \cdot 3)^x - 2 \cdot \left(3^2\right)^x = 0,$$

$$\left(2^x\right)^2 + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot \left(3^x\right)^2 = 0, \Big| : 3^{2x} > 0$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Уведемо заміну

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0,$$

тоді отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0, \qquad \text{ОДЗ: } t \in (0; +\infty)$$

корені якого за теоремою Вієта

$$t_1 = -2 < 0 \notin \text{ОДЗ}, t_2 = 1.$$

Після оберненої заміни маємо найпростіше показникове рівняння

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$$

Відповідь. $x = 0$.

№11. Розв'язати рівняння:

1) $8^x - 5^x = 39$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Перетворимо праву частину заданого показникового рівняння:

$$8^x - 5^x = 3 \cdot 13,$$

$$8^x - 5^x = (8-5) \cdot (8+5).$$

До правої частини застосовуємо формулу скороченого множення «різниця квадратів», отримаємо:

$$8^x - 5^x = 8^2 - 5^2.$$

Порівнюючи ліву та праву частини, робимо висновок, що

$$x = 2.$$

Відповідь. $x = 2$.

2) $5^{4^{\sqrt{2}^x}} = 25$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Зводимо ліву та праву частини до однієї основи 5:

$$5^{4^{\sqrt{2}^x}} = 5^2,$$

$$4^{\sqrt{2}^x} = 2.$$

Далі зводимо в лівій та правій частині отриманого рівняння до основи 2:

$$\left(2^2\right)^{\sqrt{2}^x}=2^1,$$

$$2^{2\sqrt{2}^x}=2^1,$$

$$2\sqrt{2}^x=1,$$

$$2^1\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^0,$$

$$2^1\cdot 2^{\frac{x}{2}}=2^0,$$

$$2^{1+\frac{x}{2}}=2^0,$$

$$1+\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=-1 \text{ або } x=-2.$$

Відповідь. $x=-2$.

3) $3^x+9^x+27^x=14$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Зробимо заміну:

$$3^x=t, t>0.$$

Тоді рівняння приймає вигляд:

$$t+t^2+t^3=14 \qquad \text{ОДЗ: } t\in(0;+\infty)$$

або

$$t^3+t^2+t-14=0.$$

Цілі розв'язки цього рівняння будемо шукати серед дільників вільного коефіцієнта:

$$14:\pm1,\pm2,\pm7,\pm14.$$

Застосуємо схему Горнера:

	1	1	1	– 14	
1	1	2	3	$-11\neq0$	– не є коренем
– 1	1	0	1	$-15\neq0$	– не є коренем
2	1	3	7	0	$\Rightarrow t_1=2$

Тоді

$$t^3+t^2+t-14=(t-2)\left(t^2+3t+7\right).$$

Знайдемо корені квадратного рівняння $t^2+3t+7=0$:

$$D=3^2-4\cdot1\cdot7=9-28=-19<0.$$

Отже, рівняння має єдиний дійсний корінь $\Rightarrow t=2$.

Обернена заміна:

$$3^x=2,$$
$$x=\log_3 2.$$

Відповідь. $x=\log_3 2$.

4) $5^{7^x}=7^{5^x}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Прологарифмуємо ліву та праву частини заданого рівняння:

$$\ln 5^{7^x}=\ln 7^{5^x}.$$

Далі робимо перетворення, використовуючи властивості логарифмів:

$$7^x \ln 5 = 5^x \ln 7,$$
$$\ln\left(7^x \cdot \ln 5\right) = \ln\left(5^x \cdot \ln 7\right),$$
$$\ln 7^x + \ln\ln 5 = \ln 5^x + \ln\ln 7,$$
$$x\ln 7 + \ln\ln 5 = x\ln 5 + \ln\ln 7,$$
$$x\ln 7 - x\ln 5 = \ln\ln 7 - \ln\ln 5,$$
$$x(\ln 7 - \ln 5) = \ln\ln 7 - \ln\ln 5.$$

Отже,

$$x = \frac{\ln\ln 7 - \ln\ln 5}{\ln 7 - \ln 5}.$$

Відповідь. $x = \frac{\ln\ln 7 - \ln\ln 5}{\ln 7 - \ln 5}$.