

ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Показниковою нерівністю називається нерівність, в якій невідома величина знаходиться у показнику степеня.

Тун 1. $a^x \{>, <, \geq, \leq\} b$

Випадок 1.1 $0 < a < 1$

$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \{<, \leq\} \log_a b$	$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$	$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$
$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \{>, \geq\} \log_a b$	$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \in \emptyset;$	$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Випадок 1.2 $a > 1$

$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \{>, \geq\} \log_a b$	$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$	$a^x \{>, \geq\} b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$
$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \{<, \leq\} \log_a b$	$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \in \emptyset;$	$a^x \{<, \leq\} b \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Зауваження. Якщо в показнику степеня знаходиться не просто шукана змінна x , а деяка функція $f(x)$ (тобто маємо нерівності вигляду $a^{f(x)} \{>, <, \geq, \leq\} b$), то для запису остаточної відповіді отримані результати потрібно перетинати з областю визначення $D(f)$ цієї функції.

№ 1. Розв'язати нерівність $2^{x+1} > 4$.

Тун 2. $a^{f(x)} \{>, <, \geq, \leq\} a^{g(x)}.$

Випадок 2.1 $0 < a < 1$

$$a^{f(x)} \{>, \geq\} a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \{<, \leq\} g(x) \quad \Bigg| \quad a^{f(x)} \{<, \leq\} a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \{>, \geq\} g(x).$$

Випадок 2.2 $a > 1$

$$a^{f(x)} \{>, \geq\} a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \{>, \geq\} g(x) \quad \Bigg| \quad a^{f(x)} \{<, \leq\} a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \{<, \leq\} g(x).$$

№ 2. Знайти розв'язки нерівності $2^{\frac{x}{x^2-1}} \geq 2^{\frac{1}{x-2}}.$

Тип 3. Показниково-степеневі нерівності виду $[\varphi(x)]^{f(x)} \{>, <\} [\varphi(x)]^{g(x)}$

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \{<, >\} g(x), \\ \varphi(x) > 1, \\ f(x) \{>, <\} g(x). \end{cases}$$

Зауваження. Якщо знак показниково-степеневі нерівності нестрогий, тобто маємо $[\varphi(x)]^{f(x)} \{\geq, \leq\} [\varphi(x)]^{g(x)}$, то до останньої сукупності потрібно ще додати систему

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

№ 3. Розв'язати нерівність $(x+1)^x < (x+1)^{2x+1}$.

Усі інші показникові нерівності зводяться до вище наведених так званих найпростіших нерівностей.

Тип 4. Однорідні показникові нерівності.

Однорідною показниковою нерівністю першого степеня називається нерівність виду

$$A \cdot a^{f(x)} + B \cdot b^{f(x)} \{>, <, \geq, \leq\} 0,$$

де коефіцієнти $A, B \in \mathbb{R}$. Діленням на $b^{f(x)} > 0$ (або $a^{f(x)} > 0$, що не впливає на знаходження розв'язку) можна звести таку нерівність до показникової нерівності типів 1 або 2.

№ 4. Розв'язати нерівність $2^x - 5^x < 0$.

Однорідною показниковою нерівністю другого степеня називається нерівність

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} \{>, <, \geq, \leq\} 0; A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Ділення обох частин нерівності на $b^{2f(x)} > 0$ чи $a^{2f(x)} > 0$ призводить до найпростішої нерівності одного з вище наведених типів 1, 2.

Зауваження. Якщо показникові нерівності розв'язується за допомогою заміни, то нерівності відносно нової змінної потрібно розв'язувати до отримання найпростіших нерівностей.

№ 5. Розв'язати нерівність $2 \cdot 5^{2x} + 10^x - 15 \cdot 2^{2x} \leq 0$.

Тип 5. Нерівності, що розв'язуються зведенням до однієї основи

№ 6. Розв'язати нерівність $2^{x+3} \geq 0,5^x$.

Тип 6. Нерівності, що розв'язуються винесенням спільного множника за дужки

№ 7. Розв'язати нерівність $8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48$.