

ТЕМА 4. ЗАГАЛЬНІ ПІДХОДИ ДО КІЛЬКІСНОЇ ОЦІНКИ РИЗИКУ

1. Об'єктивні методи до кількісної оцінки ризику
2. Кількісна оцінка ризику в абсолютному вираженні
3. Кількісна оцінка ризику у відносному вираженні
4. Нерівність Чебишева для оцінки ймовірності настання небажаних подій

4.1. Об'єктивні методи до кількісної оцінки ризику

Як ми бачили раніше, обґрунтований ризик є необхідним атрибутом економічної стратегії й тактики. Питання в тому, де межа цього виправданого ризику.

Одним з елементів, що визначає величину обґрунтованого ризику є фінансові можливості підприємства. Наприклад, маючи значний обсяг високоліквідних активів та фінансової стійкості, підприємство може дозволити собі певний ризик.

З точки зору можливих наслідків ризикових операцій, економічний ризик поділяється на: прийнятний, критичний і катастрофічний:

Допустимим вважається ризик, в межах якого можливі збитки є меншими за очікуваний прибуток. В цій зоні ризику економічна діяльність має сенс;

Критичний – ймовірність отримання збитків, що перевищують очікуваний прибуток від певної господарської діяльності. Однак, ці збитки є меншими за власні фінансові можливості компанії.

Катастрофічний – можливі втрати перевищують власні фінансові можливості компанії. Наслідком такої ризикованої діяльності може стати її банкрутство.

Для визначення зон ризику, в кожному конкретному випадку необхідно мати як оцінку обсягів можливих збитків, так й співвідношення цієї величини до фінансових можливостей підприємства. Тобто, всебічна оцінка ризику вимагає використання як абсолютних, так й відносних показників.

До сьогоднішнього дня ми розглядали **суб'єктивні методи прийняття рішень** в умовах невизначеності й ризику, не оцінюючи кількісно безпосередньо сам ризик. Ці методи засновані на суб'єктивних (експертних) оцінках та критеріях. В умовах відсутності статистичних даних, вони є єдино можливими методами.

В той же час, існують **об'єктивні методи** – що базуються на використанні частотних й імовірнісних характеристик подій. Очевидно, що для їхнього застосування, необхідна достатня кількість статистичних даних.

Об'єктивна оцінка ризику може вимірюватися в **абсолютному й відносному** вираженні.

4.2. Кількісна оцінка ризику в абсолютному вираженні

Основними абсолютними числовими характеристиками величини ризику є: математичне сподівання, дисперсія та стандартне відхилення. Розглянемо їх більш детально.

1. Математичне сподівання (математичне очікування). Нехай, закон розподілу дискретної випадкової величини представлений в табличному вигляді:

X	x ₁	x ₂	x ₃	...	x _n
P	p ₁	p ₂	p ₃	...	p _n

Тоді, математичним сподіванням $M(X)$ випадкової величини X буде називатись сума добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Ймовірнісним змістом математичного сподівання є середнє арифметичне значення випадкової величини.

Приклад 1. При виведенні нового товару на ринок, можливі три ситуації:

- збиток 7 млн. грн. з ймовірністю 0,4;
- збиток 5 млн. грн. з ймовірністю 0,5;
- прибуток 3 млн. грн. з ймовірністю 0,1.

Оцінити ймовірний фінансовий результат.

Середній очікуваний прибуток (збиток) буде розраховуватись за формулою математичного сподівання:

$$M(X) = -7 \times 0,4 + (-5) \times 0,5 + 3 \times 0,1 = -5 \text{ (млн. грн.)}$$

Приклад 2. Порівняти очікувану доходність від реалізації двох проектів, А та В, в залежності від можливих сценаріїв розвитку подій:

	Оптимістичний сценарій		Песимістичний сценарій	
	Прибуток, млн. грн.	Ймовірність	Прибуток, млн. грн.	Ймовірність
Проект А	200	0,5	100	0,5
Проект Б	151	0,99	51	0,01

Обчислимо для кожного проекту середній очікуваний прибуток за формулою математичного сподівання:

$$M_A(X) = 200 \times 0,5 + 100 \times 0,5 = 150 \text{ (млн. грн.)}$$

$$M_B(X) = 151 \times 0,99 + 51 \times 0,01 = 150 \text{ (млн. грн.)}$$

Отже, за критерієм очікуваної доходності, обидва проекти є рівнозначними й середній прибуток від кожного з них дорівнює 150 млн. грн.

Однак, реальна віддача проекту А, в залежності від сценарію розвитку подій, складе 200, або 100 млн. грн.; проекту В – 151, або 51 млн. грн.

Останній приклад показав нам важливість вимірювання варіації (відхилень) випадкової величини від її середнього рівня $(X - M(X))$.

Варіація є властивістю будь-якої випадкової величини. Чим меншою є варіація, тим надійнішими є характеристики центру розподілу (математичне сподівання):

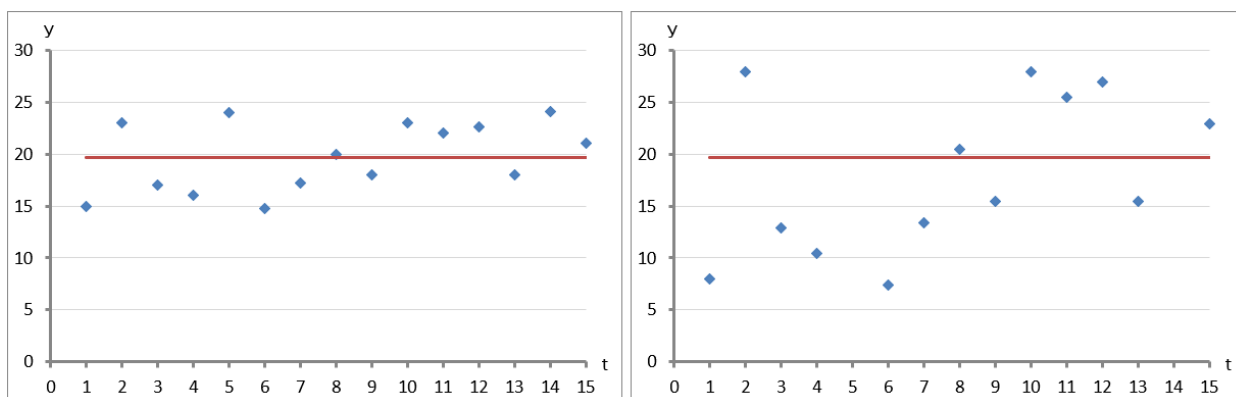


Рис. 3.1 Порівняння варіації випадкової величини (зліва – менша, справа – більша)

Таким чином, виникає потреба оцінити не лише середній рівень випадкової величини (математичне сподівання), але й ступінь її варіації. Для цього використовуються показники дисперсії та стандартного відхилення.

2. Дисперсія дискретної випадкової величини – це математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i$$

3. Стандартне відхилення – це корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Стандартне відхилення також вимірює рівень впливу випадкових факторів на значення досліджуваного показника. Чим меншим є стандартне відхилення, тим краще математичне сподівання (середнє значення) описує даний показник й навпаки.

Приклад 3. Оцінити ризикованість проектів А та В з прикладу 2, за допомогою показників стандартних відхилень.

	Економічне зростання		Економічна стагнація	
	Прибуток, млн. грн.	Ймовірність	Прибуток, млн. грн.	Ймовірність
Проект А	200	0,5	100	0,5
Проект В	151	0,99	51	0,01

Математичне сподівання очікуваного прибутку для кожного проекту складає:

$$M_A(X) = 200 \times 0,5 + 100 \times 0,5 = 150 \text{ (млн. грн.)}$$

$$M_B(X) = 151 \times 0,99 + 51 \times 0,01 = 150 \text{ (млн. грн.)}$$

Дисперсія очікуваного прибутку для кожного проекту буде дорівнювати:

$$D_A(X) = (200 - 150)^2 \times 0,5 + (100 - 150)^2 \times 0,5 = 2500;$$

$$D_B(X) = (151 - 150)^2 \times 0,99 + (51 - 150)^2 \times 0,01 = 99.$$

Відповідно, стандартні відхилення в обох випадках складуть:

$$\sigma_A(X) = \sqrt{2500} = 50;$$

$$\sigma_B(X) = \sqrt{99} = 10.$$

Таким чином, ризик від реалізації проекту А в 5 разів перевищує ризик від реалізації проекту В:

$$\sigma_A(X)/\sigma_B(X) = 50/10.$$

Тому, оскільки обидва проекти мають однаковий очікуваний прибуток, перевагу слід надати проекту В.

Приклад 4. Оцінити, якому з проектів слід надати перевагу, за допомогою показників математичного сподівання й стандартного відхилення за даними:

Стан економіки	Вірогідність	Прибуток/збиток, млн. грн.	
		Проект А	Проект В
Зростання	0,3	250	100
Помірний розвиток	0,4	85	75
Стагнація	0,3	-30	50

Математичне сподівання очікуваного прибутку для кожного проекту складає:

$$M_A(X) = 250 \times 0,3 + 85 \times 0,4 - 30 \times 0,3 = 100 \text{ (млн. грн.)}$$

$$M_B(X) = 100 \times 0,3 + 75 \times 0,4 + 50 \times 0,3 = 75 \text{ (млн. грн.)}$$

Дисперсія очікуваного прибутку для кожного проекту буде дорівнювати:

$$D_A(X) = (250 - 100)^2 \times 0,3 + (85 - 100)^2 \times 0,4 + (-30 - 100)^2 \times 0,3 = 11910;$$

$$D_B(X) = (100 - 75)^2 \times 0,3 + (75 - 75)^2 \times 0,4 + (50 - 75)^2 \times 0,3 = 375.$$

Відповідно, стандартні відхилення в обох випадках складуть:

$$\sigma_A(X) = \sqrt{11910} = 109,1;$$

$$\sigma_B(X) = \sqrt{375} = 19,4.$$

Виникає ситуація, коли за очікуваним прибутком перевагу слід надати проекту А, оскільки $M_A(X) > M_B(X)$. В той же час, за критерієм ризику (рівнем варіації випадкової величини), перевагу слід надати проекту В, оскільки $\sigma_A(X) > \sigma_B(X)$.

В таких випадках, для прийняття остаточного рішення, об'єктивна оцінка ризику може вимірюватися у **відносному** вираженні.

4.3. Кількісна оцінка ризику у відносному вираженні

Як ми побачили вище, числові значення математичного очікування й стандартного відхилення не завжди можуть в повній мірі охарактеризувати рівень ризиковості конкретного проекту, а іноді показують протилежні результати. Більш інформативним є відношення цих величин до певної бази порівняння, в якості якої може виступати майно підприємства, обсяг основного капіталу, тощо.

Нехай:

W – величина максимально можливих втрат (збитків)

K – обсяг активів підприємства.

Тоді, ризик банкрутства Z можна обчислити, як:

$$Z = W / K$$

Приклад 5. Дві інвестори інвестують у виробництво нової продукції, очікувана прибутковість якої становить 20% річних. Початкова сума інвестицій на придбання нової технологічної лінії становить 500 млн. грн. Перший інвестор вкладає всі свої активи. Другий, маючи лише 100 млн. грн. власних активів, вкладає ще 400 млн. грн. позикових коштів.

Через півроку всім стає зрозуміло, що продукція не принесе доходу й обом інвесторам ледве вдалося реалізувати її всього за 300 мільйонів гривень. В результаті, перший інвестор втратив свої 200 тисяч грн., а другий – збанкрутував.

Ризик першого інвестора становив:

$$Z = 200/500 = 0,4.$$

Відповідно, ризик другого інвестора дорівнював:

$$Z = 200/100 = 2,0.$$

Тобто, другий інвестор ризикував вп'ятеро більше.

Коефіцієнт варіації, як міра невизначеності. Основною відносною мірою ризику є квадратичний коефіцієнт варіації випадкової величини.

Квадратичний коефіцієнт варіації – це відношення середнього квадратичного відхилення випадкової величини до її математичного сподівання:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \times 100\%$$

Для нашого прикладу №4 будемо мати:

$$K_{\sigma(A)} = \frac{109,1}{100} = 1,091;$$

$$K_{\sigma(B)} = \frac{19,4}{75} = 0,2587.$$

Перевагу слід надати тому проекту, який забезпечує максимальну очікувану доходність за умови мінімального ризику (варіації випадкової величини). Відповідно до цього, чисельник коефіцієнта варіації повинний прагнути до мінімуму, а знаменник – до максимуму. В результаті, коефіцієнт варіації буде прагнути до мінімуму. Тобто, в нашому випадку найкращим є проект В.

Приклад 6 (САМОСТІЙНО). Припустимо, ми маємо оцінки очікуваної прибутковості двох проектів А та В, в залежності від стану економіки.

Стан економіки	Ймовірність	Прибутковість, %	
		Проект А	Проект В
Значне зростання	0,1	20%	10%
Незначне зростання	0,3	10%	5%
Стагнація	0,2	2%	2%
Незначна рецесія	0,3	-2%	1%
Значна рецесія	0,1	-10%	-5%

Оцінити ризиковість обох проектів за критеріями математичного сподівання, стандартного відхилення та квадратичного коефіцієнту варіації. Зробити висновки, якому проекту слід надати перевагу.

Рішення. В даному випадку, очікувана прибутковість є математичними сподіванням проектів А та В:

$$m_A = 3,8\%;$$

$$m_B = 2,78\%.$$

Як бачимо, середня очікувана доходність проекту А є вищою, ніж проекту В.

З іншої сторони, ризик інвестицій зростає зі зростанням нестабільності. Тому, в якості міри ризику беруться величини, що характеризують мінливість прибутковості, тобто, стандартне відхилення σ .

У нашому випадку:

$$\sigma_A = 8,22\%;$$

$$\sigma_B = 3,72\%.$$

Тобто, проект В є менш ризикованим, ніж проект А.

Остаточний висновок робиться на основі коефіцієнтів варіації:

$$CV_A = 2,16;$$

$$CV_B = 0,74.$$

Таким чином, за критеріями мінімізації варіації та максимізації прибутковості, слід обрати проект В.

4.4. Нерівність Чебишева для оцінки ймовірності настання небажаних подій

Ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання $M(X)$ більше, ніж на довільне число $a > 0$, не перевищує $(\sigma^2(X)/a^2)$, або:

$$P(|X - M(X)| > a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2}$$

Найчастіше, нерівність Чебишева використовують в іншому вигляді. Введемо наступне умовне позначення: $a = n\sigma(X)$, де n – будь-яке натуральне число. Тоді, остання нерівність запишеться у вигляді:

$$P(|X - M(X)| > n\sigma(X)) \leq \frac{1}{n^2}$$

Наприклад, при $n = 3$ з останньої нерівності будемо мати: ймовірність події, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання більше ніж на $3\sigma(X)$ («три сігми»), не перевищує $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{9} \approx 0,111$.

Тобто, з ймовірністю $P = 0,899$, випадкова величина потрапить до інтервалу: $X \in (M(X) - 3\sigma(X); M(X) + 3\sigma(X))$.

Приклад 7. За останній рік, щомісячні обсяги прибутку підприємства, що мали випадковий характер, наведені в таблиці нижче. За допомогою нерівності Чебишева знайти:

- ймовірність того, що наступного місяця підприємство виявиться збитковим;
- ймовірність того, що наступного місяця підприємство буде прибутковим.

Період	Прибуток, млн. грн. (X)
Січень	2,6
Лютий	0,7
Березень	2,8
Квітень	0,3
Травень	0,4
Червень	2,2
Липень	3,4
Серпень	0,2
Вересень	4,4
Жовтень	2,1
Листопад	3,3
Грудень	1,6

Нерівність Чебишева використовує показники математичного сподівання й стандартного відхилення випадкової величини. Для нашого динамічного ряду дані показники будуть розраховуватись за формулами:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2}{n}}$$

Для їх обчислення, проведемо додаткові розрахунки:

Період	Прибуток, млн. грн. (X _i)	(X _i – M(X)) ²
Січень	2,6	0,360
Лютий	0,7	1,690
Березень	2,8	0,640
Квітень	0,3	2,890
Травень	0,4	2,560
Червень	2,2	0,040
Липень	3,4	1,960
Серпень	0,2	3,240
Вересень	4,4	5,760
Жовтень	2,1	0,010
Листопад	3,3	1,690
Грудень	1,6	0,160
Сума	24,0	21,000

Тоді, математичного сподівання й стандартне відхилення місячного прибутку буде становити:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{24,0}{12} = 2,0 \text{ (млн. грн.)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2}{n}} = \sqrt{\frac{21,0}{12}} = 1,323$$

Отже, обсяг середньомісячного прибутку становить 2,0 млн. грн. Позначимо його на графіку:

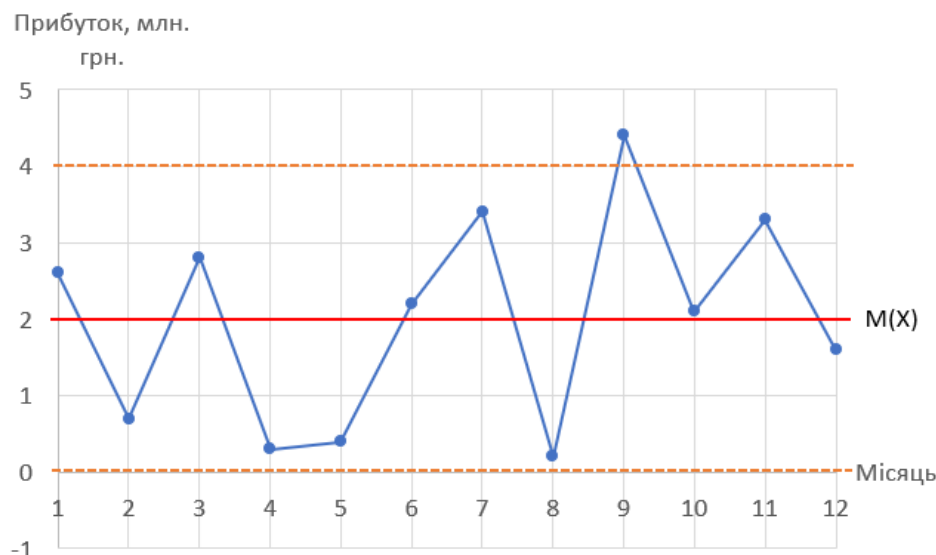


Рис. 3.2 Динаміка прибутку та його математичне сподівання

На графіку синьою траєкторією позначена динаміка щомісячного прибутку протягом останнього року; червоною лінією – середньомісячний прибуток (математичне сподівання).

Далі, за допомогою нерівності Чебишева знайдемо ймовірність того, що наступного місяця прибуток випадково відхилиться від свого математичного сподівання більше ніж на 2,0 млн. грн. Тобто, або буде менше нуля (збиток), або перевищить 4,0 млн. грн. На графіку ці межі позначені помаранчевими пунктирними лініями.

$$P(|X - M(X)| > a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2}$$

$$P(|X - 2,0| > 2,0) \leq \left(\frac{1,323^2}{2^2} = 0,438 \right)$$

Таким чином, ймовірність того, що наступного місяця прибуток перевищить 4,0 млн. грн., або буде менше нуля, не перевищує:

$$P(|X - 2,0| > 2,0) \leq 0,438.$$

Обидві ці події є рівноймовірними. Тобто, ймовірність отримати наступного місяця збиток не перевищує $0,438/2 = 0,219$, або 21,9%.

З іншої сторони, ймовірність того, що наступного місяця підприємство виявиться прибутковим, буде не меншою, ніж $(1 - 0,219) = 0,781$, або 78,1%.

Нерівність Чебишева може використовуватись у всіх випадках, коли форма розподілу випадкової величини є невідомою.