

Лабораторне заняття 3. Лабораторні роботи з фізики. Фізичний практикум. Їх завдання та місце в освітньому процесі. Особливості вимірювання фізичних величин.

Завдання. Підготувати доповідь та презентацію на тему: «Методичні аспекти вимірювання фізичних величин». Підібрати приклади характерних завдань.

Методичні матеріали ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН



Теоретичні відомості.

Виміряти фізичну величину – означає знайти експериментальним шляхом значення фізичної величини за допомогою спеціальних технічних засобів (засобів вимірювань). При вимірюванні фізична величина порівнюється з однорідною величиною, яку прийнято за одиницю. Якщо, наприклад, зазначається, що маса тіла дорівнює 5 кг, то 5 кг – це значення маси тіла, яке дорівнює добутку числового значення фізичної величини (5) на одиницю маси (кг). Виміряти масу тіла – це і означає визначити, у скільки разів його маса відрізняється від маси еталона. Для забезпечення єдності фізичних вимірювань створені міжнародні еталони кожної з основних одиниць СІ.

Загальноприйнятою у наш час є Міжнародна система одиниць СІ (система інтернаціональна). Вона базується на *семи* основних одиницях: одиниця довжини – *метр* (м), маси – *кілограм* (кг), часу – *секунда* (с), кількості речовини – *моль* (моль), температури – *кельвін* (К), сили електричного струму – *ампер* (А), сили світла – *кандела* (кд).

Істинне значення вимірюваної фізичної величини визначити неможливо, оскільки не існує абсолютно точних приладів та інших засобів вимірювань (та й самі еталони одиниць фізичних величин відтворюються лише з кінцевою точністю). Навіть значення фундаментальних фізичних констант відомі з певними похибками. Так, стала Авогадро за останніми даними дорівнює $N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Цей запис означає, що істинне значення є невідомим, але з імовірністю близькою до 1 можна стверджувати, що воно знаходиться в інтервалі значень

$$6,022014 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} < N_A < 6,022076 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Як приклад *точних* значень фізичних величин, з якими доводиться зустрічатися в експерименті, наведемо результат лічби порівняно невеликої кількості предметів (число витків дротяного реостата; число крапель, які падають з бюретки; кількість акумуляторів у батареї тощо).

Процес вимірювання вважається завершеним лише тоді, коли вказано не тільки число $x_{\text{вим}}$, прийняте за результат вимірювання, але й число Δx , що дозволяє визначити інтервал

$$(x_{\text{вим}} - \Delta x; x_{\text{вим}} + \Delta x) \text{ або (інший запис) } x_{\text{вим}} \pm \Delta x,$$

який з досить великою імовірністю (близькою до 1) містить невідоме експериментатору істинне значення $x_{\text{іст}}$ вимірюваної величини x (рис. 0.1). Величина Δx називається *межею абсолютної похибки*. Вона є додатною величиною.

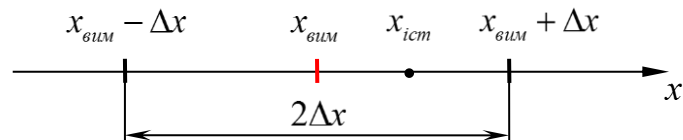


Рис. 0.1. Графічне зображення результату вимірювання величини x

Зазначимо, що під *абсолютною похибкою вимірювання* δx розуміють модуль різниці виміряного $x_{\text{вим}}$ та істинного $x_{\text{іст}}$ значень фізичної величини:

$$\delta x = |x_{\text{вим}} - x_{\text{іст}}|.$$

Проте, як уже зазначалося, точне значення є невідомим. Тому точність вимірювання оцінюють за допомогою *межі абсолютної похибки* Δx .

Межа абсолютної похибки не повністю характеризує вимірювання. Нехай, наприклад, в результаті вимірювань встановлено, що довжина стола дорівнює $l = (100 \pm 1)$ см, а товщина його кришки $d = (2 \pm 1)$ см. Межі абсолютної похибки вимірювань у цих двох випадках однакова. Проте, очевидно, що якість вимірювання у першому випадку вище.

Тому цілком логічно якість вимірювання характеризувати *межею відносної похибки* ε , яка дорівнює відношенню межі абсолютної похибки Δx до виміряного значення $x_{\text{вим}}$ (при цьому часто ε виражають у відсотках):

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta x}{x_{\text{вим}}}.$$

Поняття абсолютної похибки (та її межі) є зовсім непридатним для порівняння точності значень величин з різними розмірностями. Це пояснюється тим, що абсолютна похибка є іменованою величиною, її розмірність співпадає з розмірністю вимірюваної величини. Тому безглуздом, наприклад, є запитання: яке вимірювання є більш точним – вимірювання довжини з точністю до 1 мм або вимірювання маси з точністю до 1 г? Поняття відносної похибки $\delta x / x_{\text{вим}}$ (та її межі $\Delta x / x_{\text{вим}}$) дозволяє порівнювати точність вимірювань, у тому числі, і величин з різними розмірностями.

Отже, експериментатору потрібно не лише отримати у досліді наближене значення $x_{\text{вим}}$ вимірюваної величини, але й *оцінити точність* цього значення за допомогою меж абсолютної Δx або відносної ε похибок. Результат вимірювання подають у вигляді:

$$x = x_{\text{вим}} \pm \Delta x. \quad (0.1)$$

До запису результату за формою (0.1) висувають ряд вимог. Так, після того, як межу абсолютної похибки знайдено, її значення округляють з *надлишком*, як правило, до *однієї значущої цифри* (з більшою кількістю значущих цифр похибки записують лише при відповідальних вимірюваннях високої точності). Після цього у виміряному значенні $x_{\text{вим}}$ залишають стільки десяткових знаків, скільки їх має похибка Δx (при цьому користуються звичайним правилом округлення). Такий підхід пояснюється тим, що перша зліва ненульова цифра похибки визначає *сумнівну* цифру у виміряному значенні $x_{\text{вим}}$. Тому друга цифра похибки звичайно не вносить суттєвих змін у результат. Наприклад, запис $v = (1,40352 \pm 0,023)$ м/с є не зовсім вдалим. Бажано записати $\Delta v = 0,03$ м/с та $v = (1,40 \pm 0,03)$ м/с.

Які цифри числа називають значущими? За В.М. Брадїсом, *значущими цифрами* числа називають всі його цифри, окрім нулів, які стоять зліва від першої ненульової цифри, та нулів, які стоять у кінці числа, якщо вони замінюють невідомі або відкинуті цифри.

Приклад 1.

– Електрохімічний еквівалент алюмінію $k = 0,0936$ мг/Кл. В цьому числі три значущі цифри.

– Питомий опір цинку при деякій температурі $\rho = 0,060 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Це число задано з точністю до тисячних, тому останній нуль є значущим; число має дві значущі цифри.

– При вимірюванні тиску газу в посудині отримали $p = 2500$ Па. Якщо це число задане з точністю до сотень, то два нулі є незначущими (вони стоять замість невідомих цифр).

В останньому прикладі, щоб з'ясувати кількість значущих цифр, треба було додатково знати, з якою точністю задане число. В подібних випадках слід користуватися стандартною формою запису числа або ж слід перейти до кратних одиниць. Отже, в нашому прикладі виміряне значення тиску треба записати так: $p = 2,5 \cdot 10^3$ Па або $p = 2,5$ кПа. Якщо ж вимірювання було проведене з точністю до одиниць Па, то запис має бути таким: $p = 2,500 \cdot 10^3$ Па (два нулі в цьому випадку – значущі цифри).

Які цифри числа називають правильними? У фізиці користуються поняттям “правильна цифра” у вузькому значенні: цифра n -го розряду називається *правильною*, якщо абсолютна похибка не перевищує половини одиниці цього розряду. У таблицях фізичних величин, у математичних таблицях значення записані лише правильними цифрами. Наприклад, у знайденому з таблиці густин значенні густини міді $8,93 \cdot 10^3$ кг/м³ цифра 3 в

розряді сотих – правильна. Отже, межа абсолютної похибки числа $8,93 \cdot 10^3$ дорівнює $\Delta\rho = \frac{0,01}{2} \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 0,005 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тепер можна вказати інтервал значень, який містить істинне значення густини міді (при певних умовах): $\rho = (8,930 \pm 0,005) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Якщо ж абсолютна похибка числа перевищує половину одиниці останнього розряду у наближеному числі, то цифру цього розряду називають *сумнівною*. Так, у виразі $v = (0,56 \pm 0,02) \text{ м/с}$ цифра 5 є правильною, а цифра 6 – сумнівна.

*Як оцінити межі абсолютної Δ та відносної ε похибок? У першу чергу це залежить від способу отримання числового результату, за яким вимірювання поділяють на *прямі, непрямі (посередні) та сумісні* (рис. 0.2).*

Прямими називають вимірювання, результат яких отримують безпосередньо за допомогою вимірювального приладу або міри.

Непрямими (посередніми) називають вимірювання, результат яких отримують на основі розрахунків.

Сумісними називають вимірювання двох або кількох неоднорідних величин, з метою знаходження функціональної залежності між ними.

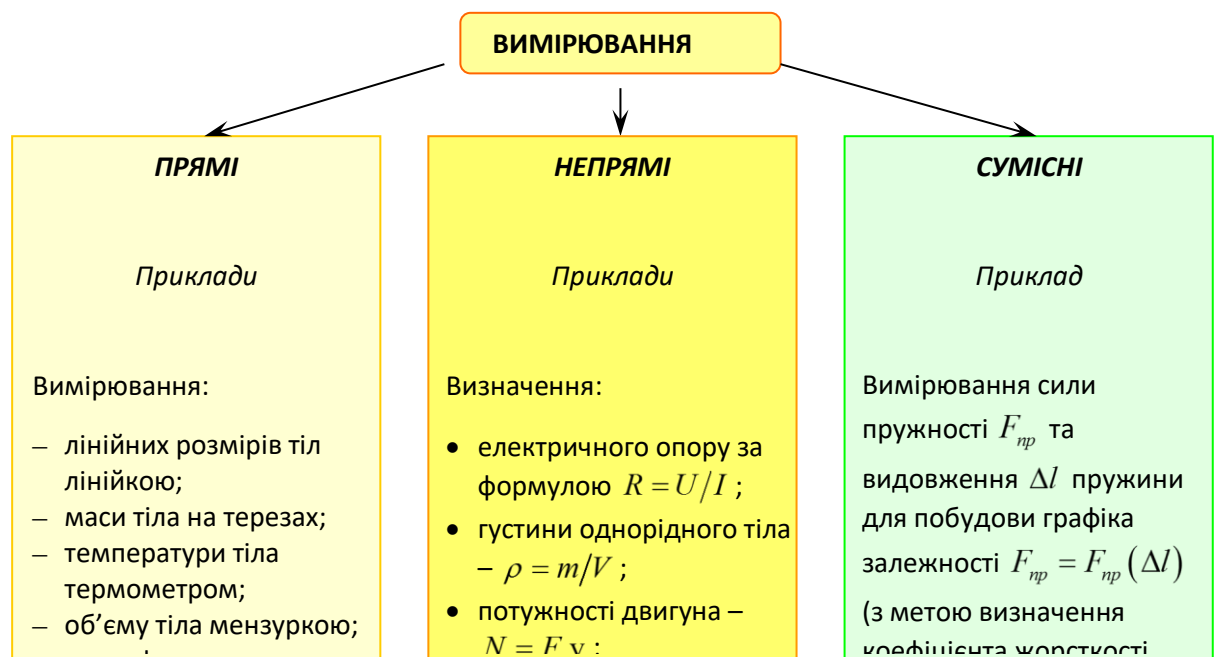


Рис. 0.2. Класифікація вимірювань за способом отримання числового результату

Похибки прямих вимірювань.

Відповідно до *причин виникнення* похибки вимірювань поділяють на *систематичні, випадкові та промахи*.

Систематичними називають похибки, які при повторних вимірюваннях залишаються постійними або змінюються за деяким законом. Наприклад, до ввімкнення амперметра сила струму в електричному колі була дещо більшою. Різниця між силою струму у колі до ввімкнення амперметра і його показами і є систематичною похибкою.

За походженням систематичні похибки поділяють на групи.

- *Похибки методу.* Вони виникають завдяки недосконалості вибраного методу вимірювань та наявності певних припущень та спрощень.

Як приклад, вкажемо на похибку методу вимірювання електричного опору резистора за допомогою амперметра і вольтметра (рис. 0.3). У цьому випадку опір визначають за формулою $R=U/I$, де U – спад напруги на резисторі R , I – сила струму в ньому. Однак, ввімкнутий за схемою *а)* амперметр вимірює силу струму не в резисторі, а сумарну силу струмів у резисторі і у вольтметрі. А вольтметр, ввімкнутий за схемою *б)*, вимірює напругу не на резисторі, а на ділянці, до якої входить резистор і амперметр. Похибку даного методу можна зменшити, якщо вибрати вольтметр із опором, значно більшим R , а амперметр з опором, значно меншим R .

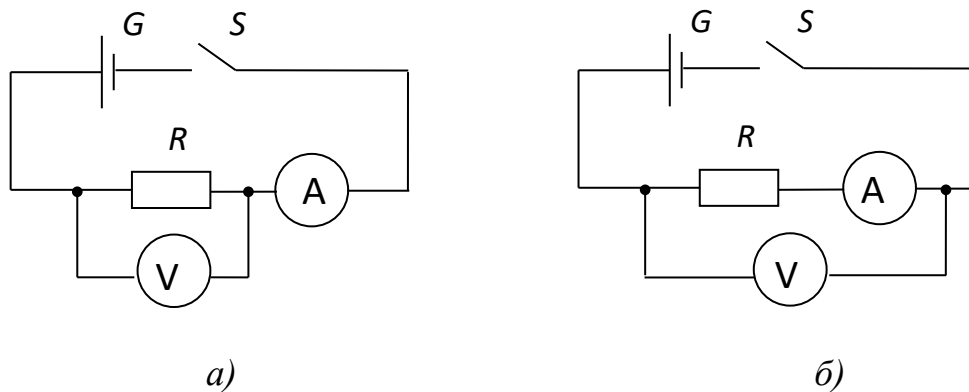


Рис. 0.3. Схеми вимірювання опору резистора методом амперметра і вольтметра

- *Інструментальні похибки.* Вони виникають через недосконалість конструкції засобів вимірювань та неточність їх виготовлення, через зношення (старіння) та несправність вимірювальних приладів.

- *Похибки, пов'язані з неправильним використанням приладів.* Так, деякі прилади потребують вертикального, інші – горизонтального встановлення; інколи прилад потрібно встановити під деяким кутом до горизонту. Зрозуміло, що за умови правильної експлуатації вимірювальних приладів розглядувані похибки не виникають.

- *Похибки, обумовлені зовнішнім несприятливим впливом* на засоби та об'єкти вимірювання (температура, атмосферний тиск, вологість повітря, сторонні електричні і магнітні поля тощо).

- *Похибки відліку.* Такі похибки виникають через недостатньо точне відлічування показів засобів вимірювань.

Випадковими називають похибки, які змінюються випадковим чином при повторних вимірах однієї і тієї ж величини. Їх виникнення пов'язане з дією випадкових факторів, які неможливо усунути у процесі експерименту. Наприклад, при зважуванні одного і того ж самого тіла на одних і тих самих терезах, як правило, отримують дещо різні значення маси. Це можна пояснити тим, що на встановлення рівноваги впливають тертя коромисла на осі та потоки повітря. При вимірюванні струмів і напруг у колі, що живиться від мережі, на результати впливає нестабільність її напруги. При вимірюванні діаметра циліндричного провідника мікрометром різні покази виникають за рахунок того, що при виготовленні провідника його діаметр у різних місцях виявився різним та й форма його не є строго циліндричною.

Промахи – похибки, які суттєво перевищують систематичні та випадкові похибки. Їх причинами, як зазвичай, є *помилки* спостерігача, несправність засобів вимірювань. Промахи виявляються при повторних вимірюваннях, відповідні результати відкидаються. Тому, якщо умови проведення дослідів дозволяють, ніколи не слід обмежуватися *одним* виміром.

Похибки при прямих однократних вимірюваннях. У лабораторних роботах найчастіше проводяться *однократні прямі* вимірювання. Похибка такого вимірювання складається з *похибки засобу вимірювання* (приладу, інструмента, міри) Δ_{np} (її ще називають *інструментальною похибкою*) та *похибки відліку* $\Delta_{відл}$:

$$\Delta = \Delta_{np} + \Delta_{відл} . \quad (0.2)$$

Інструментальні похибки поділяють на *основні* – допустимі похибки вимірювальних приладів та *додаткові*, які виникають через зношення, старіння та несправність засобів вимірювань. Основні інструментальні похибки не можна усунути (ввести поправки на них в умовах навчальної лабораторії теж, як правило, неможливо). Додаткові ж інструментальні похибки мають бути усунені (прилади можна вивіряти та полагодити) або на них слід ввести *поправки* (під *поправкою* розуміють значення величини, яке треба додати до отриманого при вимірюванні значення величини з метою виключення систематичної похибки).

Наприклад, стрілка амперметра при відсутності струму встановлюється не на нульовій позначці, а на позначці 0,1 А. В цьому випадку до виміряного таким приладом значення, скажімо 1,4 А, слід додати поправку – 0,1 А, при цьому результат виміру становитиме $I = 1,4 \text{ А} + (-0,1 \text{ А}) = 1,3 \text{ А}$.

Основні похибки засобів вимірювання визначаються при їх виготовленні на заводі. Ці похибки можна знайти за паспортними даними засобів вимірювання або з довідникової літератури.

Однак похибка прямого однократного вимірювання залежить не лише від точності конкретного приладу. Певна неточність виникає і при зчитуванні показів приладу (зокрема через округлення показів до заданої точності), адже точно визначити відстань від покажчика (стрілки) до штриха (риски) шкали неможливо. З цим і пов'язана *похибка відліку* $\Delta_{\text{відл}}$. Як її врахувати?

Як правило, за межу похибки відліку приймають найменше значення, яке можна визначити або зчитати на даній шкалі. Так, при ширині поділки 1 – 2 мм межу похибки відліку беруть рівною половині ціни поділки C :

$$\Delta_{\text{відл}} = C/2.$$

Якщо ж виявляється можливою окомірною оцінка часток поділки, то для надійності вважають $\Delta_{\text{відл}}$ рівною ціні частки (а не половині ціни частки).

Похибки при зважуванні. Дещо складніше оцінити похибку при використанні терезів. Потрібно, по-перше, врахувати основну похибку терезів $\Delta_{\text{терезів}}$, яка залежить від навантаження; по-друге, основну похибку гир $\Delta_{\text{всіх гир}}$ та, по-третє, похибку підбору гир $\Delta_{\text{підбору гир}}$. Отже, при прямому вимірюванні маси на терезах межа абсолютної похибки

$$\Delta = \Delta_{\text{терезів}} + \Delta_{\text{всіх гир}} + \Delta_{\text{підбору гир}}.$$

Залежність основної похибки терезів певної марки від навантаження та межі похибок гир подаються у паспортних (або довідникових) даних. Похибка підбору гир $\Delta_{\text{підбору гир}}$ є аналогічною похибці відліку і дорівнює половині маси найменшої гирі, що знаходиться на терезах (або яка виводить терези з рівноваги).

Похибки електровимірювальних приладів. Для електровимірювальних приладів інструментальна похибка задається за допомогою числа, яке називається *класом точності* γ . *Клас точності* (інша назва, зведена похибка вимірювального приладу) визначає межу абсолютної похибки даного приладу, виражену у відсотках від діапазону A шкали:

$$\gamma = \frac{\Delta_{\text{пр}}}{A} \cdot 100\%. \quad (0.3)$$

Наприклад, якщо клас точності міліамперметра $\gamma = 4$, а межа вимірювання цим приладом 250 мА, то межа абсолютної похибки даного приладу складе 4% від 250 мА, тобто $\Delta_{\text{пр}} = 10$ мА на всій шкалі.

Отже, якщо клас точності γ відомий, можна знайти межу абсолютної основної похибки приладу за формулою:

$$\Delta_{\text{пр}} = \frac{\gamma \cdot A}{100}.$$

Так, для вольтметра з межею вимірювання 2 В і класом точності $\gamma = 2,5$ отримаємо:

$$\Delta_{\text{в}} = \frac{2 \text{ В} \cdot 2,5}{100} = 0,05 \text{ В}.$$

Відносна ж похибка ε при вимірюванні фізичної величини даним приладом тим більша, чим меншим є значення вимірюваної величини порівняно з діапазоном всієї шкали. Дійсно, відносну похибку конкретного вимірюваного значення x ($x < A$) оцінюють так:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{np}}{x} \cdot 100\%.$$

Помноживши і поділивши останній вираз на A , отримаємо з урахуванням (0.3):

$$\varepsilon = \frac{A}{x} \cdot \frac{\Delta_{np}}{A} \cdot 100\% = \gamma \cdot \frac{A}{x}.$$

З останньої формули видно, що похибка вимірювання залежить не лише від класу точності приладу, але й від того, в якій частині його шкали знаходиться значення вимірюваної величини. Тому, бажано, *так* вибирати прилад, щоб значення вимірюваної величини відповідали другій половині шкали приладу.

Клас точності приладу звичайно вказують в його паспорті або безпосередньо на шкалі приладу. Для всіх держав діють єдині значення класів точності та їх позначення на шкалах приладів. Так, існують стрілочні прилади таких класів: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Зрозуміло, що чим менше клас, тим точніше прилад.

Похибки при вимірюванні часу секундоміром. Секундомір (механічний або електронний) – приклад приладу, для якого можлива похибка відліку дорівнює не півціни поділки, а всій ціні поділки (зокрема для секундоміра кишенькового типу $\Delta_{відл} = 0,2$ с). Пояснюється це тим, що відлік часу відбувається “стрибками”: секундна стрілка механічного секундоміра не зупиняється між штрихами, а покази електронного секундоміра складають дискретний спектр.

Зазначимо, що обидві складові Δ_{np} та $\Delta_{відл}$ похибки прямого вимірювання (0.2) слід враховувати лише у випадку, коли їх значення є близькими одне до одного. Якщо ж Δ_{np} та $\Delta_{відл}$ значно відрізняються, то меншою похибкою нехтують. При не дуже точних вимірюваннях так поступають, коли похибки відрізняються більш ніж у *чотири* рази.

При плануванні прямих вимірювань дуже важливо правильно вибрати засоби вимірювання. Не завжди приладом з меншою інструментальною похибкою можна отримати більш точний результат. Так, уявимо собі, що у лабораторній роботі “Дослідження руху тіла, кинутого під кутом до горизонту” замість рулетки з основною похибкою $\Delta_p = 1,0$ см використовується лінійка з межею вимірювання 10 см і основною похибкою $\Delta_l = 1$ мм. На перший погляд, логіка у такій заміні є – основна похибка лінійки у 10 разів менше похибки рулетки. Однак при вимірюванні дальності польоту за допомогою лінійки суттєву роль відіграє та обставина, що довжина лінійки є значно

меншою за дальність польоту. Тому виникає необхідність виконати не одне, а кілька вимірів. Це призведе до збільшення похибки, і вона може виявитися більшою ніж сума $\Delta_n + C/2 = 1,5 \text{ мм}$ і, скоріш за все, буде більшою 10 см при досить великій дальності.

Похибки при прямих багатократних вимірюваннях. Часто результати прямих вимірів певної фізичної величини при повторенні досліду у незмінних умовах змінюються випадковим чином, і різниця між цими результатами перевищує суму похибок приладу Δ_{np} та відліку $\Delta_{відл}$. Як вже зазначалося, це обумовлюється дією випадкових факторів, які неможливо усунути у процесі експерименту. Відповідні похибки називаються *випадковими*. Виникають запитання: якщо при кожному вимірі отримуємо новий результат, то що слід прийняти за наближене значення вимірюваної величини та як оцінити межу випадкової похибки вимірювання?

Якщо з'являються випадкові похибки, то для їх врахування виміри повторюють кілька разів і за наближене значення вимірюваної величини приймають *середнє арифметичне* результатів окремих вимірів. Адже можна показати, що середнє арифметичне дає більш надійний результат ніж окремі виміри. Це пов'язано з тим, що при обчисленні середнього арифметичного випадкові похибки у бік завищення та у бік заниження результату найкращим чином компенсують одна одну.

Нехай проведено n вимірів і отримано спектр значень вимірюваної величини:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n;$$

тоді за результат вимірювання приймається середнє арифметичне значення результатів окремих вимірів (позначається: $x_{сер}$, $\langle x \rangle$, $\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (0.4)$$

Покажемо, що середнє арифметичне дає більш надійний результат ніж окремі виміри, вважаючи, що вимірювання відбуваються в однакових умовах.

Окремі виміри дають неоднакові значення вимірюваної величини. Результат кожного виміру залежить від багатьох випадкових причин. Тому ми можемо розглядати можливі результати n окремих вимірів як випадкові величини $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ці величини мають однаковий *розподіл імовірностей* (виміри проводяться за однаковою методикою та одними й тими ж самими приладами), а, отже, і однакові числові характеристики. Крім того, вони є *взаємно незалежними* (результат кожного окремого виміру не залежить від решти вимірів).

Як відомо, мірами розсіювання випадкової величини X виступають дисперсія $D(X) \equiv \overline{(X - \bar{X})^2}$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) \equiv \sqrt{D(X)}$. Дисперсія середнього арифметичного $D(\bar{X})$ n однаково розподілених взаємно

незалежних випадкових величин в n разів менше дисперсії D кожної з величин:

$$D(\bar{X}) = D/n. \quad (0.5)$$

Дійсно, користуючись властивостями дисперсії (сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його в квадрат; дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі дисперсій доданків), маємо

$$D(\bar{X}) = D \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2}.$$

Прийнявши до уваги, що дисперсія кожної з величин дорівнює D , отримуємо $D(\bar{X}) = D/n$.

За означенням середнього квадратичного відхилення отримуємо

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{D/n} = \sigma/\sqrt{n}, \quad (0.6)$$

де σ – середнє квадратичне відхилення кожної величини.

Отже, розсіяння середнього арифметичного незалежних випадкових величин є меншим, ніж розсіяння кожної окремої величини. Цим пояснюється, що середнє арифметичне значень окремих вимірів виявляється більш близьким до істинного значення вимірюваної величини, ніж результат окремого виміру. Останнє і означає, що середнє арифметичне кількох вимірів дає більш надійний результат, ніж окремий вимір. При цьому, як видно з (0.5) або (0.6), зі збільшенням числа n вимірів розсіяння середнього арифметичного значень цих вимірів зменшується, тобто середнє арифметичне стає більш близьким до істинного значення вимірюваної величини. Таким чином, збільшуючи число вимірів, можна отримати більш надійний результат.

У теорії ймовірностей доводиться, що при нескінченному збільшенні числа n незалежних вимірів середнє арифметичне результатів цих вимірів прямує до істинного значення x_{icm} :

$$\bar{X} \rightarrow x_{icm} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Іншими словами, при *досить великому* числі вимірів майже достовірно, що їх середнє арифметичне $\bar{x}$ як завгодно мало відрізняється від істинного значення x_{icm} вимірюваної величини.

З'ясуємо умови, при яких дане твердження є справедливим. Воно є наслідком *теорема Чебишева*. Наведемо її без доведення.

Нехай маємо нескінченну послідовність $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ незалежних випадкових величин з *однаковими математичними сподіваннями* m і *обмеженими дисперсіями* $D(X_i) < c = const$. Тоді для будь-якого додатного α імовірність нерівності

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m \right| < \alpha$$

наближається до одиниці при $n \rightarrow \infty$.

Іншими словами, в умовах теорема є справедливою рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \alpha\right) = 1.$$

Вже зазначалося, що звичайно для вимірювання певної фізичної величини проводять кілька вимірів і середнє арифметичне їх результатів приймають за наближене значення вимірюваної величини. Теорема Чебишева вказує на умови, при яких даний спосіб вимірювання є застосовним.

Так, нехай потрібно виміряти певну фізичну величину X . Розглядатимемо результати кожного виміру як випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$. До цих величин можна застосовувати теорему Чебишева, якщо

- вони незалежні;
- мають однакові математичні сподівання $M(X_i) = m$;
- їх дисперсії $D(X_i)$ є обмеженими.

Перша умова виконується, якщо результат кожного виміру не залежить від результатів інших. Друга умова виконується, якщо виміри проведені без систематичних (одного знака) похибок. В цьому випадку математичні сподівання всіх випадкових величин однакові і дорівнюють істинному значенню. Третя вимога виконується, якщо прилад забезпечує певну точність вимірювання. При цьому дисперсії окремих вимірів визначатимуться точністю приладу. Хоча результати окремих вимірів різні, їх розсіяння обмежені.

Згідно з теоремою Чебишева, середнє арифметичне результатів вимірювань, яке теж є випадковою величиною, при збільшенні n майже перестає бути випадковою і все більше наближається до сталої m . Тим самим виправдовується рекомендований у практиці спосіб одержання більш точних результатів вимірювання – збільшення їх числа.

Для прикладу розглянемо результати серії дослідів з вимірювання дальності польоту кульки, кинуті горизонтально з певною початковою швидкістю v_0 з деякої висоти h над поверхнею стола (рис. 0.4).

Якщо скористатися графічним зображенням результатів вимірювання дальності польоту у досить великій серії дослідів (рис. 0.5, *a*), то одразу ж буде виявлено, що, не дивлячись на випадковий характер кожного результату, у всій серії дослідів проявляється певна закономірність. На осі ординат (рис. 0.5, *a*) відкладено відносне число (долю) дослідів (відношення певного числа дослідів до загальної їх кількості), виражене у відсотках. У розглядуваному випадку загальне число дослідів дорівнювало 100, тому відносне число певної кількості дослідів у відсотках буде дорівнювати їх абсолютній кількості. З рисунка видно, що в одному досліді зі 100 дальність польоту перевищувала 149 см, в одному – була більшою 148 см, але меншою 149 см, у шести – дальності польоту лежали у межах від 147 см до 148 см і т.д. Розглянутий рисунок називається *гістограмою*.

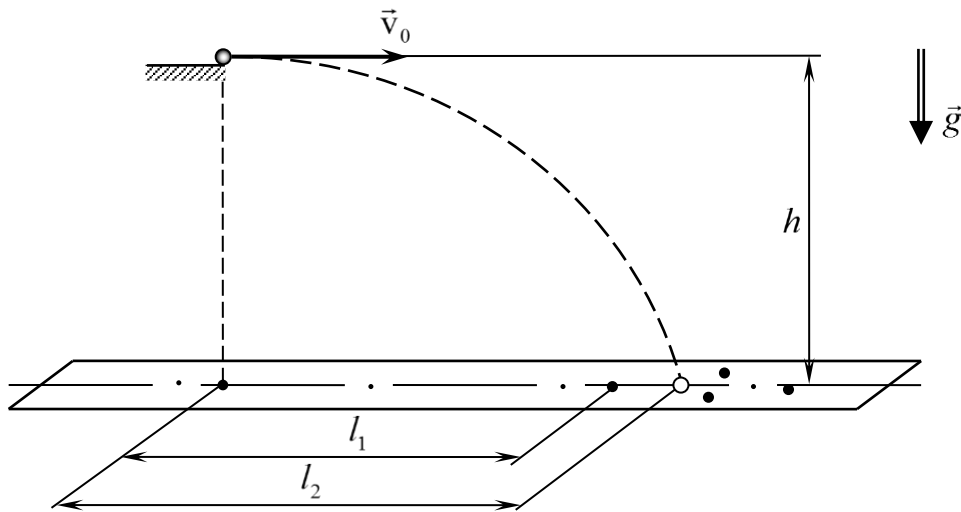


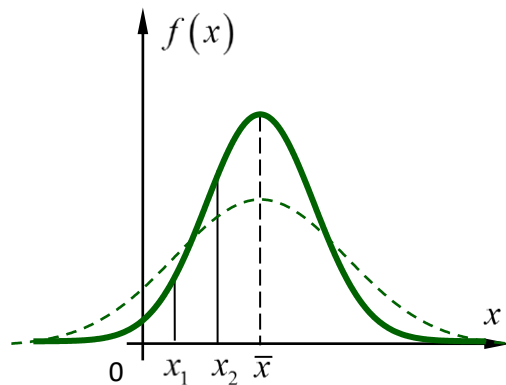
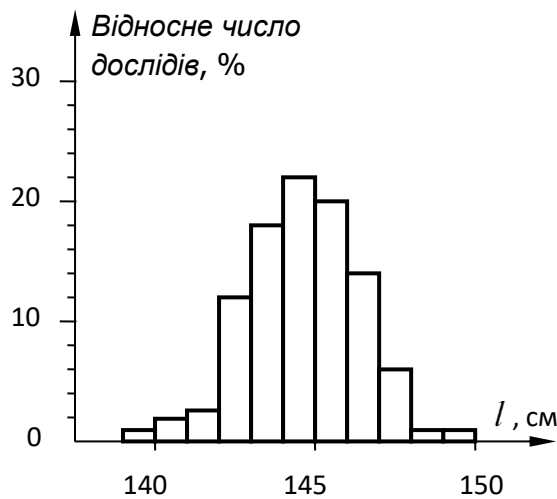
Рис. 0.4. Вимірювання дальності польоту кульки, кинутій горизонтально

Форму гістограми, яку отримують при невеликому числі вимірів, неможливо передбачити наперед. Але теорія ймовірностей дозволяє обчислити форму граничної гладкої кривої, до якої прямують гістограми при необмеженому збільшенні числа вимірів ($n \rightarrow \infty$) і зменшенні ширини інтервалу ($\Delta l \rightarrow 0$). Ця крива називається кривою Гаусса (рис. 0.5, б). Вона має дзвонувату форму з максимумом при $x = \bar{x}$. Доля (відносне число) вимірів, значення яких лежать у деякому інтервалі ($x_1 < x < x_2$), визначається площею під відповідною ділянкою гауссової кривої. Аналітичний вираз цієї кривої:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (0.7)$$

де $\bar{x}$ – середнє значення величини x , $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$;

σ – середнє квадратичне відхилення, яке виступає мірою розсіювання значень випадкової величини відносно $\bar{x}$, $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$.



а)

б)

Рис. 0.5. Гістограма результатів вимірювання дальності польоту (а) та гауссова крива (б)

Розподіл випадкової величини X , густина ймовірності якого описується формулою (0.7), називається *гауссівським* або *нормальним*. Чому випадкова помилка має розподіл близький до нормального? Відповідь на це запитання дає *центральна гранична теорема* теорії ймовірностей (теорема Ляпунова): якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, при цьому вплив кожної з них на всю суму є досить малим, то X має розподіл, близький до нормального.

При вимірюванні певної фізичної величини ми отримуємо наближене її значення, оскільки на результат вимірювання впливають багато незалежних факторів. Кожен з них породжує незначну “частинну похибку”. Однак, у зв’язку з тим, що число цих факторів дуже велике, їх сукупна дія обумовлює вже помітну “сумарну похибку”. Розглядаючи сумарну похибку як суму дуже великого числа взаємно незалежних частинних похибок, згідно з теоремою Ляпунова можна дійти висновку, що сумарна випадкова похибка має розподіл, близький до нормального. Досвід підтверджує справедливості цього твердження.

При досить точних вимірюваннях крива Гаусса суттєво відрізняється від нуля лише в області малих відхилень від $\bar{x}$. При вимірюваннях з низькою точністю “ширина дзвона” збільшується (пунктирна лінія на рис. 0.5, б), а його максимум стає нижче. Площа ж під кривою не залежить від якості вимірювань. Проте, як при поганих, так і при добрих вимірюваннях можливо випадково отримати дуже добрі або далеко не досить добрі значення. Залежно від якості вимірювань такі значення будуть мати місце частіше або рідше.

Якщо провести на рис. 0.6 дві вертикальні прямі на однакових відстанях $\pm\sigma$ від $\bar{x}$, то можна показати, що площа утвореної криволінійної трапеції дорівнюватиме $\approx 0,68$. Це означає, що при досить великому числі вимірів приблизно 68% всіх результатів (виміряних значень) виявляться в інтервалі

$$(\bar{x} \pm \sigma). \quad (0.8)$$

Іншими словами, з імовірністю 0,68 можна сподіватися на те, що результат окремого виміру попаде в інтервал $(\bar{x} \pm \sigma)$.

Якщо ж провести вертикальні прямі на відстанях $\pm 3\sigma$, то вже $\approx 99,7\%$ всіх виміряних значень попадуть в інтервал

$$(\bar{x} \pm 3\sigma). \quad (0.9)$$

Тобто з імовірністю $\approx 99,7\%$ результат окремого виміру попадає в інтервал $(\bar{x} \pm 3\sigma)$. Як правило, саме останній інтервал використовують на практиці. Зазначимо також, що в інтервал $(\bar{x} \pm 2\sigma)$ попадають $\approx 95\%$ виміряних значень.

З розглянутого випливає, що ймовірність появи результату виміру *поза* інтервалом $(\bar{x} \pm 3\sigma)$ є дуже малою, а саме дорівнює $\approx 0,0027$. Це означає, що лише у 0,27% випадків таке може відбутися. Такі події, виходячи з *принципу неможливості малоїмовірних подій* можна вважати практично неможливими. У цьому полягає правило “трьох сигм”: *якщо виміряні значення розподілені за нормальним законом, то абсолютна величина відхилення значення від середнього значення не перевищує потроєного середньоквадратичного відхилення 3σ .*

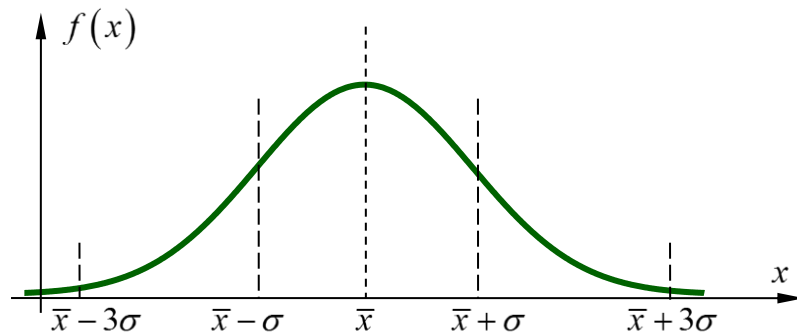


Рис. 0.6. Розподіл виміряних значень

Отже, за допомогою середньоквадратичного відхилення σ можна оцінити інтервал, в який із заданою ймовірністю (надійністю) попадають результати окремого виміру. Як оцінити σ за даними n вимірів?

У теорії ймовірностей показується, що оцінкою середньоквадратичного відхилення σ за експериментальними даними може виступати *вибіркове середньоквадратичне відхилення* (позначатимемо його далі також σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (0.10)$$

Більш точною оцінкою середньоквадратичного відхилення за даними n вимірів виступає “виправлене” середньоквадратичне відхилення s :

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (0.11)$$

Порівнюючи формули (0.10) та (0.11), бачимо, що вони відрізняються лише знаменниками. При достатньо великій кількості n вимірів вибіркове і виправлене середньоквадратичні відхилення відрізняються мало.

Таким чином, обчисливши середнє арифметичне $\bar{x}$ та оцінивши середнє квадратичне відхилення за формулою (0.10) (або (0.11)), можна вказати інтервал

$$\bar{x} \pm 3\sigma,$$

в який з імовірністю 99,7% попадають результати будь-якого окремого дослід. В цьому випадку межею випадкової похибки кожного окремого дослід є

$$\Delta x_{\text{вип}} = 3\sigma. \quad (0.12)$$

Як уже зазначалося, середнє арифметичне значення величини, знайдене за результатами серії з n дослідів, взагалі-то кажучи, відрізняється від істинного значення вимірюваної величини. Так, якщо провести кілька таких серій вимірювань (кожна серія складається з n дослідів), то середнє арифметичне буде змінюватися від серії до серії, групуючись навколо істинного значення.

При цьому зрозуміло, що відхилення середнього арифметичного від істинного значення буде меншим, ніж відхилення кожного окремого дослід. Можна показати, що межа випадкової похибки середнього арифметичного $\Delta \bar{x}$, отриманого у серії з n дослідів, у $\sqrt{n}$ разів менше за межу випадкової похибки кожного окремого дослід $\Delta x_{\text{вип}}$ серії:

$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x_{\text{вип}}}{\sqrt{n}} = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (0.13)$$

Отже, результат прямих багатократних вимірювань можна записати у вигляді

$$x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x} = \bar{x} \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (0.14)$$

Запис (0.14) означає, що з імовірністю $\approx 0,997$ істинне значення вимірюваної величини виявиться покритим інтервалом

$$\left(\bar{x} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Приклад. При вимірюванні гальмівного шляху l були отримані такі 10 результатів: 39,7 см; 37,5 см; 40,1 см; 43,2 см; 36,4 см; 38,1 см; 41,6 см; 39,2 см; 40,1 см; 39,5 см. Знайти межу випадкової похибки середнього арифметичного.

Розв'язання. Знаходимо середнє арифметичне значення гальмівного шляху:

$$\bar{l} = \frac{39,7 + 37,5 + 40,1 + \dots + 39,5}{10} \text{ см} = 39,5 \text{ см}.$$

Оцінимо середнє квадратичне відхилення за допомогою вибіркового середнього квадратичного відхилення (0.10):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(39,7 - 39,5)^2 + (37,5 - 39,5)^2 + \dots + (39,5 - 39,5)^2}{10}} \text{ см} = 3,2 \text{ см}.$$

Межу випадкової похибки окремого досліду знайдемо за допомогою (0.12):

$$\Delta l_{\text{вип}} = 3 \cdot 3,2 \text{ см} = 9,6 \text{ см},$$

а межу випадкової похибки середнього значення $\Delta \bar{l}$ гальмівного шляху за формулою (0.13):

$$\Delta \bar{l} = \frac{9,6 \text{ см}}{\sqrt{10}} \approx 3,0 \text{ см}.$$

Отже, з імовірністю $\approx 99,7\%$ можна стверджувати, що середнє значення 39,5 см відрізняється від істинного не більше ніж на 3,0 см. Іншими словами, з імовірністю майже рівною одиниці істинне значення буде охоплене інтервалом: (36,5 см; 42,5 см). Результат вимірювання гальмівного шляху можна також подати у вигляді: $l = (39,5 \pm 3,0) \text{ см}$.

З формули (0.13) випливає, що межа випадкової похибки середнього прямує до нуля при збільшенні числа n дослідів у серії. Проте це не означає, що необмежено збільшуючи число вимірів, можна проводити абсолютно точні вимірювання. Адже прилади, за допомогою яких ми отримуємо результати також мають похибки, які ми поки що не враховували. Тому похибка середнього арифметичного при необмеженому збільшенні числа дослідів прямує до похибки приладу.

Таким чином, необхідно ретельно продумати *скільки* дослідів (вимірів) треба провести при вимірюванні даної фізичної величини. Ніколи не слід обмежуватися однократним виміром. Завжди потрібно зробити повторний *контрольний* вимір. Якщо результати вимірів співпали, то на цьому можна зупинитися. Якщо ж між результатами виявилася різниця, то слід збагнути у чому справа: у тому, що один вимір було проведено неправильно, або у тому,

що результати розбігаються через випадкові похибки. У першому випадку потрібно відкинути невірний результат, а у другому – слід розібратися з причиною розходження результатів. Якщо ця причина може бути усуненою шляхом регулювання приладу, це потрібно зробити.

У випадку, коли усунути причину розходження результатів не вдається, слід провести цілу серію повторних вимірів (дослідів). При цьому число дослідів у серії повинно бути таким, щоб випадкова похибка середнього арифметичного приблизно дорівнювала б похибці приладу або була б менше неї. Подальше збільшення числа дослідів є недоцільним.

Повна похибка вимірювання. Нехай за результатами вимірювань певної фізичної величини були оцінені випадкова $\Delta_{\text{вип}}$ та систематична $\Delta_{\text{сист}}$ похибки вимірювання (нагадаємо, що остання включає похибку приладу $\Delta_{\text{пр}}$ та похибку відліку $\Delta_{\text{відл}}$). Межу *повної (сумарної)* похибки Δ вимірювання в цьому випадку можна оцінити так:

$$\Delta = \Delta_{\text{вип}} + \Delta_{\text{сист}} = \Delta_{\text{вип}} + \Delta_{\text{пр}} + \Delta_{\text{відл}}. \quad (0.15)$$

Як уже зазначалося, якщо певний доданок у (0.15) менше інших приблизно у 4 та більше разів, то ним можна знехтувати.

У теорії ймовірностей показується, що більш точною формулою для оцінки сумарної похибки є:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{\text{вип}}^2 + \Delta_{\text{сист}}^2} = \sqrt{\Delta_{\text{вип}}^2 + \Delta_{\text{пр}}^2 + \Delta_{\text{відл}}^2}.$$

Ця формула є наслідком того, що середнє квадратичне відхилення суми взаємно незалежних випадкових величин дорівнює:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}. \quad (0.16)$$

Остання формула впливає з очевидної властивості дисперсії: дисперсія суми кількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Враховуючи, що $\sigma(X) \equiv \sqrt{D(X)}$, отримуємо (0.16).

Похибки непрямих вимірювань.

При непрямих вимірюваннях значення певної фізичної величини f обчислюють за відомою формулою

$$f = f(x, y, z, \dots).$$

При цьому $x, y, z, \dots$ – незалежні величини, значення яких визначають безпосередньо у досліді (або шляхом розрахунків) і подають у вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad y = \bar{y} \pm \Delta y, \quad z = \bar{z} \pm \Delta z, \quad \dots,$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – межі абсолютних похибок величин x, y, z відповідно.

Найкраще значення величини f при непрямому її вимірюванні визначається через середні значення величин $x, y, z, \dots$:

$$f = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots).$$

Загальні правила обчислення похибок при непрямих вимірюваннях отримують за допомогою диференціального числення. При цьому вважається, що межі абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ завжди *малі* порівняно із значеннями відповідних вимірюваних величин. Розглянемо спочатку найпростіші випадки.

- Якщо $f = x \pm y$, то $\Delta f = \Delta x + \Delta y$.

Дійсно, диференціал функції f запишеться у вигляді

$$df = dx \pm dy.$$

За умови, що межі абсолютних похибок величин x та y є досить малими порівняно із значеннями цих величин, можна наближено замінити диференціали в останній рівності на межі відповідних абсолютних похибок:

$$df \approx \Delta f, \quad dx \approx \Delta x, \quad dy \approx \Delta y.$$

При цьому для оцінки межі абсолютної похибки Δf знак “–” треба опустити. Отже, $\Delta f = \Delta x + \Delta y$. Межа відносної похибки $\varepsilon_f = \Delta f / f$.

- Якщо величина f визначається добутком двох інших величин x та y або їх відношенням:

$$f = xy \quad \text{або} \quad f = \frac{x}{y},$$

то спочатку легше оцінити межу відносної похибки ε_f , яка в цих випадках визначатиметься за формулою:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (0.17)$$

Межу абсолютної похибки Δf у цьому разі можна оцінити так:

$$\Delta f = \varepsilon_f \cdot f.$$

Для обґрунтування формули (0.17) розглянемо, наприклад, випадок $f = x/y$. Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності:

$$\ln f = \ln x - \ln y.$$

Знайдемо диференціали обох частин:

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

Після наближеної заміни диференціалів в останньому рівнянні відповідними межами абсолютних похибок (за умови їх мализни), а також замінивши знак “мінус” на “плюс”, отримуємо

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y},$$

звідки

$$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

З формули (0.17) випливає, що якщо $f = x^2$, то $\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_x = 2\varepsilon_x$, а для більш загального вигляду степеневої функції $f = Ax^n$ (де A – сталий множник, $\varepsilon_A = 0$), $\varepsilon_f = \varepsilon_A + n\varepsilon_x = n\varepsilon_x$.

Розглянутий прийом можна легко узагальнити на досить поширену у навчальному фізичному практикумі функцію вигляду:

$$f = A \frac{x^l \cdot y^m}{z^n}.$$

Тоді

$$\varepsilon_f = l\varepsilon_x + m\varepsilon_y + n\varepsilon_z.$$

Приклад. Нехай вимірюється питомий опір матеріалу провідника. Тоді $R = \rho \frac{l}{S}$ та $R = U/I$. Якщо провідник має циліндричну форму, то

$$\rho = \frac{US}{\pi l} = \frac{\pi d^2 U}{4I l}.$$

Межа відносної похибки

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_U + \varepsilon_I + \varepsilon_\pi + 2\varepsilon_d + \varepsilon_l = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}.$$

При цьому межу абсолютної похибки можна знайти за формулою $\Delta \rho = \varepsilon_\rho \cdot \rho$.

Загальний випадок. Нехай шукана величина f є функцією інших величин $x, y, \dots$:

$$f = f(x, y, \dots).$$

Повний диференціал функції багатьох змінних

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$$

Після наближеної заміни диференціалів в останній формулі кінцевими приростами – межами абсолютних похибок відповідних величин, та заміни частинних похідних їх абсолютними значеннями, отримаємо формулу для оцінки межі абсолютної похибки величини f :

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots, \quad (0.18)$$

де $\Delta x, \Delta y, \dots$ – межі абсолютних похибок величин $x, y, \dots$ відповідно ($\Delta x, \Delta y, \dots$ – додатні величини). У формулі (0.18) частинні похідні обчислюються при найкращих значеннях $\bar{x}, \bar{y}, \dots$

Приклад. У досліді були виміряні відстань d від точкового об'єкта до збиральної лінзи $d = 0,20 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$ та відстань f від зображення до лінзи $f = 0,40 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$. За цими даними знайти оптичну силу лінзи.

Оптичну силу D лінзи знайдемо за формулою тонкої лінзи $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$,

$$D = \frac{1}{0,2 \text{ м}} + \frac{1}{0,4 \text{ м}} = 7,5 \text{ дптр}.$$

Межу абсолютної похибки ΔD знайдемо, скориставшись формулою (0.18):

$$\Delta D = \frac{\Delta d}{d^2} + \frac{\Delta f}{f^2},$$

$$\Delta D = \frac{0,01 \text{ м}}{(0,2 \text{ м})^2} + \frac{0,01 \text{ м}}{(0,4 \text{ м})^2} \approx 0,31 \text{ дптр}.$$

Отже, згідно з правилами запису результату

$$D = 8,0 \text{ дптр} \pm 0,3 \text{ дптр}, \quad \varepsilon_D = \frac{0,3 \text{ дптр}}{8 \text{ дптр}} \approx 4\%.$$

Як було показано на окремих прикладах, інколи легше спочатку оцінити межу відносної похибки ε_f . Для отримання загальної формули для ε_f прологарифмуємо функцію $f = f(x, y, \dots)$ та знайдемо диференціали обох частин отриманого рівняння:

$$\frac{df}{f} = \frac{\partial \ln f}{\partial x} dx + \frac{\partial \ln f}{\partial y} dy + \dots$$

Після наближеної заміни диференціалів в останньому рівнянні межами абсолютних похибок відповідних величин та заміни частинних похідних їх абсолютними значеннями, отримаємо:

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv \varepsilon_f = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Вище нами було показано, що середнє квадратичне відхилення суми взаємно незалежних випадкових величин дорівнює не сумі середніх квадратичних відхилень цих величин, а кореню квадратному із суми квадратів цих відхилень:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots}$$

Ця обставина дозволяє *уточнити* формули для оцінки похибок при непрямим вимірюваннях. Наведемо ці формули без доведення.

- Нехай значення шуканої величини f знаходиться шляхом додавання декількох інших величин:

$$f = x + y + z + \dots \quad (0.19)$$

Найкраще значення величини f (найбільш близьке до істинного) знаходять при цьому шляхом додавання найкращих значень величин $x, y, z, \dots$ за формулою (0.19).

Межа абсолютної похибки Δf величини f зв'язана з межами абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ формулою

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + \dots}$$

Межі абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ при цьому можуть бути отримані з досліду (якщо величини $x, y, z, \dots$ безпосередньо вимірюються) або знайдені шляхом обчислень (якщо $x, y, z, \dots$ самі отримані в результаті розрахунків).

- Нехай шукана величина f зв'язана з іншими величинами $x, y, z, \dots$ формулою:

$$f = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \cdot \dots, \quad (0.20)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – будь-які числа, цілі або дробові, додатні або від’ємні. Теорія ймовірності показує, що найкраще значення f обчислюється за допомогою (0.20) через найкращі значення $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$, тобто

$$\bar{f} = (\bar{x})^\alpha \cdot (\bar{y})^\beta \cdot (\bar{z})^\gamma \cdot \dots$$

При цьому межа відносної похибки ε_f знаходиться за формулою

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{(\alpha \varepsilon_x)^2 + (\beta \varepsilon_y)^2 + (\gamma \varepsilon_z)^2 + \dots} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta z}{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (0.21)$$

Як і у першому випадку, величини $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ знаходяться безпосередньо з досліду або шляхом розрахунків за допомогою інших величин, які вимірюються вже безпосередньо.

- *Загальний випадок.* Нехай шукана величина f є певною функцією інших величин $x, y, z, \dots$ так, що $f = f(x, y, z, \dots)$.

В цьому випадку межа абсолютної похибки Δf дорівнюватиме

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots}$$

В останній формулі частинні похідні обчислюються при найкращих значеннях величин $x, y, z, \dots$.

Зазначимо, що розрахункова формула для визначення величини f може містити, окрім величин $x, y, z, \dots$, ще й сталі величини. Ними можуть бути математичні константи: $\pi, e, \ln 2$; фізичні константи: елементарний заряд, прискорення вільного падіння, табличні дані тощо. Бажано, щоб відносна похибка значень цих величин була меншою за відповідну похибку вимірюваних величин $x, y, z, \dots$.

Приклад. Нехай об’єм V циліндра визначається за результатами прямих вимірювань його діаметра $d = (3,46 \pm 0,04)$ см та висоти $h = (4,87 \pm 0,05)$ см за допомогою формули

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 h.$$

У вираз для V разом з вимірюваними величинами d і h входить число π , яке ми звичайно округляємо до 3,14. Тому перед тим як проводити обчислення, необхідно з’ясувати, чи достатньо такої точності, щоб похибка цієї константи не впливала на точність визначення об’єму. Розглядаючи π як число, задане з похибкою $\Delta \pi$, для межі відносної похибки згідно з (0.21) отримуємо

$$\varepsilon_V = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2}.$$

Відносна похибка завдання π , тобто величина $\Delta \pi / \pi$, повинна бути меншою за $2(\Delta d / \bar{d})$ і $\Delta h / \bar{h}$. При округленні π до 3,14 ми допускаємо абсолютну похибку $\Delta \pi = 0,002$ (більш точне значення $\pi = 3,141593$), тому

$\Delta\pi/\pi \approx 0,0006$. Цією похибкою можна знехтувати порівняно із $2(\Delta d/\bar{d}) = 2 \cdot 0,04/3,46 \approx 0,024$ і $\Delta h/\bar{h} = 0,05/4,87 \approx 0,011$.

Отже,

$$V = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot (3,46 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2 \cdot 4,87 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 45,77 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Межа відносної похибки об'єму

$$\varepsilon_V \approx \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2} = 2,53 \cdot 10^{-2}.$$

Кінцевий результат: $V = (46 \pm 2) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $\varepsilon_V \approx 3\%$.

Метод меж. Для обробки результатів при непрямих вимірюваннях можна також застосовувати *метод меж*. Згідно з цим методом наближене значення вимірюваної величини знаходять як півсуму нижньої f_{HM} і верхньої f_{BM} її меж:

$$\bar{f} = \frac{f_{\text{BM}} + f_{\text{HM}}}{2},$$

а абсолютну похибку оцінюють як піврізницю цих меж:

$$\Delta f = \frac{f_{\text{BM}} - f_{\text{HM}}}{2}.$$

Самі ж межі f_{BM} і f_{HM} визначають за допомогою розрахункової формули для величини f . При цьому значення f_{BM} округляють з надлишком, а f_{HM} – нестачею до однієї значущої цифри. Кінцевий результат записують у вигляді

$$f = \bar{f} \pm \Delta f.$$

Приклад. Для вимірювання фокусної відстані збиральної лінзи отримано такі результати: відстань від лінзи до точкового об'єкта $d = 10,0 \text{ см} \pm 0,5 \text{ см}$; відстань від лінзи до його зображення $f = 22,0 \text{ см} \pm 0,5 \text{ см}$. Знайдіть фокусну відстань F лінзи із застосуванням методу меж.

Фокусну відстань F лінзи знайдемо з формули тонкої лінзи $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$,

звідки

$$F = 1 / \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f} \right).$$

Знайдемо верхні та нижні межі для d та f :

$$\begin{aligned} d_{\text{BM}} &= 10,0 \text{ см} + 0,5 \text{ см} = 10,5 \text{ см}; & d_{\text{HM}} &= 10,0 \text{ см} - 0,5 \text{ см} = 9,5 \text{ см}; \\ f_{\text{BM}} &= 22,0 \text{ см} + 0,5 \text{ см} = 22,5 \text{ см}; & f_{\text{HM}} &= 22,0 \text{ см} - 0,5 \text{ см} = 21,5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Тепер знаходимо межі для фокусної відстані F :

$$F_{\text{BM}} = 1 / \left(\frac{1}{d_{\text{BM}}} + \frac{1}{f_{\text{BM}}} \right) = 1 / \left(\frac{1}{10,5 \text{ см}} + \frac{1}{22,5 \text{ см}} \right) \approx 7,16 \text{ см},$$

$$F_{\text{HM}} = 1 / \left(\frac{1}{d_{\text{HM}}} + \frac{1}{f_{\text{HM}}} \right) = 1 / \left(\frac{1}{9,5 \text{ см}} + \frac{1}{21,5 \text{ см}} \right) \approx 6,58 \text{ см}.$$

Оцінимо абсолютну похибку

$$\Delta F = \frac{F_{\text{BM}} - F_{\text{HM}}}{2} = \frac{7,16 \text{ см} - 6,58 \text{ см}}{2} = 0,29 \text{ см} \approx 0,3 \text{ см}.$$

Наближене значення фокусної відстані

$$\bar{F} = \frac{F_{BM} + F_{HM}}{2} = \frac{7,16 \text{ см} + 6,58 \text{ см}}{2} = 6,87 \text{ см} \approx 6,9 \text{ см}.$$

Отже, $F = 6,9 \text{ см} \pm 0,3 \text{ см}$.

? Підготовчі вправи.

1. Швидкість світла у вакуумі дорівнює $(299\,792,5 \pm 0,4) \text{ км/с}$, а швидкість звуку у повітрі (при певній температурі) – $(331,63 \pm 0,04) \text{ м/с}$. Що виміряно з більшою точністю?

2. В таблиці наведені значення густини деяких речовин (г/см^3): води – 1,00; спирту – 0,80; молока – 1,03; ртуті – 13,60; гліцерину – 1,26. Скільки значущих цифр у кожному числі?

3. Округліть наступні числа:

а) до двох значущих цифр: 7,82; 1,96; 1,00; 0,0302; 0,999;

б) до трьох значущих цифр: 87 856; 19,995; 78,625; 0,006798; 0,1199;

в) до чотирьох значущих цифр: 60 002 480; 87,99567; 0,0006780456.

4. Наступні значення виразіть в одиницях СІ та запишіть їх у стандартній формі: 12 км; 0,050 км²; 24 мм³; 0,80 г/см³; 22,4 л; 48 мс; 1,60 МН; 6,60 кВ; 101,3 кПа.

5. Результати двох лабораторних робіт були записані так: $\rho = 7,4867058 \pm 0,2 \text{ г/см}^3$; $k = 0,322403 \pm 0,0156 \text{ мг/Кл}$. Запишіть результати у більш коректній формі.

6. Визначте ціну поділки шкали та покази приладів, наведених на рис. 0.7.

7. На рис. 0.8 наведені шкали приладів з однією границею виміру. Запишіть результат вимірювання із зазначенням меж абсолютної та відносної похибок.

Примітка. Клас точності приладу на рис. 0.8, а дорівнює 4, клас точності приладу на рис. 0.8, б знайдіть самостійно.

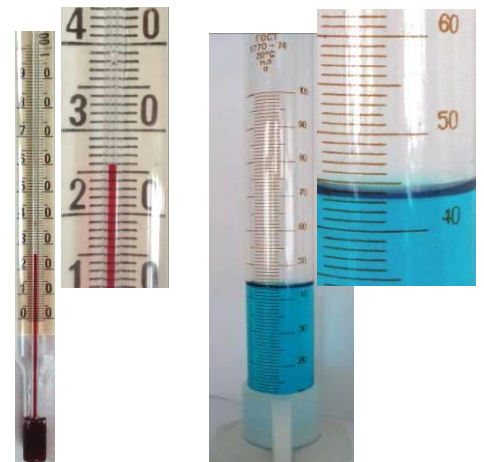
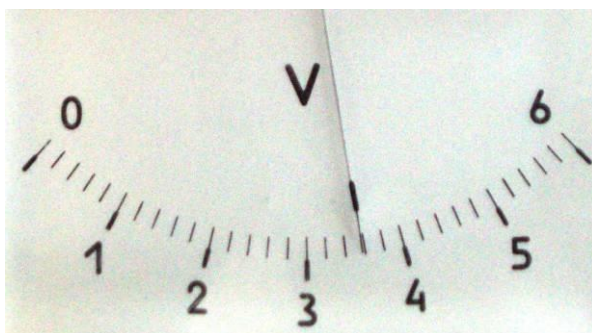


Рис. 0.7. До завдання 6



а)



б)

Рис. 0.8. До завдання 7

8. У процесі вимірювання опору дроту були отримані такі значення (в омах): 5,615; 5,622; 5,624; 5,618; 5,620; 5,633; 5,628; 5,624; 5,613. Знайдіть середнє значення опору та оцініть його точність.

9. Вимірювання маси m та об'єму V бруска дали такі результати: $m = 195,0 \text{ г} \pm 0,5 \text{ г}$; $V = 25,0 \text{ см}^3 \pm 0,5 \text{ см}^3$. Визначте середню густину речовини бруска та оцініть похибку результату.

10. За допомогою лінійки виміряйте площі фігур 1 – 3 (рис. 0.9). Результат подайте із зазначенням меж абсолютної та відносної похибок.

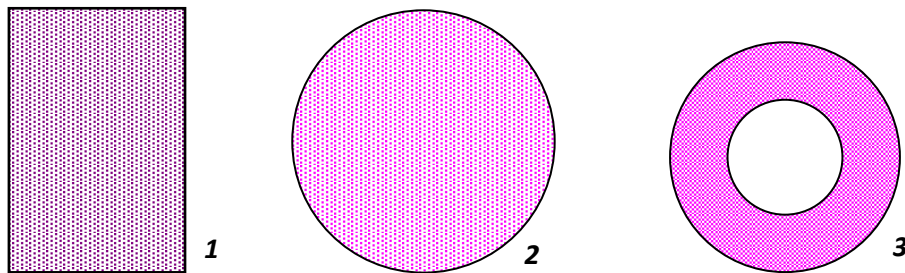


Рис. 0.9. До завдання 10

11*. Оцініть найбільшу відносну похибку при вимірюванні опору за допомогою амперметра та вольтметра з використанням схеми, зображеної на рис. 0.10, якщо прилади показують 25 В і 12,5 А (точно). Межа вимірювання вольтметра 30 В, його клас точності 2,5. Внутрішній опір вольтметра 5 кОм. Межа вимірювання амперметра 15 А, його клас точності 4, внутрішній опір 0,2 Ом.

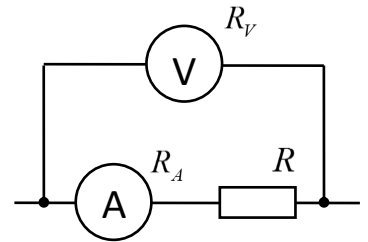


Рис. 0.10. До завдання 11