

3. Лабораторна робота. Застосування мови Python до аналітичних обчислень символічної математики

Мета: засвоїти можливості роботи мови Python до аналітичних обчислень, таких як диференціювання, інтегрування, обчислення границь, роботу з матрицями та графіко.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації

SymPy – це бібліотека символічної математики мови Python. Вона є реальною альтернативою таким математичним пакетам як Mathematica або Maple, і володіє дуже простим та легко розширюваним кодом. SymPy написана виключно на мові Python і не вимагає ніяких сторонніх бібліотек. Ця бібліотека є потужним інструментом для тих, хто працює з математичними обчисленнями в Python

Після встановлення бібліотеки SymPy, її треба підключити за допомогою інструкції `import`. Наприклад, використовуючи псевдонім «sm»:

```
import sympy as sm
```

На відміну від інших систем комп'ютерної алгебри, в SymPy можна в явному вигляді задавати символічні змінні:

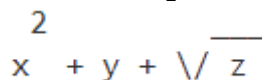
```
x = sm.Symbol('x')
```

або так:

```
y, z = sm.symbols('y z')
```

Після їх завдання з ними можна робити різні маніпуляції з використанням деяких операторів мови Python, а саме, арифметичних та логічних. Наприклад, використовуючи функцію `pprint(expression, use_unicode=True)` з бібліотеки SymPy, де `expression` – математичний вираз для виводу, `use_unicode=True` – параметр, що вмикає юнікод-символи (за замовчуванням `True`). Якщо встановити `False`, буде використовуватись ASCII (див. рис. 3.1):

```
sm.pprint(x ** 2 + y + sm.sqrt(z), use_unicode=False)
```



$x^2 + y + \sqrt{z}$

Рисунок 3.1 – Вивід результату у консоль (Unicode) за допомогою функцію `pprint()`

Для кращого візуального відображення алгебраїчних виразів на екрані у бібліотеці SymPy використовується функція `init_printing()`. `Init_printing` – це функція з бібліотеки SymPy, яка налаштовує вивід математичних виразів у красивому форматі. Вона робить представлення символічних обчислень більш читабельним, наприклад, у вигляді LaTeX або юнікод-символів. Функція `init_printing()` автоматично налаштовує найкращий доступний метод візуалізації залежно від середовища (Jupyter Notebook, консоль, тощо). Якщо працюєте в Jupyter Notebook і хочете ще гарніший вивід, краще використовувати `init_printing()`.

У бібліотеці SymPy знаходити границі функцій можна за допомогою функції `limit()`. Вона дозволяє обчислювати границі виразів при заданому значенні змінної, включаючи одnobічні границі. Синтаксис такий:

```
limit(expression, variable, point, dir='+'),
```

де `expression` – вираз, границю якого потрібно знайти, `variable` – змінна, за якою обчислюється границя, `point` – точка, до якої прямує змінна, `dir` – необов'язковий параметр для знаходження односторонніх границь ('+' для правосторонньої, '-' для лівосторонньої).

Наприклад,

```
import sympy as sm
x = sm.Symbol('x')
expr = x / (x + 1)
result = sm.limit(expr, x, float('inf'))
sm.pprint(result, use_unicode=False)
```

Результат, 1.

У бібліотеці SymPy для обчислення похідних використовується функція `diff()`. Вона дозволяє знаходити похідні будь-якого порядку від алгебраїчних, тригонометричних та інших функцій. Синтаксис такий:

```
diff(function, variable, order),
```

де `function` – функція, яку треба продиференціювати, `variable` – ім'я змінної, по якій проводиться диференціювання; `order` – порядок похідної (за замовчуванням це перша похідна). Зрозуміло, що якщо функція має кілька змінних, то можна брати часткові похідні за допомогою цієї ж функції.

Для обчислення невизначених інтегралів використовується метод:

```
integrate(function, variable),
```

де `function` – функція, яку треба проінтегрувати, `variable` – ім'я змінної інтегрування.

Для обчислення визначених інтегралів використовується метод:

```
integrate(function, (variable, a, b)),
```

де `function` – функція, яку треба проінтегрувати, `variable` – ім'я змінної інтегрування; `a`, `b` – межі інтегрування.

Для створення матриці з елементами, які задані у вигляді списку `list`, у бібліотеці SymPy використовується клас `Matrix(list)`.

Наприклад, матриця 2×2 задається командою:

```
A = Matrix([[1, 2], [3, 4]]) # 2x2 матриця
```

Клас `Matrix` має багато корисних методів для роботи з матрицями: обчислення визначників, знаходження обернених матриць, транспонування, рангу, власних значень тощо. `Matrix` у SymPy дозволяє легко працювати з матрицями в Python.

SymPy дозволяє будувати графіки функцій заданих явно, заданих неявно, заданих параметрично та будувати поверхні, а також зображати області між

функціями. Для побудови графіка функції, яка задано явно у декартовій системі координат, використовується метод

`plot(function, (variable, a, b)),`

де `function` – функція, яку треба побудувати, `variable` – ім'я змінної; `a`, `b` – межі по осі OX .

Наприклад, графік поверхні $y = x \cdot \sin x$ має вигляд (див. рис. 3.2):

```
import sympy as sm
from sympy.plotting import plot3d
x = sm.Symbol('x')
plot3d(x * sm.sin(x), (x, -10, 10), (y, -8, 8))
```

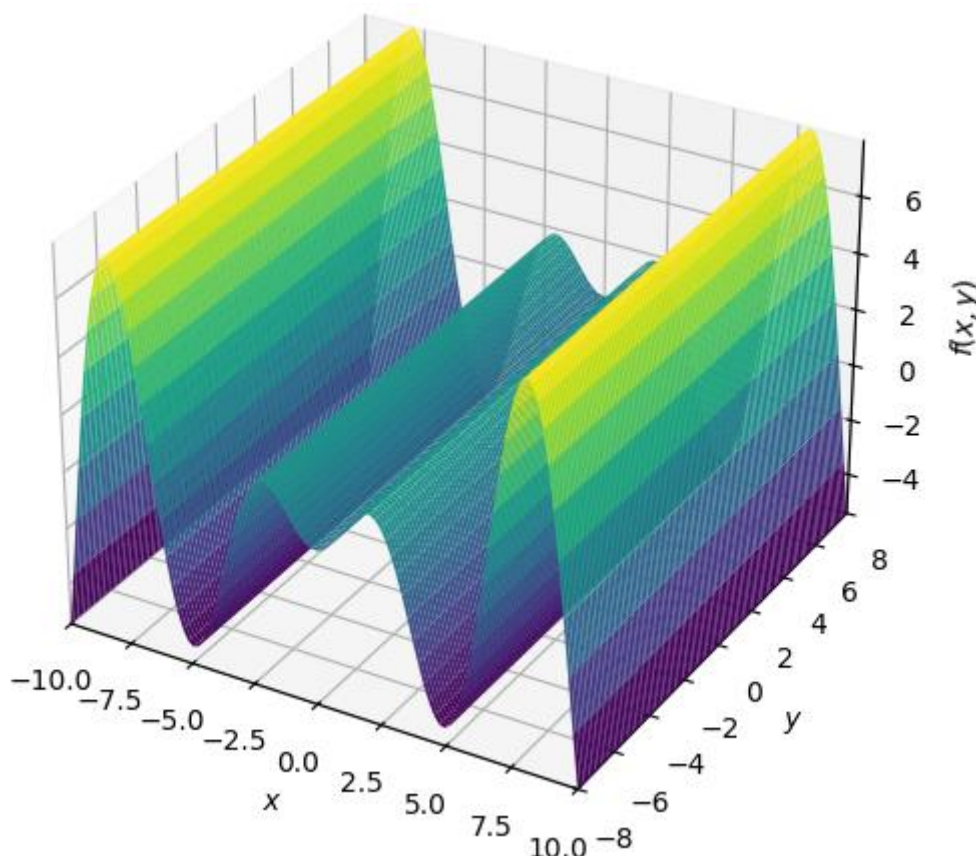


Рисунок 3.2 – Результат роботи `plot3d()`

Завдання до лабораторної роботи

1. Обчислити границі функції:

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x^2+4x+5}$.
- 2) a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sqrt[3]{5x^2} + \sqrt[4]{9x^8+1}}{x^5 + \sqrt{x}}$.
- 3) a) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.
- 4) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2 - e^{3x} - \cos 4x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{x^2}$.
- 5) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin 2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x+1}{3x^2+4x+5}$.

- 6) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - \cos 2x}{\sin 2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+2} - 5x^2}{x - \sqrt{x^4 - x + 1}}$.
- 7) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7x}{3x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{x+1}$.
- 8) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin 9x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+36)}{4x^2+1}$.
- 9) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt[4]{81x^2-1}}{x + 4\sqrt{x^5}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin 2x}$.
- 10) a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^{4x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{12x} - \cos 5x}{\sin 4x}$.

2. Обчислити похідну. Знайти y'' та y''' . Знайти всі частинні похідні:

- 1) a) $y = \frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} 4x}$; b) $y = \ln^5(x+1)$; c) $u = \sqrt{\frac{y^3}{x}}$.
- 2) a) $y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2(2x-1) - \operatorname{arctg} \frac{5}{x} + 3$; b) $y = x^5 + \sqrt{x}$; c) $u = x^{\frac{1}{y}}$.
- 3) a) $y = e^{6x-1} \cdot \arccos 2x$; b) $y = 2 - x^2 + \sqrt{x}$; c) $u = e^{\frac{x}{y}}$.
- 4) a) $y = \sin^2 2x - \operatorname{tg} \sqrt{x-2}$; b) $y = \sin(-2x)$; c) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5) a) $y = 7\sqrt{6x^4+1} \cdot \sin 6x$; b) $y = \frac{1}{x}$; c) $u = \frac{\cos x^2}{3y}$.
- 6) a) $y = x^2 - \ln(3+x^3)$; b) $y = \cos \sqrt[5]{7x^2}$; c) $u = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \sin y^3$.
- 7) a) $y = \frac{2 \operatorname{tg} 6x}{e^{3x+2}}$; b) $y = x - \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln \sqrt[3]{1+x}$; c) $u = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$.
- 8) a) $y = \ln x^3 - \operatorname{tg} x - \sqrt[2]{x}$; b) $y = \frac{\sqrt{1+x^3}}{3 \arcsin 2x}$; c) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y^3}}$.
- 9) a) $y = \frac{2x^5-1}{3 \operatorname{tg} 4x}$; b) $y = \sin \sqrt{3x} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{x} - \operatorname{ctg} 6x$; c) $u = e^{-\frac{y}{x^2}}$.
- 10) a) $y = x^3 - \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2}$; b) $y = \sqrt{1-4x}$; c) $u = \frac{y^2}{x}$.

3. Знайти значення інтеграла (невизначеного, визначеного, невластного):

- 1) a) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
- 2) a) $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3} dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x} dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x dx}{x}$.
- 3) a) $\int x^3 \sin x dx$; b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
- 4) a) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-2x^2}}{xe^{x^2}} dx$.
- 5) a) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-4 \sin x+3 \cos x}$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2} dx$.
- 6) a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2} dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.
- 7) a) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$; b) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$; c) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$.
- 8) a) $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; b) $\int_0^e \ln^3 x dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

- 9) a) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$; b) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$; c) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx$.
- 10) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$; b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$.

4. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8-n & h-7 \\ -6 & 2h+n & n+5 \\ -3 & 3h-n & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & -n & -h+1 \\ 1 & h & 5-n \\ 6 & n & 9 \end{pmatrix},$$

де n – номер варіанту, h – остання цифра номеру вашої групи, знайти: 1) AB ; 2) BA ; 3) $nA - hB$; 4) $\det A$ та $\det B$; 5) A^{-1} та B^{-1} ; 6) ранг матриці A та ранг матриці B ; 7) власні значення матриці A та матриці B .

5. Побудувати графіки функцій у декартовій системі координат:

- 1) a) $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$; b) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$.
- 2) a) $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2} - x$; b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.
- 3) a) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$; b) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.
- 4) a) $y = 8x^2(x^2-1)^3$; b) $y = \frac{x}{2} - \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.
- 5) a) $y = \frac{x^5-8}{x^4}$; b) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
- 6) a) $y = \frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$; b) $y = \frac{x}{\ln x}$.
- 7) a) $y = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x}$; b) $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.
- 8) a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; b) $y = (x^2-2)e^{-2x}$.
- 9) a) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$; b) $y = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + \frac{6}{1+x}$.
- 10) a) $y = \frac{x^2+2x-3}{x} - e^{\frac{1}{x}}$; b) $y = \frac{x}{2} + 2 \arctg x$.

Питання для самоконтролю

- Охарактеризуйте можливості символьної математики SymPy мови Python.
- Де використовується SymPy? Наведіть приклади.
- Які функції використовуються у SymPy для знаходження границь, похідних та інтегралів?
- Охарактеризуйте методи класу Matrix.
- Які операції можна робити з матрицями у SymPy?
- Які функції дозволяють побудови графіки функцій у SymPy?
- У яких системах координат можна побудувати графік функції у SymPy?