

Тема 7.

Імовірнісне моделювання. Моделювання випадкових процесів

При дослідженні систем методом імітаційного моделювання сама випадковість безпосередньо включається у процес моделювання і складає його суттєвий елемент. Кожного разу, коли на хід модельованого процесу впливає випадковий фактор, його вплив імітується за допомогою спеціального організованого розіграшу (жеребу). Таким чином, будується одна реалізація випадкового явища, що є як би результатом одного досліду. У процесі моделювання для отримання точнішої оцінки результату формується велике число реалізації (прогонів моделі).

Формування (розігрування) реалізацій випадкових процесів (подій, величин і функцій) із заданими характеристиками називають *моделюванням випадкових процесів*.

Проте програми вироблення (генератори) випадкових чисел з необхідним законом розподілу можуть виявитися дуже громіздкими. Тому випадкові числа з необхідним законом розподілу отримують не безпосередньо, а шляхом перетворення випадкових чисел, що мають деякий початковий розподіл. До початкового розподілу висувають такі вимоги: простота отримання чисел на ЕОМ; зручність перетворення випадкових чисел у розподіл із заданим законом. Встановлено, що рівномірний закон розподілу достатньою мірою задовольняє цим вимогам. Нижче буде показано, що моделювання випадкових процесів може бути побудоване на використанні датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $(0; 1)$. Оскільки отримані таким чином лічильники випадкових чисел є в принципі наближеними для відповідних законів розподілу, то їх ще називають *генераторами псевдовипадкових чисел*.

7.1. Моделювання випадкових процесів

Моделювання простих подій. Нехай ймовірність події A задана: $P(A) = p$. Виберемо за допомогою датчика випадкових чисел деяке число r і вважатимемо, що якщо воно менше або дорівнює p , то подія A відбулася, якщо більше p , то не відбулася, тобто умовою здійснення події є виконання нерівності $r \leq p$ (рис. 7.1).

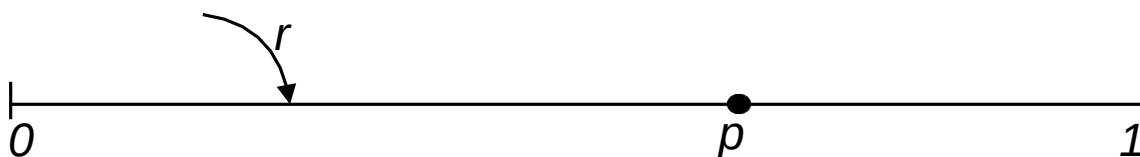


Рис. 7.1. Моделювання простої події

Дійсно, якщо ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $(0,1)$, то

$$P(\xi < p) = \int_0^p p_{\xi}(x) dx = p,$$

де $p_{\xi}(x)$ – функція щільності розподілу ймовірностей.

Моделювання повної групи подій. Нехай є повна група n подій A_i з ймовірностями p_i . Оскільки події утворюють повну групу, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Розділимо весь інтервал $(0,1)$ на n відрізків, довжини яких складають $p_1, p_2, \dots, p_n$. Виберемо за допомогою датчика випадкових чисел деяке число r і вважатимемо, що якщо воно потрапило, наприклад, на ділянку p_k , то це означає, що відбулася подія A_k , тобто

$$l_{k-1} < r \leq l_k$$

де

$$l_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} p_i, \quad l_k = \sum_{i=1}^k p_i = l_{k-1} + p_k$$

Дійсно

$$P(l_{k-1} < \xi \leq l_k) = \int_{l_{k-1}}^{l_k} p_{\xi}(x) dx = p_k.$$

Процедура моделювання в цьому випадку полягає в послідовному порівнянні випадкових чисел r з величинами l_k (рис. 7.2).

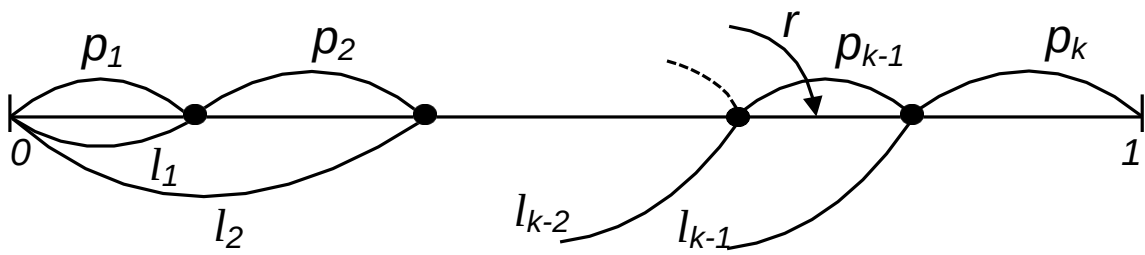


Рис. 7.2. Моделювання повної групи подій

Моделювання складних незалежних подій. Часто буває необхідно здійснити моделювання складних подій, що складаються з двох або декількох простих подій. Нехай, наприклад, є дві незалежні події A і B з ймовірностями $P(A) = p_A$ і $P(B) = p_B$. У цьому випадку можливі такі

результати сумісних випробувань: $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$, і ймовірності їх відповідно дорівнюють $p_A p_B, p_A(1 - p_B), (1 - p_A)p_B, (1 - p_A)(1 - p_B)$. При цьому вони утворюють повну групу подій, оскільки

$$p_A p_B + p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)p_B + (1 - p_A)(1 - p_B) = 1.$$

Тоді можна змоделювати складні події двома способами.

У першому способі вибираємо за допомогою датчика випадкових чисел два числа r_i, r_{i+1} (рис. 7.3) і моделюємо складні події за схемою:

$$\begin{aligned}
 AB \quad \text{при} \quad & \begin{cases} r_i \leq p_A, \\ r_{i+1} \leq p_B; \end{cases} & \bar{A}\bar{B} \quad \text{при} \quad & \begin{cases} r_i > p_A, \\ r_{i+1} \leq p_B; \end{cases} \\
 A\bar{B} \quad \text{при} \quad & \begin{cases} r_i \leq p_A, \\ r_{i+1} > p_B; \end{cases} & \bar{A}B \quad \text{при} \quad & \begin{cases} r_i > p_A, \\ r_{i+1} > p_B. \end{cases}
 \end{aligned}$$

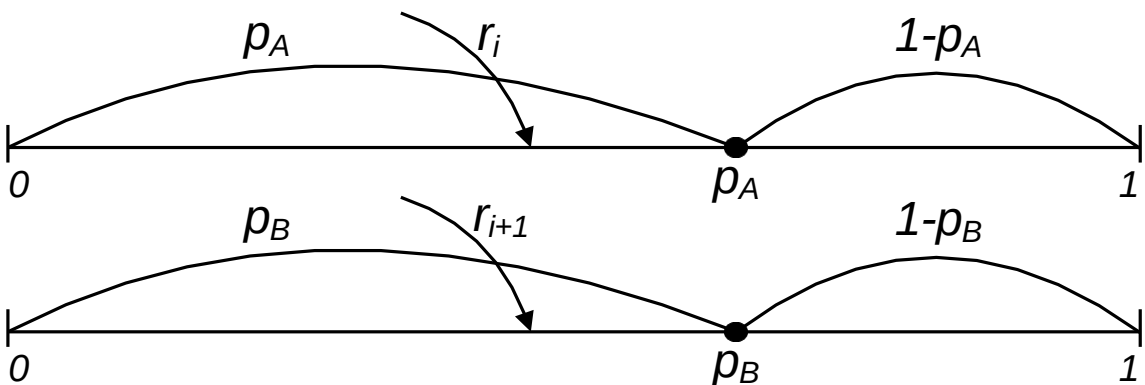


Рис. 7.3. Моделювання складних незалежних подій (вар. 1)

У другому випадку, скористаємося схемою моделювання повної групи подій. Для цього досить мати одне число (один жереб) r_i , але при цьому число порівнянь зростає (рис. 7.4).

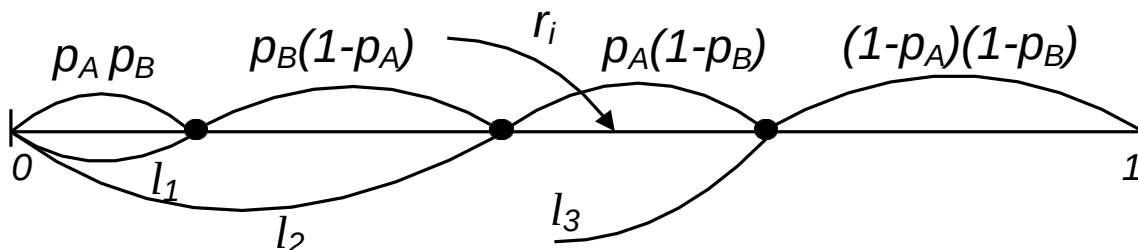


Рис. 7.4. Моделювання складних незалежних подій (вар. 2)

Моделювання складних залежних подій. Розглянемо тепер випадок, коли події A і B є залежними. Тоді можливі такі результати сумісних випробувань: $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$. Нехай ймовірності подій A і B складають p_A, p_B . Окрім того, задана умовна ймовірність $p_{B/A}$ події B за умови, що подія A відбулася.

Скористаємося схемою моделювання простих подій. Із сукупності $\{r_i\}$ витягуємо число r_i і перевіряємо умову

$$r_i \leq p_A. \quad (7.1)$$

Якщо нерівність справедлива, то має місце подія A . Тепер для випробування, пов'язаного з подією B , використовуємо ймовірність $p_{B/A}$. Із сукупності $\{r_i\}$ беремо чергове число r_{i+1} і перевіряємо умову $r_{i+1} \leq p_{B/A}$. Якщо ця нерівність справедлива, то має місце результат AB ; якщо ж немає, то результат $A\bar{B}$.

Якщо нерівність (7.1) не виконується, то має місце подія $\bar{A}$. Тому для випробування, пов'язаного з подією B , необхідно використовувати умовну ймовірність $p_{B/\bar{A}} = P(B|\bar{A})$.

Відмітимо, що A і $\bar{A}$ утворюють повну групу подій, тобто $p_A + p_{\bar{A}} = 1$. Тоді, використовуючи формулу повної ймовірності

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}),$$

за відомими значеннями $P(A) = p_A$, $P(B) = p_B$ і $P(B|A) = p_{B/A}$ знаходимо

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A)P(B|A)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A)P(B|A)}{1 - P(A)}.$$

Тепер перевіряємо умову $r_{i+1} \leq p_{B/\bar{A}}$. Залежно від виконання або невиконання цієї нерівності за умови, що нерівність (7.1) не має місця, отримуємо результати $\bar{A}B$ або $\bar{A}\bar{B}$. Схема моделювання зображена на рис. 7.5.

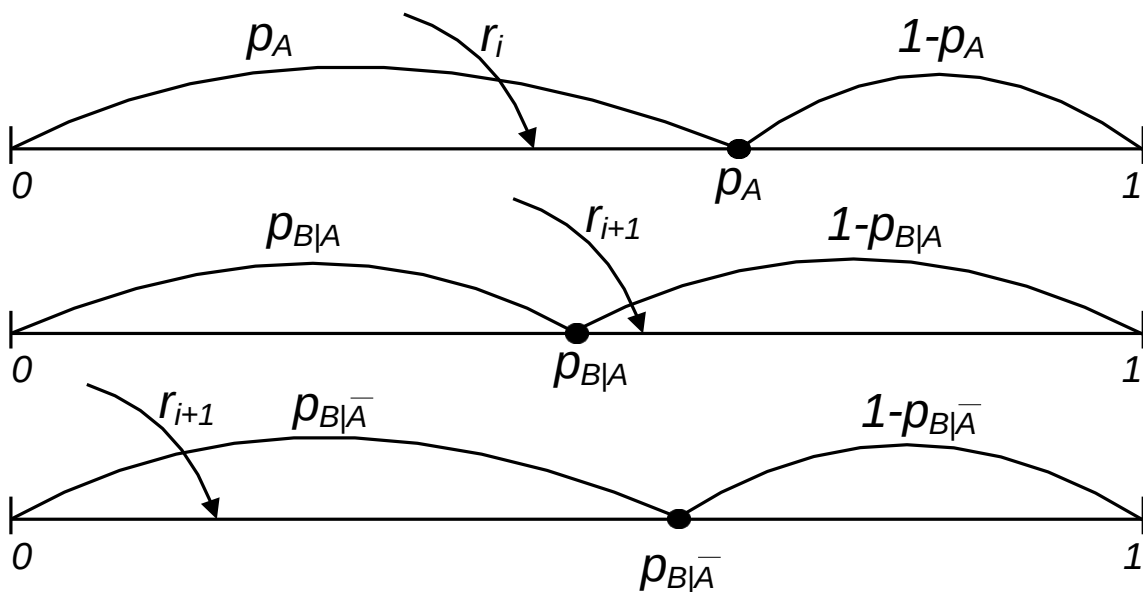


Рис. 7.5. Моделювання складних залежних подій

Таким чином моделюються складні залежні події.

7.2. Генератори псевдовипадкових чисел

Розглянемо основні методи моделювання неперервних і дискретних випадкових величин.

Метод зворотної функції. Згідно з визначенням функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ , вона приймає значення на відрізку $[0, 1]$. Тому для отримання реалізації X_i неперервної випадкової величини ξ можна спочатку згенерувати за допомогою датчика випадкових чисел деяке число r , а потім знайти X_i , при якому $r_i = F_\xi(X_i)$ або

$x_i = F_{\xi}^{-1}(r_i)$, де F_{ξ}^{-1} - функція, зворотна відносно функції розподілу $F_{\xi}(x)$ (рис. 7.6).

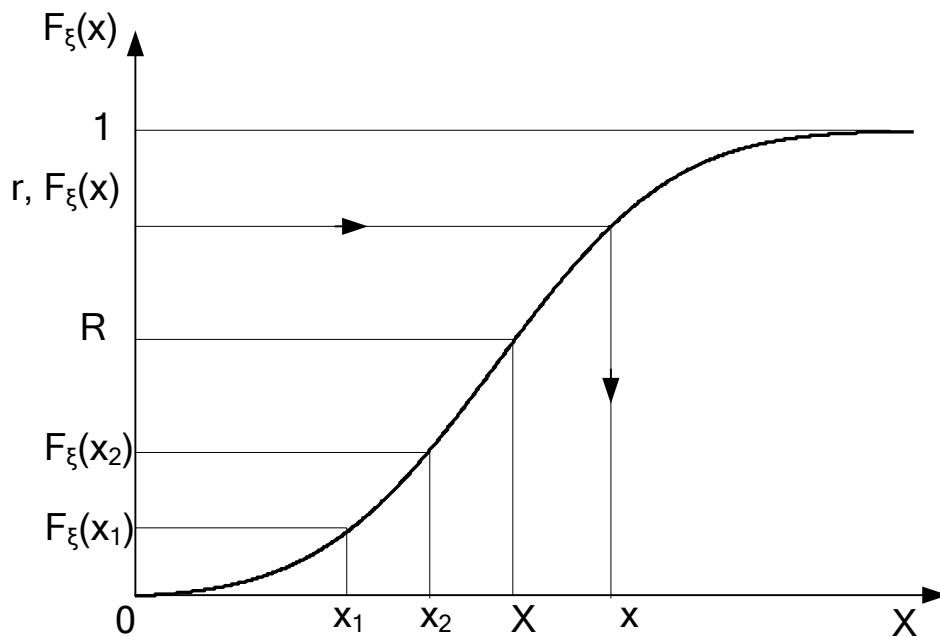


Рис. 7.6. Графік функції розподілу $F_{\xi}(x)$

Тому розглянутий метод моделювання неперервної випадкової величини носить назву **методу зворотної функції**.

Розглянемо моделювання випадкових величин, розподілених за різними законами, з використанням методу зворотної функції, граничних теорем теорії ймовірностей і за допомогою кускової апроксимації законів розподілу.

Моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом. Нормальний розподіл є видом розподілу, що найчастіше зустрічається. З ним доводиться стикатися при аналізі виробничих похибок, контролі технологічних процесів і режимів, при аналізі і прогнозуванні різних явищ. Цей закон є граничним, до якого наближаються інші закони розподілу.

Щільність розподілу нормального закону виражається формулою

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_{\xi} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right),$$

де m_{ξ} - математичне очікування, σ_{ξ} - стандартне середньоквадратичне відхилення.

Пронормуємо випадкову величину ξ , тобто розглянемо випадкову величину $\eta = (\xi - m_\xi) / \sigma_\xi$. Математичне очікування і середньоквадратичне відхилення випадкової величини η відповідно дорівнюють $m_\eta = 0$, $\sigma_\eta = 1$.

Для того щоб розіграти значення X_i випадкової величини ξ , потрібно спочатку розіграти значення Y_i випадкової величини η і від нього перейти до X_i за формулою

$$X_i = \sigma_\xi Y_i + m_\xi.$$

У разі розіграшу на ЕОМ застосовують спосіб, заснований на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей.

Згідно з цією теоремою, при додаванні достатньо великого числа незалежних випадкових величин, порівнянних за своїми дисперсіями, отримується випадкова величина, розподілена приблизно за нормальним законом, причому цей закон тим ближче до нормального, чим більше випадкових величин додається.

Як показали дослідження, при додаванні 12 випадкових величин з рівномірним розподілом в інтервалі $(0,1)$ отримується випадкова величина, яка з точністю, достатньою для більшості практичних задач, може вважатися нормальною.

Таким чином, процедура побудови нормально розподіленої випадкової величини ξ полягає в наступному:

1. Додають 12 випадкових величин R_i , рівномірно розподілених в інтервалі $(0,1)$, тобто складають суму

$$\mu = \sum_{i=1}^{12} R_i.$$

Випадкова величина μ має такі числові характеристики: математичне очікування

$$M(\mu) = m_\mu = \sum_{i=1}^{12} m_{R_i} = 12 \times (1/2) = 6,$$

дисперсію

$$D(\mu) = \sum_{i=1}^{12} D(R_i) = 12 \times (1/12) = 1$$

і середньоквадратичне відхилення $\sigma_\mu = \sqrt{D(\mu)} = 1$.

2. Нормують величину μ , тобто переходять до величини $\eta = (\mu - m_\mu) / \sigma_\mu$.

3. Від величини η переходять до величини ξ за формулою $\xi = \eta \sigma_\xi + m_\xi$.

На ЕОМ описана процедура реалізується алгоритмом:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують 12 чисел r_i .
2. Обчислюють X_i за формулою

$$X_i = \sigma_\xi \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) + m_\xi.$$

Моделювання випадкової величини, розподіленої за показниковим законом. З показниковим законом розподілу доводиться часто стикатися при визначенні показників надійності систем, дослідженні систем масового обслуговування й ін.

Щільність розподілу випадкової величини ξ , розподіленої за показниковим законом, виражається формулою:

$$p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0),$$

а функція розподілу - формулою

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0),$$

де λ - параметр показникового закону.

Нехай параметр λ показникового закону заданий і потрібно провести розіграш X_i випадкової величини ξ . Також можна скористатися

методом зворотної функції:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують число r_i .

2. Знаходять x_i з умови $r_i = F_\xi(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}$. Тоді $-\lambda x_i = \ln(1 - r_i)$, тобто

$$x_i = -\frac{\ln(1 - r_i)}{\lambda}.$$

Оскільки $r_i \in (0, 1)$, то можна скористатися і формулою

$$x_i = -\frac{\ln(r_i)}{\lambda}.$$

Моделювання випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом. Рівномірний розподіл використовується при вивченні помилок округлення й ін.

Нехай випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі (a, b) . Розглянемо випадкову величину $\eta = (\xi - a) / (b - a)$. Тоді η рівномірно розподілена в інтервалі $(0, 1)$. При цьому $\xi = a + \eta(b - a)$.

Таким чином, отримання реалізації x_i випадкової величини ξ проводять в два етапи:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують число r_i .
2. Знаходять x_i за формулою

$$x_i = a + r_i(b - a).$$

Моделювання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона. Закон Пуассона описує число подій, що відбуваються за однакові проміжки часу, за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної. Розподілом Пуассона добре описуються число викликів на телефонну станцію за певний час доби, вихід негабаритів після вибуху гірських порід, число самородків при розробці родовищ золота й ін. Закон Пуассона називають *законом появи рідкісних подій*.

Якщо випадкова величина ξ , що характеризує число настання деякої події, приймає цілочисельні значення $k = 0, 1, 2, \dots$ з ймовірностями

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

(де k - число подій, λ - параметр розподілу), то вона розподілена за законом Пуассона.

Ймовірність попадання випадкової величини ξ в заданий інтервал, наприклад в інтервал $[m, n]$, дорівнює

$$P(m \leq \xi \leq n) = p(m) + p(m+1) + \dots + p(n) = e^{-\lambda} \sum_{k=m}^n \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, можна проводити відповідно до процедури розіграшу дискретної випадкової величини (див. підрозділ 7.1, моделювання повної групи подій). Відзначимо, що для розіграшу випадкової величини ξ потрібно мати датчик випадкових чисел, які мають рівномірний розподіл в інтервалі

$(0,1)$, і після розіграшу r_i перевіряти справедливість нерівності

$$I_{k-1} < r_i \leq I_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

де $I_n = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$ (рис. 7.7).

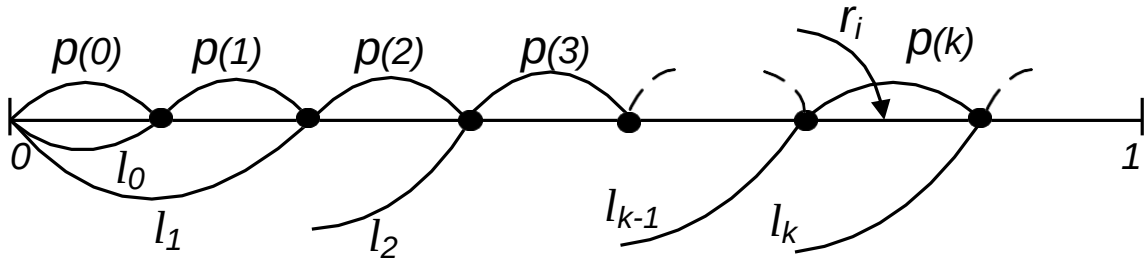


Рис. 7.7. Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Проте такий підхід виявляється занадто трудомістким. Можна вчинити інакше.

З курсу теорії ймовірностей відомо, що закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу, який має вигляд

$$p(k, n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

де $p(k, n)$ – ймовірність настання події k разів при n випробуваннях, якщо ймовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює p ;

C_n^k – число поєднань з n елементів по k .

Таким чином,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ a=np}} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Це гранична властивість біноміального розподілу часто знаходить застосування на практиці. Допустимо, що проводиться велика кількість n незалежних дослідів, в кожному з яких подія A має дуже малу ймовірність p . Тоді для обчислення ймовірності того, що подія A відбудеться рівно k разів, можна скористатися формулою

$$P(k, n) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$ – параметр закону Пуассона.

На підставі вищевикладеного процедура моделювання випадкової величини ξ , розподіленої за законом Пуассона, полягає у проведенні n

випробувань, де ймовірність появи кожної події є малою величиною: $p \leq 0.1$ (рідкісна подія):

1. Визначають число випробувань $n = \frac{\lambda}{p}$, де $p \leq 0.1$. "Лічильнику

числа подій" k привласнюється значення 0.

2. З сукупності випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі (0,1) вибирають число r_i і перевіряють умову $r_i \leq p$. Якщо ця умова виконується, то k збільшується на одиницю, якщо не виконується – k не змінюється.

3. Після проведення n таких випробувань вміст лічильника числа подій k зчитується і використовується як випадкове число із законом розподілу Пуассона.

Схема проведення випробувань зображена на рис. 7.8.

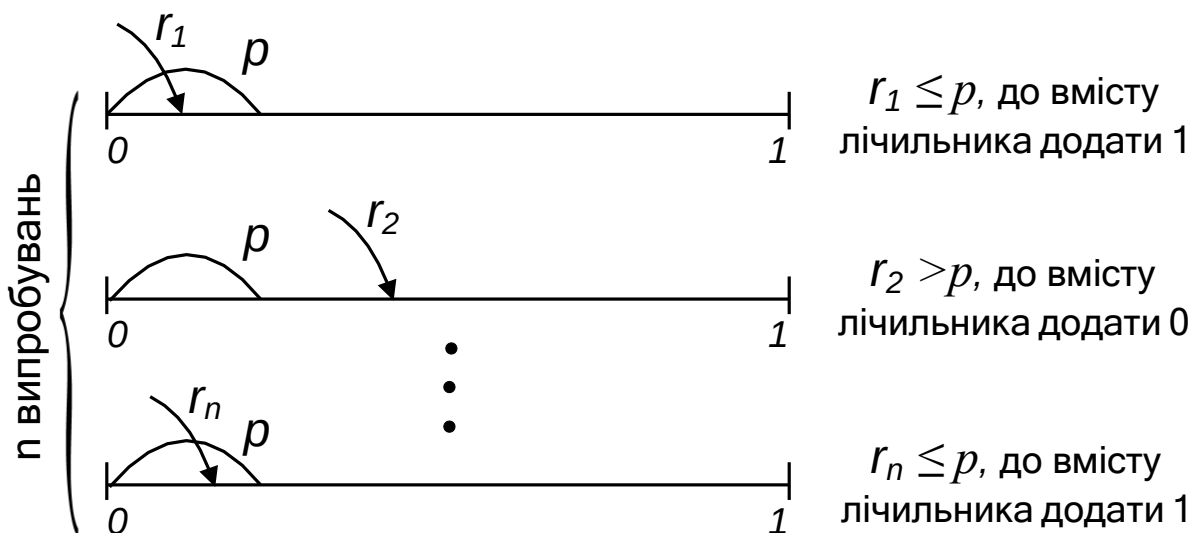


Рис. 7.8. Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Таким чином моделюється випадкова величина, розподілена за законом Пуассона.

7.3. Метод Монте-Карло

Під методом Монте-Карло розуміють чисельний метод розв'язання аналітичних задач.

Сутність методу Монте-Карло полягає в наступному: потрібно знайти значення a деякої величини, що вивчається (розв'язок деякої аналітичної задачі). Для цього вибирають таку випадкову величину ξ , математичне очікування якої дорівнює a , тобто $M(\xi) = a$. Практично ж чинять таким чином:

1. Проводять n випробувань, у результаті яких отримують n можливих значень x_i випадкової величини ξ (вибірку).

2. Обчислюють середнє арифметичне $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ і приймають його як оцінку (наближеного значення) a^* шуканого значення a .

Оскільки метод Монте-Карло вимагає проведення великого числа випробувань, його часто називають **методом статистичних випро-**

бувань. Теорія цього методу вказує як найдоцільніше вибрати випадкову величину ξ , як знайти її можливі значення. Зокрема, розробляються способи зменшення дисперсії використовуваних випадкових величин, внаслідок чого зменшується помилка, що допускається при заміні шуканого математичного очікування a його оцінкою a^* .

Ідея методу Монте-Карло пізніше стала застосовуватися і для машинної імітації з метою дослідження характеристик процесів функціонування систем, схильних до випадкових дій, таким чином з'явився **метод статистичного моделювання** (див. підрозділ 3.1).

Висновки

1. Датчик випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $(0; 1)$, є базовим для побудови генераторів псевдовипадкових чисел з іншими законами розподілу.
2. Метод Монте-Карло — це чисельний метод розв'язання аналітичних задач, заснований на статистичних випробуваннях.
3. Метод статистичного моделювання — це метод машинної реалізації імітаційної моделі

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення випадкової величини, рівномірно розподіленої в інтервалі $\bar{a}, b$.
2. Якими законами розподілу добре описуються різні явища і процеси, що виникають у практичних задачах.
3. Чи можна розглядати процес виборів президента країни шляхом всенародного голосування як застосування методу Монте-Карло?