

ТЕМА 3. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ВИБОРУ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ Й РИЗИКУ

1. Класифікація критеріїв індивідуального вибору в умовах невизначеності

2. Максимінний критерій крайнього песимізму Вальда
3. Мінімаксний критерій мінімального ризику Севіджа
4. Критерій крайнього оптимізму
5. Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа
6. Похідний критерій Гурвіца, збалансована стратегія вибору

3.1. Класифікація критеріїв індивідуального вибору в умовах невизначеності

Будь-яке рішення в умовах неповноти інформації й невизначеності, приймається відповідно з деякою оціночною функцією (функцією переваги ОПР). Вибір такої функції переваги повинний здійснюватись з урахуванням кількісних характеристик ситуації й схильності ОПР до ризику.

На даний час найбільш широкого застосування набули наступні класичні критерії прийняття рішень:

- максимінний критерій Вальда – це критерій крайнього песимізму, що передбачає обережну стратегію поведінки. Вона виходить з того, що якщо найгірший варіант розвитку подій може статись, то він станеться;
- мінімаксний критерій Севіджа – критерій відносного песимізму;
- критерій оптимізму – відповідає оптимістичній стратегії вибору;
- критерій максимального середнього виграшу Байєса-Лапласа – це стратегія раціонального вибору.

Різне поєднання класичних критеріїв призводить до похідних. Найбільш розповсюдженим похідним критерієм є критерій Гурвіца, що відповідає збалансованій стратегії вибору.

Якщо існує така можливість, то всі перераховані вище критерії застосовуються до вивчаємої проблемної ситуації по черзі. Остаточне рішення в умовах невизначеності приймається за більшістю їхніх оцінок. Це дозволяє знизити вплив суб'єктивних факторів.

Нехай оптимальне рішення y^* визначається за допомогою коефіцієнта важливості рішень β . Тоді, загальне правило вибору записується, як:

$$y^* = \underset{\beta_i}{\text{extremum}} (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \quad (3.1)$$

Якщо коефіцієнт важливості рішень β повинний максимізуватись (кращому рішенню відповідає більше значення β), то правило вибору (3.1) приймає вигляд:

$$y^* = \max_{\beta_i} (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \quad (3.2)$$

І навпаки, якщо коефіцієнт важливості рішень β повинний мінімізуватись (кращому рішенню відповідає менше значення β), то правило вибору (3.1) має вигляд:

$$y^* = \min_{\beta_i} (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \quad (3.3)$$

Ці правила (3.2) та (3.3) є основою класичних й похідних критеріїв прийняття рішень. Розглянемо їх більш детально.

3.2. Максимінний критерій крайнього песимізму Вальда

Максимінний критерій Вальда (крайнього песимізму) застосовується, коли:

- про можливе виникнення тієї чи іншої ситуації нічого не відомо, або даний метод не потребує знання ймовірностей настання тієї чи іншої події;
- необхідно враховувати можливості настання різних ситуацій;
- рішення приймається й виконується лише 1 раз;
- необхідно виключити будь-який ризик. Тобто, ні за яких умов, обране рішення y^* не повинно бути гіршим, ніж рішення з множини Парето.

Оскільки критерій крайнього песимізму Вальда заснований на передумові про те, що якщо найгірша ситуація може статися, то вона станеться, то коефіцієнт важливості i -го рішення β_i є найгіршим значенням функції переваги для всіх можливих ситуацій.

1. Якщо функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу, то коефіцієнт важливості рішень обчислюється за правилом (3.4):

$$\beta_i = \min_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

Тобто, для i -го рішення по всіх можливих j -их ситуаціях обирається та ситуація, яка має найменше значення функції переваги. Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись за правилом (3.5):

$$y^* = \max_i \left(\min_j f_{ij} \right) \quad (3.5)$$

Тобто, обирається найкраще рішення з усіх найгірших можливих варіантів розвитку подій.

Правило вибору оптимального рішення: матриця ситуацій доповнюється двома стовпцями: перший стовпець заповнюється найменшими значеннями

функції переваги f_{ij} для кожного рядка; у другому стовпці обирається варіант рішення, який має найбільше значення першого стовпця.

Приклад 1. Нехай, матриця рішень має такий вигляд:

Рішення	Ситуації		$\min_j f_{ij}$	$y^* = \max_i \left(\min_j f_{ij} \right)$
	S1, тис. у.о.	S2, тис. у.о.	j	
У ₁	1	100	1	
У ₂	1,1	1,1	1,1	1,1*

Таким чином, $y^* = U_2$ є оптимальним рішенням за критерієм крайнього песимізму.

Однак, якщо ситуація S2 виникає частіше, ніж S1 й оптимальне рішення реалізується не один раз, а багато разів, то найкращим рішенням буде У₁. Тобто, ігнорування ймовірностей настання різних ситуацій, є недоліком даного методу прийняття рішень.

Приклад 2. Необхідно прийняти рішення щодо обсягу інвестицій в новий проект (великі, середні, малі). Очікуваний прибуток залежить від майбутнього попиту (високий, середній, низький), ймовірності яких є невідомими.

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\min_j f_{ij}$	$y^* = \max_i \left(\min_j f_{ij} \right)$
Великі	500	200	-100	-100	
Середні	400	250	50	50	
Малі	150	150	150	150	150*

Отже, оптимальним рішенням є малі інвестиції. Саме такі інвестиції забезпечують найвищий рівень гарантованого прибутку за умови настання будь-якої несприятливої ситуації.

2. Якщо функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає меншому числу, то коефіцієнт важливості рішень обчислюється за правилом (3.6):

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

Тоді, оптимальне рішення буде визначатись за формулою:

$$y^* = \min_i \left(\max_j f_{ij} \right) \quad (3.7)$$

Приклад 3. Нехай матриця рішень має вигляд (Приклад №2 з множини Парето, Тема №2):

Рішення	Ситуації					$\max_j f_{ij}$	$y^* = \min_i \left(\max_j f_{ij} \right)$
	S1	S2	S3	S4	S5		
Y ₁	5	3	6	3	10	10	
Y ₃	10	2	3	2	9	10	
Y ₅	1	5	2	5	2	5	5*
Y ₁₀	11	1	5	1	4	11	
Y ₁₆	3	8	1	8	1	8	

Таким чином, $y^* = Y_5$ є оптимальним рішенням.

3.3. Мінімаксний критерій мінімального ризику Севіджа

До мінімаксного критерію прийняття рішень Севіджа, висувуються ті ж самі вимоги, що й до критерію Вальда. Причому, найгіршим рішенням вважається рішення з максимальним ризиком, а не мінімальним виграшем.

Нехай, функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу.

Тоді, введемо умовні позначення. Нехай, ризик j -ої ситуації для кожного i -ого рішення описується матрицею різниць A_{ij} й обчислюється як:

$$A_{ij} = \max_i f_{ij} - f_{ij} \quad (3.8)$$

Матриця різниць показує величину втраченого виграшу, якщо в j -ій ситуації замість найкращого можливого рішення, обирається i -е рішення.

Коефіцієнт важливості рішень буде розраховуватися як:

$$\beta_i = \max_j (A_{ij}) \quad (3.9)$$

Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись, як:

$$y^* = \min_i \left(\max_j (A_{ij}) \right) \quad (3.10)$$

Тобто, до матриці різниць був застосований критерій Вальда.

Правило вибору оптимального рішення:

- за кожним стовпцем матриці рішень (за кожною ситуацією) знаходиться найбільше значення;
- від знайдених найбільших значень віднімаються значення функції переваги f_{ij} відповідних стовпців. Отримуємо матрицю різниць A_{ij} (матрицю ризиків);
- для кожного рядка матриці різниць A_{ij} знаходимо максимальні значення й обираємо найменше з них.

Приклад 4. За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції. Доповнимо матрицю виграшів додатковим рядком, в якому обчислимо максимальний прибуток для кожної ситуації (високого, середнього та низького попиту).

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.
Великі	500	200	-100
Середні	400	250	50
Малі	150	150	150
Максимальний прибуток	500	250	150

Далі обчислюємо матрицю різниць A_{ij} .

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\max_j (A_{ij})$	$\min_i \left(\max_j (A_{ij}) \right)$
Великі	0	50	250	250	
Середні	100	0	100	100	100*
Малі	350	100	0	350	

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції. Саме такі інвестиції мінімізують ризик недоотримання максимального прибутку, за умови невизначеності попиту.

3.4. Критерій крайнього оптимізму

Критерій крайнього оптимізму зосереджується на найкращому з найкращих результатів. Це ризикований підхід, який ігнорує можливі збитки. Він підходить для тих, хто готовий ризикувати заради великого виграшу.

Нехай, функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу. Тоді, коефіцієнт важливості рішень розраховується як:

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.11)$$

Правило вибору оптимального рішення буде виглядати так:

$$y^* = \max_i \left(\max_j f_{ij} \right) \quad (3.12)$$

Якщо вимірювання переваг f_{ij} виконується на основі ранжувань (кращому рішенню відповідає менший ранг), то правило вибору буде мати вигляд:

$$y^* = \min_i \left(\min_j f_{ij} \right) \quad (3.13)$$

Даний метод також застосовується в умовах невизначеності, коли про ймовірності настання ситуацій нічого не відомо.

Приклад 5. За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції. Доповнимо матрицю виграшів двома стовпцями:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\max_j f_{ij}$	$\max_i \left(\max_j f_{ij} \right)$
Великі	500	200	-100	500	500*
Середні	400	250	50	400	
Малі	150	150	150	150	

Отже, оптимальним рішенням є великі інвестиції. Оскільки саме вони, за сприятливих умов можуть принести найбільший прибуток.

3.5. Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа

Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа відповідає стратегії раціонального вибору. Для нього є характерними такі відмінні риси:

- вимагає знань про ймовірності настання тієї чи іншої події;
- рішення приймаються й виконуються багаторазово;
- за невеликої кількості впроваджень цих рішень, допускається певний ризик, а при нескінченній кількості впроваджень – будь-який ризик виключається.

Критерій Байєса-Лапласа є більш оптимістичним, ніж критерій Вальда, але вимагає більшого обсягу інформації (меншої невизначеності).

Функція переваги вимірюється тільки за **кількісною шкалою**. Коефіцієнти важливості рішень представляють собою середній виграш, який можна отримати від реалізації кожного рішення з урахуванням ймовірності настання кожної ситуації:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n p_j f_{ij}, \text{ для кожного } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.14)$$

Де p_j – ймовірність настання j -ої ситуації, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$;

n – кількість можливих ситуацій з заданими ймовірностями;

f_{ij} – значення функції переваги, що є оцінкою i -го рішення в j -ій ситуації;

m – кількість можливих рішень, з яких слід обрати оптимальне.

Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись, як:

$$Y^* = \max_i \beta_i \quad (3.15)$$

Правило вибору оптимального рішення:

- матриця значень функції переваги f_{ij} доповнюється рядком, в якому зазначаються ймовірності настання кожної події;
- матриця значень функції переваги f_{ij} доповнюється стовпцем, в якому обчислюється середній очікуваний виграш за формулою (3.14);
- зі стовпця середнього очікуваного виграшу обирається рішення з максимальним значенням β_i .

Приклад 6. За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції, коли ймовірності настання кожної події є відомими. Доповнимо матрицю виграшів двома стовпцями:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	β_i	$\max_i \beta_i$
Великі	500	200	-100	245	
Середні	400	250	50	260	260*
Малі	150	150	150	150	
Ймовірності подій	0,4	0,35	0,25		

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції. Оскільки саме вони, за умови багаторазової реалізації проекту зможуть принести найбільший середній прибуток.

3.6. Похідний критерій Гурвіца, збалансована стратегія вибору

Критерій Гурвіца є різновидом стратегії прийняття раціональних рішень (збалансована позиція). Функція переваги знаходиться між точками зору крайнього оптимізму й крайнього песимізму. Застосування даного критерію не вимагає знання ймовірностей ситуацій.

Критерій може застосовуватись у випадках:

- про ймовірність настання ситуацій нічого невідомо;
- необхідно враховувати можливі варіанти виникнення ситуацій;
- буде реалізовано невелику кількість рішень;
- допускається певний ризик.

Правило вибору в кількісній шкалі:

$$Y_{HW}^* = \max_i [h \times \min_j f_{ij} + (1 - h) \times \max_j f_{ij}] \quad (3.16)$$

Де f_{ij} – значення функції переваги при оцінці i -го рішення в j -й ситуації;
 h – коефіцієнт песимізму (ваговий коефіцієнт), який змінюється в діапазоні $0 \leq h \leq 1$.

Якщо $h = 0$, то рішення приймається за критерієм оптимізму;

Якщо $h = 1$ – за критерієм Вальда (критерій песимізму).

Той, хто приймає рішення, обирає коефіцієнт h на свій розсуд.

Приклад 7. За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції, коли коефіцієнт $h = 0,5$:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\min_j f_{ij}$	$\max_j f_{ij}$	Y_{HW}^*
Великі	500	200	-100	-100	500	200
Середні	400	250	50	50	400	225*
Малі	150	150	150	150	150	150

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції.

У деяких випадках, критерій Гурвіца може призводити до завідомо невірних рішень.

Приклад 8. Використання критерію Гурвіца, $h = 0,5$.

	S1	S2	...	S _n	$\min_j f_{ij}$	$\max_j f_{ij}$	Y_{HW}^*
Y1	10000	1	...	1	1	10000	$0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 10000 = 5000,5^*$
Y2	1	9999	...	9999	1	9999	$0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 9999 = 5000$

У цьому випадку, критерій Гурвіца надає перевагу рішенням Y1, хоча рішення Y2 є кращим.

На практиці, остаточні висновки слід робити на основі не одного, а узагальненої оцінки множини критеріїв, розглянутих вище.