

Лекція 2-3

Математична задача як засіб набуття математичних знань та формування вмінь та навичок. Види освітніх задач

Задачний підхід до набуття математичних знань та формування вмінь та навичок

Для залучення учнів до активної пізнавальної діяльності необхідно особливим чином конструювати зміст навчання. Важливо побудувати технології навчання на основі так званого «*задачного підходу*». Задачним підходом вважається така «навчальна діяльність, яка (як і будь-яка інша) має задачну структуру, тобто здійснюється через розв'язання специфічних для неї навчальних задач: мислительних, мнемічних, перцептивних, імажінативних, комунікативних та інших».

Задачний підхід у дослідженнях М.В.Ричіка передбачає «конструювання навчального тексту на основі побудови *ієрархічної системи* пізнавальних задач»:

1. Добір системи задач має відповідати змісту курсу природничих дисциплін, а самі задачі – їх функціям у процесі навчання.
2. *Кожна задача має ідейну і технічну складність, тому важливим у системі задач є чергування пріоритетів ідейної і технічної складності.*
3. *На прикладі однієї-двох задач системи доцільно розглядати різні способи і методи розв'язання, а потім порівнювати отримані результати з різних точок зору (стандартність і оригінальність, використані прийоми мисленнєвої діяльності, практична цінність), що може стати в нагоді при розв'язанні інших задач системи і засвоєнні прийомів мисленнєвої діяльності.*
4. *Система задач має поступово ускладнюватися від більш легких і знайомих до менш легких і знайомих задач.*
5. Осмислення умінь, використаних при розв'язанні задач одного типу, полегшує розв'язання задач інших типів.
6. Добір задач системи треба здійснювати диференційовано для різних типологічних груп учнів.
7. *Задачі системи мають сприяти міжпредметному узагальненню набутих знань і перенесенню умінь.*
8. *До системи задач необхідно включати різні за структурую і змістом задачі.*
9. Деякі задачі системи варто пропонувати у вигляді гіпотез, а в системі необхідно передбачати їхній розвиток.
10. Треба передбачати можливість розв'язування деяких задач системи різними методами або способами, при цьому обов'язковим є аналіз кожного способу розв'язання задачі й вибір найраціональнішого.

11. Система задач має сприяти формуванню інтелектуальних умінь творчого характеру.

Види освітніх задач:

- **на засвоєння математичних понять,**
- на оволодіння математичною символікою,
- **на формування вміння доводити,**
- **підготовчі задачі при використанні проблемного методу навчання,**
- задачі дослідницького характеру

1) Задачі на засвоєння математичних понять

Актуалізація знань.

1. Надайте описання головних характеристик поняття – зміст, обсяг. Яке співвідношення між обсягом й змістом поняття? Наведіть приклади.

2. Що означає визначити поняття? Які бувають визначення понять?

3. Яке завдання класифікації понять? Які вимоги висуваються до класифікації понять?

В системі задач, направлених на **засвоєння нового поняття** та його означення, виділяють задачі:

- на актуалізацію знань та вмінь, необхідних для формування поняття;
- на виділення суттєвих ознак поняття;
- на розпізнавання поняття;
- на засвоєння тексту означення поняття;
- на використання математичної символіки;
- на встановлення властивостей поняття;
- на застосування поняття;

Завдання. За допомогою стрілок зв'язати речення в обох стовпцях таблиці

Етапи формування поняття	Вправи для реалізації етапів
Мотивація введення поняття	Вправи на застосування раніше вивчених понять та теорем
Виділення суттєвих властивостей поняття	Вправи практичного характеру Вправи на побудову об'єктів, що мають вказані властивості
Синтез виділених властивостей, формулювання означення	Вправи з моделями фігур
Розуміння смислу слів в означенні поняття	Вправи на розпізнавання об'єктів, що належать об'єму поняття
Засвоєння логічної структури поняття	Вправи на виділення наслідків з визначення поняття
Запам'ятовування означення поняття	Вправи на складання «родинного дерева» поняття
Застосування поняття	Вправи на застосування поняття в різних ситуаціях
Встановлення зв'язків поняття, що вивчається, з іншими поняттями	Вправи на систематизацію понять

Завдання. Проаналізуйте «означення»: Діаметром кола називається відрізок, який проходить через його центр, з'єднує дві точки кола і ділить коло навпіл.

2) Підготовчі задачі при використанні проблемного методу навчання

На уроках математики навчальний процес іде здебільшого від задач до теорії і потім від теорії до задач, тобто за схемою:

ЗАДАЧІ – ТЕОРІЯ – ЗАДАЧІ

Перехід від задач до теорії характеризує проблемну ситуацію, перехід від теорії до задач характеризує застосування теорії. Методи й способи

розв'язання задач визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями й допоміжними засобами, котрими учні володіють на даному етапі навчання.

Завдання. Як можна використати задачу

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 - 1321x - 23 = 0 \\ x^4 - 1310x - 144 = 0 \end{cases}$$

для створення проблемної ситуації? З якою метою можна використати цю проблемну ситуацію. Один з варіантів - для введення нового або нових понять? Яких?

Зауваження. Один з можливих запропонованих варіантів розв'язання:

Розв'язання: Віднімемо від першого рівняння почленно друге, одержимо: $-11x + 121 = 0$, звідки $x = 11$.

Завдання. Як можна використати задачу

Приклад 2. Довести, що $5 < 1$.

Доведення. Розглянемо вірну нерівність: $\left(\frac{1}{3}\right)^5 < \frac{1}{3}$. Прологарифмуємо цю нерівність: $5 \ln \frac{1}{3} < \ln \frac{1}{3}$. Поділивши нерівність на $\ln \frac{1}{3}$, одержимо:

$5 < 1$.

для створення проблемної ситуації? З якою метою можна використати цю проблемну ситуацію?

3) На формування вміння доводити

Завдання. За допомогою стрілок вказати зв'язки між реченнями в стовпчиках таблиці.

Етапи роботи з теоремою	Вправи, що їх реалізують
Мотивація вивчення теореми	Вправи на вимірювання величин,

Ознайомлення з теоремою	дослідження модельних фігур
Засвоєння змісту теореми	Вправи з практичним змістом
Запам'ятовування формулювання теореми	Вправи на застосування раніше доведених теорем або понять
Ознайомлення з методом доведення	Вправи на виділення умов та висновків теорем
Доведення теореми	Вправи на розпізнавання ситуацій, що задовольняють теорему
Застосування теореми	Вправи на ознайомлення з методами доведення теорем
Встановлення зв'язків теореми з раніше доведеними (вивченими) теоремами	Вправи на систематизацію теорем
	Вправи на встановлення «родовіду» теореми
	Вправи на складання плану доведення теореми

УРОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ

Задача (основна). Якщо A, B, C, D – довільні чотири точки, то

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ (*Векторна рівність чотирьох точок*)

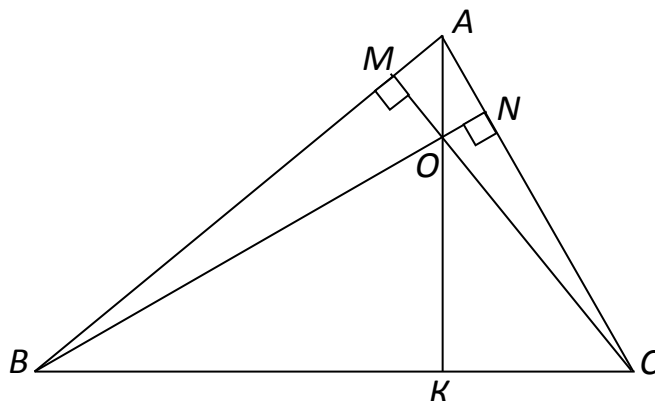
Доведення. Нехай O – довільна точка. Виразивши кожний вектор даної рівності через різницю векторів, які виходять з точки O , матимемо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + \\ &+ (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 0 \end{aligned}$$

Зауваження. Виведена векторна рівність є вірною незалежно від того, де розміщені дані чотири точки: на одній прямій, на одній площині, чи у просторі.

Задача 1 (застосування). Довести, що всі три висоти трикутника перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. Проведемо $[CM] \perp [AB]$ і $[BN] \perp [AC]$, причому $(CM) \cap (BN) = O$



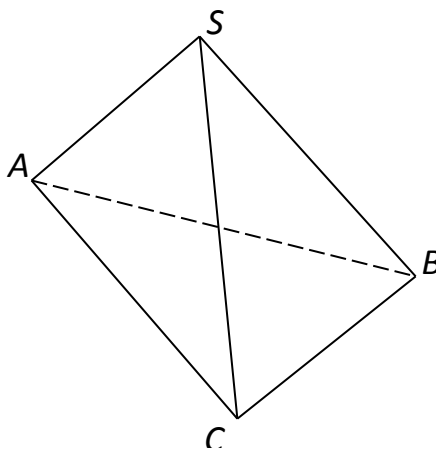
До чотирьох точок A, B, C і O застосовуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Оскільки $[CM] \perp [AB]$ і $[BN] \perp [AC]$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ і $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Тоді з рівності чотирьох точок отримаємо $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, тобто $[BC] \perp [AK]$, а це означає, що $[AK]$ – третя висота цього трикутника, яка проходить через точку O .

Задача 2 (застосування). Якщо дві пари мимобіжних ребер тетраедра взаємно перпендикулярні, то й ребра третьої пари також взаємно перпендикулярні. Довести це.

Доведення. Застосуємо до точок S, A, B, C доведену векторну рівність, яка для цих точок має вигляд $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$



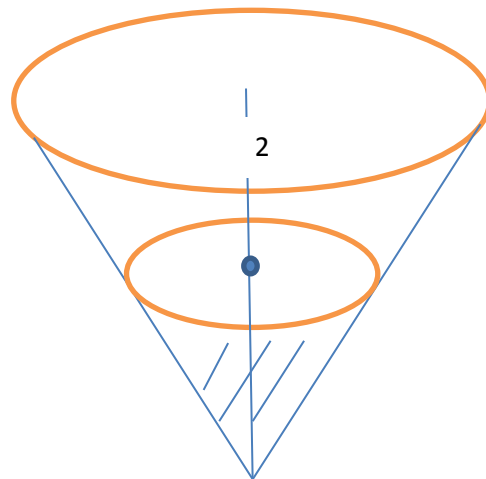
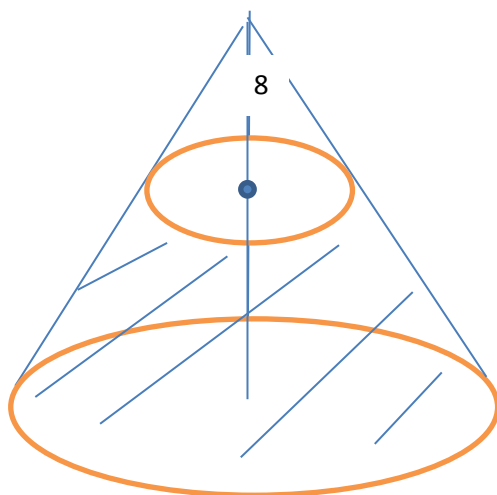
За умовою задачі дві пари протилежних ребер перпендикулярні. Нехай $CA \perp SB$ і $AB \perp SC$. Тоді $\overline{CA} \cdot \overline{SB} = 0$ і $\overline{AB} \cdot \overline{SC} = 0$. Отже, для третьої пари ребер отримаємо $\overline{BC} \cdot \overline{SA} = 0$, що означає $BC \perp SA$.

4) Задачі дослідницького характеру.

Навчання математики в школі можливо будувати так, щоб воно здавалось учневі серією маленьких відкриттів, за допомогою яких учні можуть набути здібність **порівнювати, робити висновки за аналогією, узагальнювати** (це одна з ідей НУШ).

К.Е. Ціолковський писав, що спочатку він робив відкриття, відомі всім, потім – відомі небагатьом, і, нарешті, нікому невідомі.

Задача. Знайти висоту конуса, частково заповненого рідиною (заштриховані області) за вказаними на рисунку даними.



Задача. Чи вірно, що площа прямокутного трикутника дорівнює 30, якщо гіпотенуза дорівнює 10, а висота, проведена з вершини прямого кута дорівнює 6?