

6. Лабораторна робота. Реалізація обчислюваних методів у системі комп'ютерної алгебри Maxima

Мета: засвоїти можливості роботи СКА Maxima до написання власних алгоритмів для чисельних та аналітичних розрахунків.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації

У СКА Maxima можна реалізовувати обчислювальні методи – і це одна з її сильних сторін. Вона не обмежується лише символьними перетвореннями: Maxima містить повноцінну мову програмування (схожу на Lisp), що дозволяє писати власні алгоритми для чисельних та аналітичних розрахунків.

Можна реалізовувати:

1. чисельні методи аналізу:
 - метод Ньютона (для коренів рівнянь);
 - метод дихотомії;
 - метод січних;
 - чисельне інтегрування (метод трапецій, Сімпсона тощо);
 - чисельне диференціювання;
2. методи лінійної алгебри:
 - Гаусове виключення;
 - LU-, QR-розклад;
 - метод ітерацій для систем рівнянь;
3. методи статистики та теорії ймовірностей:
 - оцінка параметрів (метод моментів, МНК);
 - Монте-Карло моделювання;
 - генерація випадкових вибірок;
4. оптимізаційні алгоритми:
 - градієнтний спуск;
 - лінійне програмування;
 - задачі з обмеженнями.

Можна виділити такі інструменти Maxima для цього:

- цикли та умовні оператори (for, while, if-then-else);
- функції користувача (f(x) := ... або define);
- пакети з готовими методами, наприклад, numericalio (читання/запис чисел і масивів), lsquares (метод найменших квадратів), stats (статистика), draw (візуалізація результатів);
- чисельні функції, наприклад, find_root (пошук кореня на інтервалі), quad_qags (чисельне інтегрування), rk (чисельне розв'язання ОДУ методом Рунге–Кутти).

Приклад. Реалізувати метод Ньютона для рівняння $x^3 - x - 2 = 0$.

```
/* --- оголошуємо функцію і її похідну --- */  
f(x) := x^3 - x - 2;  
df(x) := diff(f(x), x);    /* або df(x) := 3*x^2 - 1; */
```

```

/* --- реалізація Ньютона (викликаємо через apply) --- */
newton(fun, dfun, x0, eps, maxiter) := block(
  [x : x0, iter : 0, fx, dfx],
  while abs(apply(fun, [x])) > eps and iter < maxiter do (
    fx : apply(fun, [x]),
    dfx : apply(dfun, [x]),
    if abs(dfx) < 1.0e-12 then (print("Derivative ~ 0 at
x=", x), return(['error, derivative_zero])),
    x : x - fx/dfx,
    iter : iter + 1
  ),
  if iter >= maxiter then (print("Max iterations reached"),
return([x, iter])),
  return([x, iter])
)$
f_lambda : lambda([t], t^3 - t - 2);
df_lambda : lambda([t], 3*t^2 - 1);

newton(f_lambda, df_lambda, 1.5, 1e-6, 100);

```

Результат – див. рис. 6.1:

```

(%i20) f_lambda : lambda([t], t^3 - t - 2);
      df_lambda : lambda([t], 3*t^2 - 1);

      newton(f_lambda, df_lambda, 1.5, 1e-6, 100);

f_lambda lambda([t], t^3 - t - 2)
df_lambda lambda([t], 3 t^2 - 1)
(%o20) [1.5213798059647863, 2]

```

Рисунок 6.1 – Результат роботи програми за методом Ньютона для рівняння

Завдання до лабораторної роботи

1. Ознайомтесь з прикладами реалізації деяких обчислювальних методів з підручника: Чичкарьов Є. А. Підручник-довідник із системи комп'ютерної алгебри Maxima, Розділ 8, стор. 159–177.
2. Реалізуйте наближений метод у системі комп'ютерної алгебри Maxima для заданого рівняння:
 - 1) $x^7 - 5x + 1 = 0$ (метод ділення навпіл);
 - 2) $3x^3 - \sqrt{x+1} = 0$ (метод простих ітерацій);
 - 3) $x^4 - x^3 - 9 = 0$ (модифікований метод Ньютона);
 - 4) $5x^7 - \sqrt{x^3 + 1} = 0$ (метод хорд);
 - 5) $6x^5 + 11x - 7 = 0$ (метод ділення навпіл);
 - 6) $9x^4 - \sqrt{x^2 + 1} = 0$ (метод простих ітерацій);

- 7) $7x^3 + 6x + 1 = 0$ (модифікований метод Ньютона);
 - 8) $6x^2 - \sqrt{x^2 + 9} = 0$ (метод хорд);
 - 9) $4x^5 - 2x^3 + 3 = 0$ (метод ділення навпіл);
 - 10) $3x^5 - \sqrt{x^2 + 11} = 0$ (метод простих ітерацій).
3. Реалізуйте наближений метод у системі комп'ютерної алгебри Maxima для заданого інтеграла:
- 1) $\int_0^1 \cos(5x^2) dx$ (метод середніх прямокутників);
 - 2) $\int_0^1 \sin(11x^2) dx$ (метод прямокутників);
 - 3) $\int_2^3 \ln \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (метод трапецій);
 - 4) $\int_4^9 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x+x}} \right) dx$ (метод Сімпсона);
 - 5) $\int_0^1 \cos(x^2 + 1) dx$ (метод середніх прямокутників);
 - 6) $\int_4^8 \ln \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ (метод прямокутників);
 - 7) $\int_1^2 \sin \left(\frac{1}{x^2} \right) dx$ (метод трапецій);
 - 8) $\int_5^7 \ln \frac{1}{x+1} dx$ (метод Сімпсона);
 - 9) $\int_1^2 \cos \left(\frac{1}{x^2} \right) dx$ (метод середніх прямокутників);
 - 10) $\int_2^3 \ln \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ (метод прямокутників).

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте метод ділення навпіл.
2. Охарактеризуйте метод простих ітерацій.
3. Охарактеризуйте модифікований метод Ньютона.
4. Охарактеризуйте метод хорд.
5. Охарактеризуйте метод середніх прямокутників.
6. Охарактеризуйте метод прямокутників.
7. Охарактеризуйте метод трапецій.
8. Охарактеризуйте метод Сімпсона.