ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 8 «Показникові нерівності»

1. Розв'язати нерівність:

1) $2^{x+1} > 4$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

У даному випадку $a = 2 > 1$, $b = 4 > 0$, тоді

$$x+1 > \log_2 4 \Rightarrow x+1 > 2 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1; +\infty).$$

Відповідь. $x \in (1; +\infty)$.

2) $2^{\frac{x}{x^2-1}} \geq 2^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання. ОДЗ: знаменники дробів не дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} x^2-1 \neq 0, \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \neq 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in R \setminus \{\pm 1; 2\}.$$

Згідно випадку 2.2 $(a = 2 > 1)$ для показникових нерівностей, отримуємо рівносильну дробово-раціональну нерівність

$$\frac{x}{x^2-1} \geq \frac{1}{x-2},$$

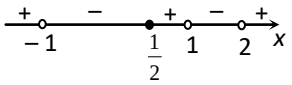
розв'язки якої знаходимо за допомогою методу інтервалів:

$$\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-x^2+1}{(x^2-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{(x^2-1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow -2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2) \geq 0 \;\Big|: (-2), x \in \text{ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0, \; x \in \text{ОДЗ}.$$

Наносимо на координатну пряму нулі кожного з множників та визначаємо знак нерівності на кожному з отриманих проміжків (а також враховуємо ОДЗ).



Таким чином, $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 2)$.

Відповідь. $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 2)$.

3) $(x+1)^x < (x+1)^{2x+1}$.

Приклад. Розв'язати нерівність $(x+1)^x < (x+1)^{2x+1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Переходимо до еквівалентної сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+1 < 1, \\ x > 2x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 > 1, \\ x < 2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 < 1, \\ -x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ -x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x < 0, \\ x < -1, \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x > 0, \\ x > -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;+\infty),\\ x\in(-\infty;0),\\ x\in(-\infty;-1),\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;+\infty),\\ x\in(-1;+\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x\in(0;+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow x\in(0;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

4) $2^x-5^x<0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Поділимо ліву та праву частини заданої нерівності на $5^x>0$, тоді

$$\frac{2^x}{5^x}-1<0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x<1.$$

Оскільки $1=\left(\frac{2}{5}\right)^0$, то прийдемо до нерівності

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^0.$$

Отримали показникову нерівність типу 2 (випадок 2.1, оскільки $a=\frac{2}{5}<1$), тоді

$$x>0 \text{ або } x\in(0;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

5) $2\cdot5^{2x}+10^x-15\cdot2^{2x}\le0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Відмітимо, що $10^x=(2\cdot5)^x=2^x\cdot5^x$, тоді задана нерівність прийме вигляд:

$$2\cdot5^{2x}+2^x\cdot5^x-15\cdot2^{2x}\le0.$$

Отримали однорідну показникову нерівність другого степеня. Поділимо обидві частини на $2^{2x}>0$:

$$\frac{2\cdot5^{2x}}{2^{2x}}+\frac{2^x\cdot5^x}{2^{2x}}-15\le0 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{5}{2}\right)^x-15\le0.$$

Виконаємо заміну $\left(\frac{5}{2}\right)^x=t$, оскільки показникова функція приймає лише додатні значення, то маємо обмеження на нову змінну: $t>0$.

У результаті заміни отримаємо квадратну нерівність

$$2t^2+t-15\le0, \qquad \text{ОДЗ}: t\in(0;+\infty),$$

розв'язки якої знайдемо методом інтервалів. Для цього ліву частину потрібно розкласти на множники:

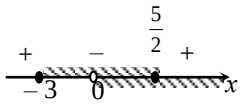
$$2t^2+t-15=0 \Rightarrow D=1^2-4\cdot2\cdot(-15)=1+120=121=11^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm11}{2\cdot2}=\left[\begin{array}{l}\frac{5}{2},\\ -3\end{array}\right. \Rightarrow 2t^2+t-15=2\cdot\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3).$$

Тобто

$$2\cdot\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3)\le 0 \;\Big|:2 \;\Rightarrow\; \left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3)\le 0.$$

Відмічаємо на координатній прямій отримані точки та визначаємо знак нерівності на одному з отриманих проміжків, наприклад, правому $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$, далі знаки чергуються, бо отримані корені непарної кратності (для відповіді обираємо проміжки зі знаком мінус – штриховка над координатною прямою).



Тоді $t\in\left[-3;\frac{5}{2}\right]$. Враховуючи ОДЗ: $t>0$ (зображено штриховкою під координатною прямою), будемо мати, що $t\in\left(0;\frac{5}{2}\right]$ або $0<t\le\frac{5}{2}$.

Зауваження. Якщо показникові нерівності розв'язується за допомогою заміни, то нерівності відносно нової змінної потрібно розв'язувати до отримання найпростіших нерівностей.

Отже, від подвійної нерівності перейдемо до системи:

$$\begin{cases} t>0, \\ t\le\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Обернена заміна:

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^x>0, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x\le\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Перша нерівність має місце для будь-якого значення змінної (тобто $x\in R$), оскільки показникова функція набуває лише додатних значень; друга нерівність:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x\le\frac{5}{2}\;\Rightarrow\;\left(\frac{5}{2}\right)^x\le\left(\frac{5}{2}\right)^1\underset{\frac{5}{2}>1}{\Rightarrow}\;x\le 1\;\Rightarrow\;x\in(-\infty;1].$$

Таким чином, остання система $\begin{cases} x\in R, \\ x\in(-\infty;1]. \end{cases}$ Звідки остаточно маємо, що $x\in(-\infty;1]$.

Відповідь. $x\in(-\infty;1]$.

6) $2^{x+3}\ge 0{,}5^x$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Приведемо праву частину заданої нерівності до основи 2: $0{,}5=\frac{1}{2}=2^{-1}$, тоді

$$2^{x+3}\ge\left(2^{-1}\right)^x\;\Rightarrow\;2^{x+3}\ge 2^{-x}\underset{2>1}{\Rightarrow}\;x+3\ge -x\;\Rightarrow,$$

$$\Rightarrow\;2x\ge -3\;\Rightarrow\;x\ge-\frac{3}{2}\;\Rightarrow\;x\in\left[-\frac{3}{2};+\infty\right).$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

7) $8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Виносимо 2 у найменшому степеню за дужки:

$$2^{x-1} \cdot (8-2) > 48 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 6 > 48 \Rightarrow 2^{x-1} > 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-1} > 2^3 \underset{2>1}{\Rightarrow} x-1 > 3 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4; +\infty).$$

Відповідь. $x \in (4; +\infty)$.

8) $2^{10x-5} \geq \frac{1}{16}$; 9) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-1} < \frac{1}{7^4}$; 10) $7^{x+1} - 7^x < 42$; 11) $5^{x^2-5x+4} > \frac{1}{25}$;

12) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 \leq 0$; 13) $\frac{7^x - 30}{7^{x-1} + 1} \leq -14$; 14) $4^x - 12 \cdot 2^x - 64 \geq 0$;

15) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-1} \geq 9^{x-1}$; 16) $36^{0,5x^2-1} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; 17) $3^{2x-1} - 3^{2x-4} + 3^{2x-2} \leq 315$;

18) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2^{3-x} - 16$; 19) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x \geq 0$; 20) $2^{2+x} - 2^{2-x} \geq 15$;

21) $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$; 22) $4^{\frac{1}{x}} \leq 4^{\frac{1}{x-2}}$; 23) $0,3^{|2x-3|} < 0,3^{|3x+4|}$;

24) $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2-x} > 1$; 25) $\left(x^2 - x + 1\right)^x \leq 1$; 26) $\left(\sqrt{5} + 2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 0,125 \leq \sqrt{2} \cdot 0,0625^{-x}$; 28) $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$;

29) $\begin{cases} 3^{x-1} \leq \sqrt{3}, \\ 0,2^{3x^2-2} = 0,2^{2x^2+x+4}; \end{cases}$ 30) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$; 31) $\frac{x-1}{\log_3\left(9 - 3^x\right) - 3} \leq 1$;

32) $0,5^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} < 1$; 33) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$; 34) $\log_3 \log_{\frac{1}{8}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{1}{2}\right) \leq -1$.