

2. Лабораторна робота. Застосування системи комп'ютерної алгебри Maxima до розв'язання задач аналізу

Мета: засвоїти можливості системи комп'ютерної алгебри Maxima до розв'язання рівнянь, нерівностей, систем та задач математичного аналізу.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації

У Maxima розв'язування рівнянь і нерівностей здійснюється за допомогою спеціальних команд.

Команда

```
solve(рівняння, змінна);
```

розв'язує задане рівняння в аналітичному вигляді. Її можна застосовувати і для розв'язання параметричних і тригонометричних рівнянь. Наприклад (див. рис. 2.1):

```
(%i1) solve(2·x - 4 = 0, x);
```

```
(%o1) [x = 2]
```

```
(%i2) solve(x^2 - 5·x + 6 = 0, x);
```

```
(%o2) [x = 3, x = 2]
```

```
(%i3) solve(a·x + b = 0, x);
```

```
(%o3)  $\left[ x = -\left(\frac{b}{a}\right) \right]$ 
```

Рисунок 2.1 – Приклади використання команди solve

У Maxima є багато додаткових пакетів, які розширюють її можливості – для роботи з графіками, рівняннями, нерівностями, статистикою, матрицями, теорією чисел та логікою. Наприклад, команда `load("solve_rat_ineq")`; у Maxima завантажує додатковий пакет, який дозволяє розв'язувати раціональні нерівності – тобто нерівності, у яких є дробі, чисельник і знаменник, вирази з змінними в знаменнику тощо (див. рис. 2.2).

```
(%i11) load("solve_rat_ineq");  
solve_rat_ineq(7·x+2<-x-3);
```

```
(%o10)
```

```
C:/maxima-5.47.0/share/maxima/5.47.0/share/solve_rat_ineq/solve_rat_ineq.mac
```

```
(%o11)  $\left[ \left[ x < -\left(\frac{5}{8}\right) \right] \right]$ 
```

Рисунок 2.2 – Приклади використання модуля solve_rat_ineq

Коли це потрібно? Звичайна команда `solve(...)` не завжди коректно працює з раціональними нерівностями. Наприклад, вона може:

- не враховувати точки, де вираз не визначений;
- давати неповний розв'язок.

Після завантаження пакету `solve_rat_ineq`, Maxima правильно враховує знаки чисельника і знаменника, та знаходить усі інтервали, на яких виконується нерівність. Команда `load("solve_rat_ineq")` активує можливість точного розв'язування раціональних нерівностей у Maxima. Це корисно для навчальних і аналітичних задач з ОДЗ.

Аналогічно можна покращити вихідний результат при розв'язання диференціальних рівнянь. Модуль `contrib_ode` призначений для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (див. рис. 2.3).

```
(%i16) load("contrib_ode");
      contrib_ode('diff(y,x) = y^2, y, x);
(%o15) C:/maxima-5.47.0/share/maxima/5.47.0/share/contrib/diffequations/contrib_ode.mac
(%o16)  $\left[ -\left(\frac{1}{y}\right) = x + \%c \right]$ 
```

Рисунок 2.3 – Приклади використання модуля `contrib_ode`

Системи рівнянь теж можна розв'язувати за допомогою команди (див. рис. 2.4):

```
solve([рівняння_1, рівняння_2], [x, y]);
(%i17) solve([x + y = 5, x - y = 1], [x, y]);
(%o17) [[x=3,y=2]]
```

Рисунок 2.4 – Приклади розв'язання системи

У таблиці 2.1 наведено основні альтернативні команди.

Таблиця 2.1 – Альтернативні команди в Maxima

Команда	Призначення
<code>algsys(...)</code>	Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь (потужніше)
<code>find_root(...)</code>	Чисельне розв'язання на інтервалі
<code>to_poly_solve(...)</code>	Покращене символічне розв'язання

Як висновок, якщо треба знайти точні розв'язки – то тоді треба використовувати команду `solve`. Якщо потрібні наближені значення – треба обернути результат у `float(...)`.

У Maxima для знаходження границі функції використовується команда (див. рис. 2.5):

```
limit(expr, x, a)
```

де

- expr – функція, границю якої шукаємо;
- x – змінна;
- a – точка, до якої прямує змінна.

```
(%i1) limit(sin(5*x)/x, x, 0);
(%o1) 5
```

Рисунок 2.5 – Знаходження границі функції

Інтерфейс wxMaxima підтримує другий варіант обчислення границі функції, використовуючи меню Аналіз – Знайти границю (див. рис. 2.6).

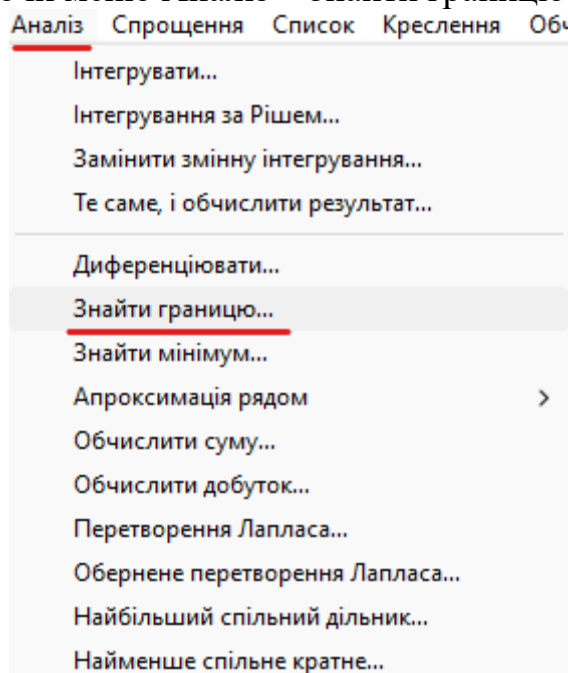


Рисунок 2.6 – Меню Аналіз – Знайти границю

З’явиться вікно, яке треба заповнити (див. рис. 2.7) і по натисканню кнопки «Гаразд» wxMaxima виведе результат аналогічний до рисунку 2.5.

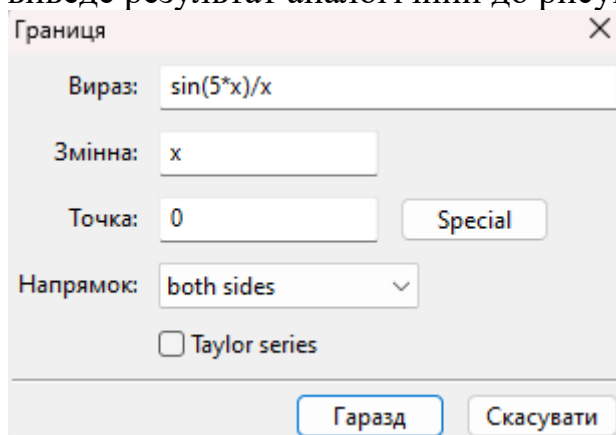


Рисунок 2.7 – Вікно «Границя»

Maxima підтримує обчислення односторонніх границь (див. рис. 2.8):

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ еквівалентно команді: `limit(f(x), x, a, minus);`
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ еквівалентно команді: `limit(f(x), x, a, plus);`

```
(%i4) limit(1/x, x, 0, minus);
```

```
(%o4) - ∞
```

```
(%i5) limit(1/x, x, 0, plus);
```

```
(%o5) ∞
```

Рисунок 2.8 – Знаходження односторонніх границь функції

Для нескінченності аналогічно (див. рис. 2.9):

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ еквівалентно команді: `limit(f(x), x, minf);`

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ еквівалентно команді: `limit(f(x), x, inf);`

```
(%i6) limit((1 + 1/x)^x, x, inf);
```

```
(%o6) %e
```

Рисунок 2.9 – Знаходження границі функції на нескінченності

Якщо Maxima не може обчислити границю, то вона залишає `limit(...)` без обчислення. У такому випадку треба спробувати спростити вираз, наприклад, `ratsimp(...)`, або використати команду для обчислення односторонньої границі, або задати параметри явно, наприклад, `assume(x>0)`.

У Maxima похідну функції можна знайти за допомогою команди (див. рис. 2.10):

```
diff(expr, x, n)
```

де

- `expr` – функція, похідну яку треба обчислити;
- `x` – змінна, за якою береться похідна;
- `n` – порядок похідної.

```
(%i1) diff(exp(x)*x, x, 2);
```

```
(%o1) x %ex + 2 %ex
```

Рисунок 2.10 – Знаходження другої похідної функції

Частинну похідну також можна знайти, використавши команду `diff`, вказавши через кому кожну змінну і порядок похідної по цій змінній (див. рис. 2.11).

```
(%i2) diff(x^5*y^3,x,2,y,3);
```

```
(%o2) 120 x3
```

Рисунок 2.11 – Знаходження частинної похідної функції

Інтерфейс wxMaxima підтримує другий варіант обчислення похідної функції, використовуючи меню Аналіз – Диференціювати (див. рис. 2.12).

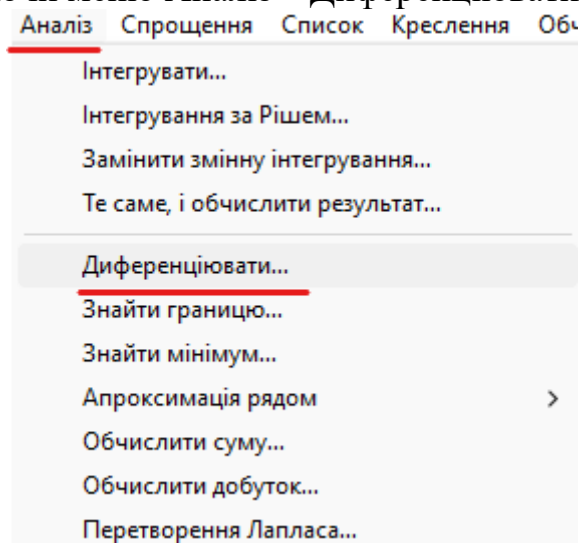
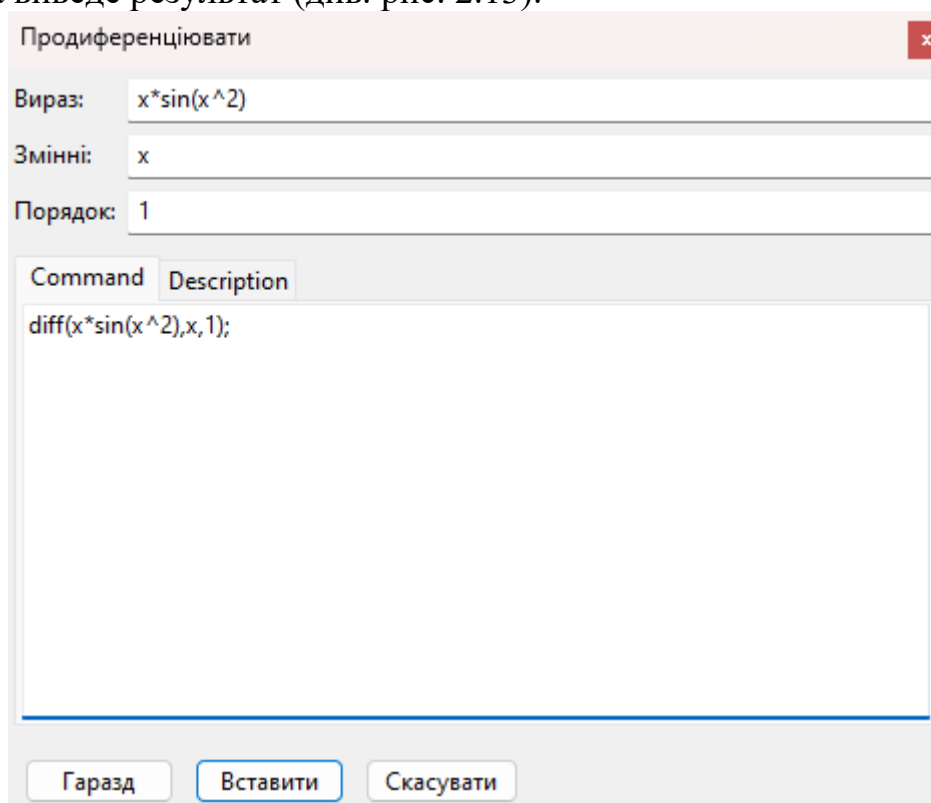


Рисунок 2.12 – Меню Аналіз – Диференціювати

З’явиться вікно, яке треба заповнити і по натисканню кнопки «Гаразд» wxMaxima виведе результат (див. рис. 2.13).



```
(%i10) diff(x*sin(x^2),x,1);
(%o10) sin(x^2) + 2 x^2 cos(x^2)
```

Рисунок 2.13 – Вікно «Продиференціювати»

Невизначений інтеграл можна знайти командою:

```
integrate(expr, x);
```

а визначений інтеграл командою (див. рис. 2.14):

`integrate(expr, x, a, b);`

де

- `expr` – функція, інтеграл від якої треба обчислити;
- `x` – змінна, за якою обчислюється інтеграл;
- `a`, `b` – межі інтегрування.

`(%i11) integrate(sqrt(1 - x^2), x, 0, 1);`

`(%o11)  $\frac{\pi}{4}$`

Рисунок 2.14 – Знаходження визначеного інтеграла

Якщо Maxima не може знайти інтеграл, то вона залишає `integrate(...)` без обчислення. Для числового результату після визначеного інтегралу можна використати команду `float(integrate(...))`.

Завдання до лабораторної роботи

1. Знайти розв'язок рівняння в аналітичному вигляді у СКА Maxima:

- 1) $\frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23$; $\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$.
- 2) $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 5$; $3 \log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.
- 3) $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$; $\sqrt{\log_3 x^9} - 4 \log_9 \sqrt{3x} = 1$.
- 4) $x^4 - \frac{50}{2x^4-7} = 14$; $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0$.
- 5) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$; $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$.
- 6) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$; $\log_2 182 - 2 \log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$.
- 7) $\frac{5a}{y+a} + \frac{4a}{y+2a} + \frac{3a}{y+3a} = 8$; $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$.
- 8) $\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{x^3+3} = \frac{1}{12}$; $\lg(x+1,5) = -\lg x$.
- 9) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}$; $5^{2(\log_5 2+x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$.
- 10) $(x-1)(x^2-3) + (2x-1)(x^2+2) = 3$;
 $0,25^{\log_2 \sqrt{x+3} - 0,5 \log_2 (x^2-9)} = \sqrt{2(7-x)}$.

2. Знайти розв'язок системи рівнянь в аналітичному вигляді у СКА Maxima:

- 1)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6, \\ 3x + 2y + z = 7, \\ (x-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7. \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2. \end{cases}$$

- 4) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 12, \\ (xy)^2 + xy = 6. \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 14, \\ x + y = 3. \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 8x + \frac{8}{y} = 3y^2, \\ y + \frac{1}{x} = 3x^2. \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} xy + \frac{y}{x} = 2(x^2 + y^2), \\ xy - \frac{x}{y} = x^2 + y^2. \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

3. Обчислити границі у СКА Maxima:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n^2+4n+5}.$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{5x^2} + \sqrt[4]{9x^8+1}}{x^5 + \sqrt{x}}.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-\sin 5x}.$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2-e^x - \cos 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+3n+1}{n^2+6n}.$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+3n+1}{n^2+6n}.$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - \cos 2x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+2} - 5x^2}{x - \sqrt{x^4 - x + 1}}.$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{x+1}.$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\sin 2x}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+36)}{4n^2+1}.$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt[4]{81x^8-1}}{x + 4\sqrt{x^5}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin 2x}.$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - \cos 2x}{\sin 8x}.$

4. Обчислити першу, другу і третю похідну функції у СКА Maxima.
Обчислити наближено першу похідну у заданій точці:

- 1) Від функції $f(x) = \frac{45x^7+12x^3+x^2}{5x^4+x-10}$ у точці $x_0 = -20$.
- 2) Від функції $f(x) = \frac{\cos^5 x}{\sqrt{x^3}}$ у точці $x_0 = -5$.

- 3) Від функції $f(x) = (-3x^3 + 5x) \sin 5x^2$ у точці $x_0 = 2$.
- 4) Від функції $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2x}\right)$ у точці $x_0 = -1$.
- 5) Від функції $f(x) = 4x \cdot \operatorname{arctg} x^3$ у точці $x_0 = -\pi$.
- 6) Від функції $f(x) = x^{-45x-9} + x^5 - e^{3x}$ у точці $x_0 = 13$.
- 7) Від функції $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3x^2}\right)$ у точці $x_0 = 16$.
- 8) Від функції $f(x) = e^{3 \sin x - 7 \cos x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{12}$.
- 9) Від функції $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{16x^2+1}$ у точці $x_0 = -5$.
- 10) Від функції $f(x) = \log_5(18 \arcsin x^2)$ у точці $x_0 = -4$.

5. Обчислити наближено визначений інтеграл у СКА Maxima:

- 1) Від функції $f(x) = e^{-3x^2}$ на проміжку $[0; 5]$.
- 2) Від функції $f(x) = \cos 9x^2$ на проміжку $[0; 3]$.
- 3) Від функції $f(x) = \sin 4x^2$ на проміжку $[0; 2]$.
- 4) Від функції $f(x) = \frac{1}{\ln 5x}$ на проміжку $[0; 1]$.
- 5) Від функції $f(x) = \frac{\cos 4x}{x}$ на проміжку $[0; 4]$.
- 6) Від функції $f(x) = \frac{\sin 9x}{x}$ на проміжку $[0; 7]$.
- 7) Від функції $f(x) = e^{-12x^2}$ на проміжку $[0; 9]$.
- 8) Від функції $f(x) = \frac{1}{\ln 11x}$ на проміжку $[0; 8]$.
- 9) Від функції $f(x) = \frac{\cos 2x}{x}$ на проміжку $[0; 1]$.
- 10) Від функції $f(x) = \frac{\sin 8x}{x}$ на проміжку $[0; 2]$.

6. Знайти значення інтеграла (невизначеного, визначеного, невластного) у СКА Maxima:

- 1) a) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
- 2) a) $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3} dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x} dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x dx}{x}$.
- 3) a) $\int x^3 \sin x dx$; b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
- 4) a) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-2x^2}}{xe^{x^2}} dx$.
- 5) a) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-4 \sin x+3 \cos x}$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2} dx$.
- 6) a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2} dx$; c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.
- 7) a) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$; b) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$; c) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$.
- 8) a) $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$; b) $\int_0^e \ln^3 x dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.
- 9) a) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$; b) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$; c) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx$.

10) а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть команду у СКА Maxima для розв'язання рівнянь і їх систем. Охарактеризуйте їх можливості.
2. Чи можливо у СКА Maxima розв'язувати нерівності?
3. Розкажіть про особливості знаходження розв'язків диференціальних рівнянь у СКА Maxima.
4. Наведіть команду у СКА Maxima для обчислення границь.
5. Наведіть команду у СКА Maxima для обчислення похідних.
6. Наведіть команду у СКА Maxima для обчислення інтегралів.
7. Охарактеризуйте можливості інтерфейсу wxMaxima для обчислення границь, похідних і інтегралів.