

1. Лабораторна робота. Символьні перетворення у системі комп'ютерної алгебри Maxima

Мета: засвоїти можливості роботи системи комп'ютерної алгебри Maxima до виконання символьних і числових обчислень.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації

Maxima – класичний приклад математичного програмного забезпечення, яке використовується для символьної математики, аналітичних розрахунків і навчальних цілей.

Maxima – це система комп'ютерної алгебри, яка призначена для виконання символьних і числових обчислень. Вона дозволяє:

- виконувати аналітичні обчислення (спрощення виразів, диференціювання, інтегрування, розклад у ряд);
- розв'язувати рівняння і системи рівнянь;
- виконувати дії з матрицями та векторами;
- будувати графіки функцій;
- здійснювати числові обчислення з високою точністю.

Після запуску Maxima з'являється вікно програми, де у верхній частині вікна інтерфейсу вказано, яка завантажена версія (див. рис. 1.1).

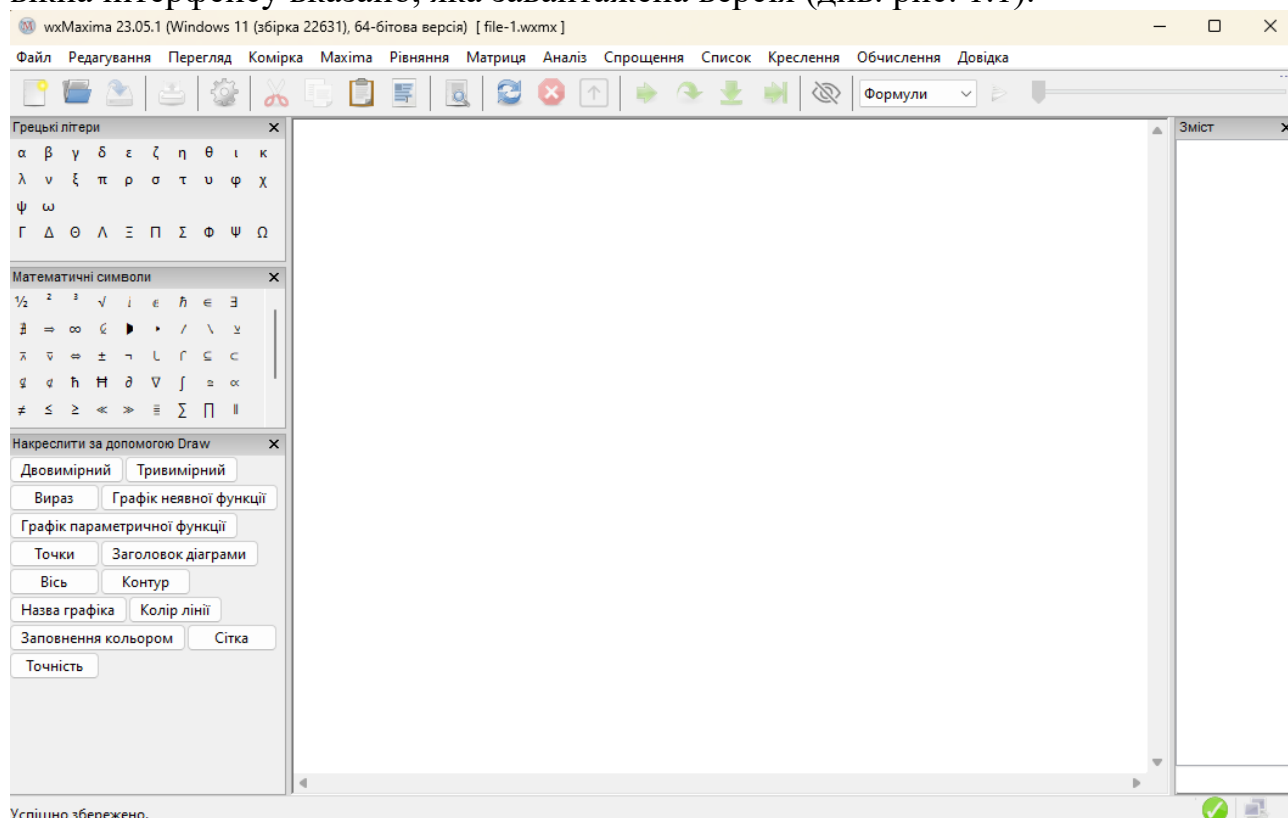


Рисунок 1.1 – Графічний інтерфейс wxMaxima

Особливості:

- 1) Maxima є безкоштовним програмним забезпеченням з відкритим кодом;

- 2) Maxima базується на системі Macsyma, одній із перших систем символьної математики розробленої Massachusetts Institute of Technology (MIT);
- 3) Maxima має зручну графічну оболонку wxMaxima, яка спрощує роботу завдяки зручному інтерфейсу, а також є можливість працювати в режимі командного рядка;
- 4) Maxima дає можливість вирішувати широкий клас задач.

Після введення кожній команді надається порядковий номер (%i1), (%i2) і так далі. Тут літера «і» – це скорочення від англійського input. Результати обчислень мають відповідно порядковий номер (%o1), (%o2) і так далі (див. рис. 1.2). Тут літера «о» – це скорочення від англійського output.

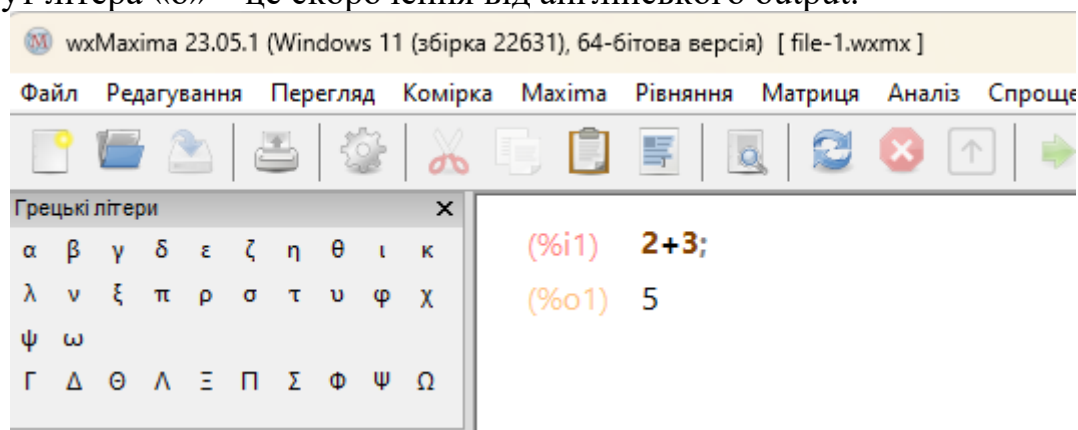


Рисунок 1.2 – Результати виводу команди

Основні принципи роботи.

- введення команд здійснюється через інтерфейс wxMaxima;
- кожна команда завершується **крапкою з комою «;»**;
- у Maxima знак \$ у кінці рядка означає, що треба виконати команду, але не виводити результат на екран;
- можна писати коментарі в оточенні /* */;
- чисельник і знаменник звичайних дробів розділяється за допомогою символу / (прямий слеш);
- для отримання конкретного числового значення використовується оператор numer (див. рис. 1.3);
- виконання команди підтверджується натисканням клавіш Shift і Enter для її обробки та виведення результату.

```
(%i2) 2/3;
(%o2)  $\frac{2}{3}$ 

(%i4) 2/3,numer;
(%o4) 0.6666666666666666
```

Рисунок 1.3 – Використання оператора numer

Однією із дуже небагатьох речей, які є нестандартними у wxMaxima є те, що дані для Maxima у програмі впорядковано за комірками, які обчислюються (тобто надсилаються до Maxima) лише на запит користувача. При обчисленні комірки усі команди у ній, і лише у ній, обчислюються пакетно. Підхід wxMaxima до надсилання команд на виконання може спочатку видатися незвичним. Втім, він значно спрощує роботу із великими документами (у яких користувач, звичайно ж, не є хоче, щоб програма автоматично вмикала повне переобчислення усього документа у відповідь на будь-яку незначну зміну). Крім того, такий підхід є дуже зручним для усунування усіх недоліків.

У Maxima є кілька вбудованих математичних констант, які можна використовувати у виразах і обчисленнях. Усі спеціальні символи починаються з %. У таблиці 1.1 наведено основні сталі (константи), що підтримуються системою:

Таблиця 1.1 – Основні числові та математичні константи в Maxima

Назва	Позначення	Приклад використання
Число π	%pi	float(%pi);
Число e	%e	exp(1);, float(%e);
Уявна одиниця	%i	%i^2;
Плюс нескінченність	inf	1/inf;
Мінус нескінченність	minf	1/minf;
Золоте число (≈ 1.618)	%phi	float(%phi);
Стала Ейлера–Маскероні	%gamma	float(%gamma);

У Maxima підтримуються всі основні арифметичні операції, як і в більшості мов програмування та математичних систем. У таблиці 1.2 наведено основні базові операції.

Таблиця 1.2 – Базові арифметичні операції в Maxima

Операція	Позначення	Приклад	Результат
Додавання	+	2 + 3;	5
Віднімання	-	7 - 4;	3
Множення	*	6 * 5;	30
Ділення	/	8 / 2;	4
Піднесення до степеня	^ або **	2^3; або 2**3;	8
Остача від ділення	mod	mod(7, 3);	1
Цілочисельне ділення	quotient	quotient(7, 3);	2
Унарний мінус	-	-5 + 2;	-3
Факторіал	!	5!;	120

У Махіма є велика кількість вбудованих математичних функцій, які поділяються на кілька основних груп (див. таблиці 1.3–1.7).

Таблиця 1.3 – Арифметичні функції

Назва функції	Приклад	Опис
<code>abs(x)</code>	<code>abs(-5);</code>	Модуль (абсолютне значення)
<code>floor(x)</code>	<code>floor(3.7);</code>	Округлення вниз
<code>ceiling(x)</code>	<code>ceiling(3.1);</code>	Округлення вгору
<code>round(x)</code>	<code>round(2.6);</code>	Округлення до найближчого цілого
<code>mod(x, y)</code>	<code>mod(7, 3);</code>	Остача від ділення
<code>min(a, b, ...)</code>	<code>min(3, 7, 2);</code>	Мінімальне значення
<code>max(a, b, ...)</code>	<code>max(3, 7, 2);</code>	Максимальне значення

Таблиця 1.4 – Тригонометричні функції

Назва функції	Приклад	Опис
<code>sin(x)</code>	<code>sin(%pi/2);</code>	Синус
<code>cos(x)</code>	<code>cos(0);</code>	Косинус
<code>tan(x)</code>	<code>tan(%pi/4);</code>	Тангенс
<code>sec(x)</code>	<code>sec(0);</code>	Секанс
<code>csc(x)</code>	<code>csc(%pi/2);</code>	Косеканс
<code>cot(x)</code>	<code>cot(%pi/4);</code>	Котангенс
<code>asin(x)</code>	<code>asin(1);</code>	Арксинус
<code>acos(x)</code>	<code>acos(0);</code>	Арккосинус
<code>atan(x)</code>	<code>atan(1);</code>	Арктангенс

Таблиця 1.5 – Експонента та логарифмічні функції

Назва функції	Приклад	Опис
<code>exp(x)</code>	<code>exp(1);</code>	Експонента e^x
<code>log(x)</code>	<code>log(10);</code>	Натуральний логарифм
<code>log10(x)</code>	<code>log10(100);</code>	Десятковий логарифм
<code>sqrt(x)</code>	<code>sqrt(9);</code>	Квадратний корінь
<code>nthroot(x, n)</code>	<code>nthroot(8, 3);</code>	Корінь n -го степеня

Таблиця 1.6 – Статистичні функції (для списків)

Назва функції	Приклад	Опис
<code>mean(...)</code>	<code>mean([2, 4, 6]);</code>	Середнє значення
<code>median(...)</code>	<code>median([1, 5, 7, 9]);</code>	Медіана
<code>variance(...)</code>	<code>variance([2, 3, 4]);</code>	Дисперсія
<code>std(...)</code>	<code>std([2, 3, 4]);</code>	Стандартне відхилення

Таблиця 1.7 – Інші корисні функції

Назва функції	Приклад	Опис
<code>factorial(n)</code>	<code>factorial(5);</code>	Факторіал $n!$
<code>gamma(x)</code>	<code>gamma(5);</code>	Гамма-функція
<code>sign(x)</code>	<code>sign(-7);</code>	Знак числа $(-1, 0, 1)$
<code>unit_step(x)</code>	<code>unit_step(-2);</code>	Одинична ступенева функція

У Махіма є багато команд для перетворення алгебраїчних виразів, тобто для спрощення, розкладання, перетворення виразу в канонічну або зручну форму.

Команда `expand(expr)` призначена для розкриття дужок, розкладання добутків (див. рис. 1.4).

```
(%i18) expand((x + 1)^3);  
(%o18) x3 + 3 x2 + 3 x + 1
```

Рисунок 1.4 – Використання команди `expand(expr)`

Команда `factor(expr)` призначена для розкладання на множники (див. рис. 1.5).

```
(%i19) factor(x^2 - 1);  
(%o19) (x - 1) (x + 1)
```

Рисунок 1.5 – Використання команди `factor(expr)`

Команда `ratsimp(expr)` призначена для спрощення дробів, зведення дробів, скорочення дробів (див. рис. 1.6).

```
(%i20) ratsimp((x^2 - 1)/(x - 1));  
(%o20) x + 1
```

Рисунок 1.6 – Використання команди `ratsimp(expr)`

Команда `fullratsimp(expr)` призначена для спрощення виразів із коренями та степенями (див. рис. 1.7).

```
(%i21) fullratsimp((x^2 - y^2)/(x - y));  
(%o21) y + x
```

Рисунок 1.7 – Використання команди `fullratsimp(expr)`

Команда `radcan(expr)` призначена для загального скорочення складних виразів (див. рис. 1.8).

```
(%i22) radcan(sqrt(x^2));  
(%o22) |x|
```

Рисунок 1.8 – Використання команди `radcan(expr)`

За потреби можна використовувати і інші команди:

- команда `rat(expr)` призначена для перетворення раціональних виразів до так званої канонічної форми;
- команда `logexpand(expr)` призначена для розкладання логарифмів, застосування логарифмічних тотожностей;

- команда `logcontract(expr)` призначена для згортання логарифмів до однієї функції;
- команда `radcan(expr)` призначена для перетворення виразів, які містять логарифмічні, показникові та степеневі функції;
- команда `trig(expr)` призначена для загального спрощення тригонометричних виразів;
- команда `trigsimp(expr)` призначена для спрощення тригонометричних виразів;
- команда `trigexpand(expr)` призначена для розкладання тригонометричних виразів за формулами;
- команда `trigreduce(expr)` призначена для перетворення добутків тригонометричних функцій на суми;
- команда `ratsubst(expr)` призначена для підстановки значення у вираз, з подальшим спрощенням;
- команда `subst(expr)` призначена для заміни підвиразів у формулі;
- команда `collectterms(expr)` призначена для збирання подібних членів за змінною;
- команда `partfrac(expr, x)` призначена для перетворення дробово-раціональної функції на суму елементарних дробів.

Наприклад, (див. рис. 1.9):

```
(%i35) expr: (x^2 - 1)/(x - 1);
      ratsimp(expr);

expr      2
      x  - 1
      ----
      x - 1

(%o35) x + 1
```

Рисунок 1.9 – Приклад використання функції перетворення

Ви можете комбінувати кілька команд, наприклад (див. рис. 1.10):

```
(%i36) factor(ratsimp((x^3 - x)/(x^2 - 1)));
(%o36) x
```

Рисунок 1.10 – Приклад комбінування кількох команд

Отже, Махіма – потужний і безкоштовний інструмент для навчання, наукових розрахунків і моделювання. Його зручно використовувати для аналітичних обчислень та символної математики.

Завдання до лабораторної роботи

1. Обчислити у СКА Махіма:

$$1) \frac{(7-6,35):6,5+9,9}{\left(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$$

$$2) \left(\left(\frac{7}{9} - \frac{47}{72} \right) : 1,25 + \frac{7}{40} \right) : (0,358 - 0,108) \cdot 1,6 - \frac{19}{25}.$$

$$3) \frac{(0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}) \cdot 3}{(1,5 + \frac{1}{4}) : 18\frac{1}{3}}.$$

$$4) \left(\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} + 0,125 \right) : 2\frac{1}{2} + 0,43.$$

$$5) \frac{2\frac{3}{4} : 1,1 + 3\frac{1}{3} : \frac{5}{7} - \frac{(2\frac{1}{6} + 4,5) \cdot 0,375}{2,75 - 1\frac{1}{2}}}{2,5 + 0,4 \cdot 3\frac{1}{3}}.$$

$$6) \frac{(13,75 + 9\frac{1}{6}) \cdot 1,2}{(10,3 - 8\frac{1}{2}) \cdot \frac{5}{9}} + \frac{(6,8 - 3\frac{3}{5}) \cdot 5\frac{5}{6}}{(3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}) \cdot 56} - 27\frac{1}{6}.$$

$$7) \frac{(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15}) : (\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15}) \cdot 2,52}{(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5}) : (0,25 - \frac{1}{6}) \cdot \frac{7}{13}}.$$

$$8) \left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 3\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}} \cdot 5,2 \right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7 \right).$$

$$9) \frac{0,4 + 8(5 - 0,8 \cdot \frac{5}{8}) - 5 \cdot 2\frac{1}{2}}{(1\frac{7}{8} \cdot 8 - (8,9 - 2,6 : \frac{2}{3})) \cdot 34\frac{2}{5}} \cdot 90.$$

$$10) \frac{(\frac{5}{45} - 4\frac{1}{6}) : 5\frac{8}{15} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0,3 : 0,01}{70} + \frac{2}{7}}{(\frac{4}{3} + 0,75) \cdot 3\frac{9}{13}}.$$

2. Створити випадковий набір даних з 50 чисел за допомогою функції `makelist(random(100), i, 1, 50)`. Обчислити середнє значення вибірки, медіану, дисперсію, стандартне відхилення. Зробити висновки.

3. Розкласти дробово-раціональну функцію на суму елементарних дробів у СКА Maxima:

$$1) \frac{x^2 - 5}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9)}.$$

$$2) \frac{x + 1}{x(x^4 + 6x^2 + 8)}.$$

$$3) \frac{1}{x^2(x^2 + 4)^2}.$$

$$4) \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x(x + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

$$5) \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 9)(x^3 + x^2)}.$$

$$6) \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2}.$$

$$7) \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x^2 + 4x + 29)^2}.$$

$$8) \frac{x^3 - x - 1}{x(x - 1)^2(x^2 + 4)}.$$

$$9) \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 16)(x^3 + x^2)}.$$

$$10) \frac{5}{(x + 4)(x^2 + 4x + 20)}.$$

4. Спростити вираз у СКА Maxima:

$$1) \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

$$2) \left((\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q})^{-2} + (\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q})^{-2} \right) : \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{p - q}.$$

$$3) \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$4) \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b}{(a-b) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{b}} + 3\sqrt{\frac{1}{a}} \right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}}.$$

$$5) x \cdot \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}}{2 - \sqrt{x+4}} + \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}}.$$

$$6) \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{x}} \right)^2.$$

$$7) \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right).$$

$$8) \frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1.$$

$$9) \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} \cdot (5 - 2x^2).$$

$$10) \sqrt{\frac{2a}{(1+a)^3 \sqrt{1+a}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4 + \frac{8}{a} + \frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Наведіть порядок виконання операцій у Махіта.
2. Перерахуйте арифметичні операції у Махіта.
3. Наведіть як задаються основні математичні константи у Махіта.
4. Наведіть приклади статистичних функцій у Махіта.
5. Охарактеризуйте способи завдання тригонометричних функцій.
6. Чи можна задати свою функцію у Махіта?
7. Наведіть функції для завдання експоненти та логарифму.
8. Охарактеризуйте функції перетворення алгебраїчних виразів у Махіта.
9. Чи можна комбінувати кілька команд при перетворенні виразів?
10. Наведіть способи створення випадкових списків.