

ПОНЯТТЯ ЛОГАРИФМА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Логарифмом числа b за основою a називається таке число c , що має місце рівність $b = a^c$:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c.$$

Логарифм має сенс при умові, що $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Зауваження. Тобто значення логарифма – це такий степінь, до якого потрібно піднести основу логарифма a , щоб отримати підлогарифмічний вираз b .

Існують спеціальні позначення логарифмів.

1. **Натуральний логарифм** $\ln b$ – це логарифм за основою e :

$$\ln b = \log_e b.$$

Зауваження. Число $e \approx 2,718281828459045\dots$ називається *числом Ейлера* або *числом Непера*.

2. **Десятковий логарифм** $\lg b$ – логарифм за основою 10:

$$\lg b = \log_{10} b.$$

№ 1. Обчислити:

$$\begin{array}{llll} 1) \log_3 9; & 2) \log_2 \frac{1}{8}; & 3) \log_5 25; & 4) \log_{17} 17; \\ 5) \log_{100} 1; & 6) \log_{\frac{1}{6}} 6; & 7) \log_8 2; & 8) \lg 100. \end{array}$$

№ 2. Чи є правильною рівність:

$$\begin{array}{llll} 1) \log_7 49 = -3; & 2) \log_3 \frac{1}{81} = -4; & 3) \log_{\frac{1}{9}} (3 \cdot \sqrt[3]{3}) = \frac{2}{3}; & 4) \log_{25} 5 = 2; \\ 5) \log_{0,01} 10 = 2; & 6) \log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2; & 7) \log_5 125 = \frac{1}{3}; & 8) \lg 0,0001 = -4? \end{array}$$

№ 3. Знайти логарифм з основою 2 числа:

$$1) 1; \quad 2) 2; \quad 3) 32; \quad 4) \sqrt{2}; \quad 5) 0,5; \quad 6) \frac{1}{8}; \quad 7) \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 8) 2\sqrt{2}.$$

Властивості логарифмів ($a, b, c > 0, a \neq 1$)

1. **Основна логарифмічна тотожність:**

$$a^{\log_a b} = b$$

2. Логарифм від числа, що дорівнює основі логарифма, дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

3. Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

4. Логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів від кожного з співмножників:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

5. Логарифм частки дорівнює різниці логарифмів діленого та дільника:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

6. Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня

$$\log_a b^n = n \log_a b.$$

Зауваження. $\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|.$

$$7. \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$$

$$8. \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b.$$

$$9. \log_{a^n} b^n = \log_a b.$$

10. Перехід до нової основи:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1.$$

$$11. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

$$12. \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

№ 4. Обчислити значення виразу:

$$1) 2^{\log_2 32};$$

$$2) 5^{\log_5 0,5};$$

$$3) 7^{2 \log_7 2};$$

$$4) 64^{0,5 \log_2 12};$$

$$5) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6};$$

$$6) 6^{1 + \log_6 5};$$

$$7) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 \frac{8}{3} - 2};$$

$$8) 6^{\log_{\frac{1}{6}} 3};$$

$$9) \log_6 3 + \log_6 2;$$

$$10) \log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56;$$

$$11) \log_5 100 - \log_5 4;$$

$$12) \frac{\log_5 64}{\log_5 4};$$

$$13) \log_{49} 84 - \log_{49} 12;$$

$$14) 2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16;$$

$$15) 3 \log_6 2 + \frac{3}{4} \log_6 81.$$

№ 5. Подати:

1) число 2 у вигляді степеня 5;

2) число $\frac{1}{9}$ у вигляді степеня числа 10;

3) число $\sqrt{14}$ у вигляді степеня числа 7;

4) число 0,17 у вигляді степеня числа 18.

№ 6. Подати:

- 1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;
- 2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;
- 3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;
- 4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

№ 7. Обчислити значення виразу:

- 1) $2^{3\log_2 5+4}$;
- 2) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;
- 3) $2 \cdot 100^{0,5\lg 8-2\lg 2}$;
- 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;
- 5) $\lg(25^{\log_5 0,8} + 9^{\log_3 0,6})$;
- 6) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;
- 7) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$;
- 8) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;
- 9) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$;
- 10) $\frac{3\lg 4 + \lg 0,5}{\lg 9 - \lg 18}$;
- 11) $\log_7 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{5}} 49$;
- 12) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

№ 8. Знайти x , якщо

- 1) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;
- 2) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 128 + 1$;
- 3) $\log_a x = \frac{1}{4}\log_a 16 + 3\log_a 0,5$.

№ 9. Спростити вираз:

- 1) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9$;
- 2) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

№ 10. Знайти:

- 1) $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$;
- 2) $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$;
- 3) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;
- 4) $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.