

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОПОЛОГІЙ НА СКІНЧЕННИХ МНОЖИНАХ

Скрябіна А.В., Стеганцева П.Г.

Вступ.

На сучасному етапі розвитку математики топологія є надзвичайно універсальним інструментом для досліджень, топологічна структура часто є базою, на якій будуються інші математичні структури. Топологічні простори та їх неперервні відображення з'являються в багатьох розділах математики.

При дослідженні топологій на скінченній множині дуже важливу роль відіграють T_0 -топології. Це пояснюється тим фактом, що T_1 - та T_2 -топології на скінченній множині можуть бути лише дискретними, а серед T_0 -топологій є цікаві нетривіальні приклади. Крім цього, для розв'язання задачі підрахунку всіх можливих топологій на скінченній множині достатньо знайти число всіх T_0 -топологій на цій множині. Зі статті J.W. Evans., F. Harary, M.S. Lynn відома формула про зв'язок числа $T(n)$ усіх топологій на n -елементній множині та числа $\tilde{T}(m)$ усіх T_0 -топологій на її m -елементних підмножинах:

$$T(n) = \sum_{m=1}^n S(n, m) \cdot \tilde{T}(m),$$

де $S(n, m)$ – числа Стірлінга другого роду.

Для вивчення топологій на скінченній множині їх моделювали, використовуючи різні математичні об'єкти (графи, відношення, булеві функції та інші). Топологічні простори на скінченній множині точок можуть бути описані та досліджені комбінаторними методами завдяки їх тісному зв'язку зі скінченними частковими порядками. Ця взаємодія комбінаторної та топологічної структур на скінченній множині робить скінченні топології важливими математичними об'єктами.

Топології на скінченній множині відіграють ключову роль в теорії розпізнавання образів, теорії молекулярних структур, геометріях на скінченних множинах.

Огляд методів дослідження топологій на скінченній множині

Топологічна структура на n -елементній множині є дискретною. Тому при її дослідженні на перший план висувуються задачі підрахунку та перерахування топологій, тобто задачі дискретної математики.

Задача підрахунку топологій на скінченній множині на даний момент залишається нерозв'язаною, тому інтерес до неї зберігається, з'являються публікації дослідників з різних країн з новими результатами. Цей інтерес підсилюється тим, що при дослідженні топологій на скінчених множинах використовуються різні математичні структури. Топології моделюються за допомогою графів, матриць, булевих функцій, упорядкованих наборів цілих чисел. Широко застосовуються методи алгебраїчної топології, комбінаторного аналізу, теорії груп.

а) Між множиною топологій на скінченній множині і множиною всіх передпорядків на цій множині (тобто рефлексивних та транзитивних відношень) існує взаємнооднозначна відповідність. Її існування зводить задачі підрахунку або перерахування елементів однієї з цих множин до аналогічних задач для іншої множини.

Для застосувань топологій на скінчених множинах важливу роль відіграє задача перерахування гомотопічних типів скінчених множин, а також використання інших понять алгебраїчної топології.

Відношення передпорядку ρ на скінченній множині X з топологією τ можна ввести різними способами. Наприклад, $(x, y) \in \rho$ тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита множина, що містить x , містить також і y , тобто $x \in \overline{\{y\}}$, де $\overline{\{y\}}$ є замиканням множини $\{y\}$ відносно топології τ . Обернено, для передпорядку ρ на скінченній множині X сукупність $\tau = \{U \subseteq X \mid (\forall x \in U) \rho(x) \subseteq U\}$, де $\rho(x) = \{y \mid (x, y) \in \rho\}$, є топологією на X . Такі передпорядок та топологію називають відповідними. В роботі зазначається, що для класифікації скінчених топологічних просторів з точністю до гомотопічної еквівалентності достатньо класифікувати T_0 -простори з точністю до гомотопічної еквівалентності.

Отже, розглянемо T_0 -топологію на скінченній множині X . Позначимо символом M_x мінімальний окіл точки x з множини X . Сукупність мінімальних околів всіх елементів множини X утворює мінімальну базу T_0 -топології. Наведемо ще одне означення порядку на скінченній множині з топологією τ , з використанням поняття мінімальних околів: для будь яких $x, y \in X$ $x \leq y$ якщо $M_x \subseteq M_y$.

При цьому топологія τ є T_0 -топологією на X якщо з $x \leq y$ і $y \leq x$ випливає $x = y$. Це означає, що відношення $x \leq y$ на X є рефлексивним, транзитивним та антисиметричним, тобто є відношенням часткового порядку.

Означення зв'язності скінченного топологічного простору таке саме як і для будь-якого топологічного простору. Наприклад, мінімальний окіл M_x будь-якої точки x є зв'язним.

Властивості неперервних відображень топологічних просторів та їх гомеоморфізмів також можна сформулювати в термінах частково впорядкованих множин. Наприклад, має місце твердження:

Якщо X, Y – скінченні, то функція $f : X \rightarrow Y$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли вона зберігає порядок, тобто з $x \leq y$ в X випливає $f(x) \leq f(y)$ в Y .

Означення гомотопії, гомотопічно еквівалентних просторів, стягуваних топологічних просторів переноситься з алгебраїчної топології без змін. Було показано, що

Будь-який скінченний симпліціальний комплекс слабо гомотопічно еквівалентний скінченному топологічному простору.

Отже, задача перерахування гомотопічних типів скінченних топологічних просторів настільки ж важлива, як і задача перерахування гомотопічних типів скінченних симпліціальних комплексів. Вказаний факт гомотопічної еквівалентності перетворює скінченні топологічні простори в інструмент для багатьох сучасних застосувань. Зокрема, вказані задачі тісно пов'язані з цифровою обробкою зображень на основі скінченних наборів спостережень, тобто намаганням зрозуміти вміст зображення на основі поняття близькості точок.

б) Моделювання топологій на скінченних множинах за допомогою булевих функцій виявилось достатньо зручним для їх описання та дослідження, оскільки кожному таку топологію можна задати кон'юнктивною нормальною формою спеціального виду і використовувати результати досліджень нормальних форм булевих функцій. Описано T_0 -топології саме за допомогою 2-КНФ булевих функцій. Використовуючи цю модель, досліджено взаємно двоїсті та самодвоїсті T_0 -топології, а також підраховано кількості T_0 -топологій з вагою $25 \cdot 2^{n-6}$.

в) Для досліджень топологій у було введено поняття вектора топології – впорядкованого набору цілих невід'ємних чисел, що визначають мінімальні околиці елементів заданої скінченної множини. За допомогою цієї моделі вдалось повністю розв'язати задачі дослідження структури топологій з більшим за 2^{n-1} числом елементів, які часто називають близькими до дискретної топологіями. Вектор топології було використано також для дослідження топологій з не більшим за 2^{n-1} числом елементів.

В цій роботі ми продовжимо дослідження топологій на скінченній множині, описуючи їх вектором топології.