

## 7. Лабораторна робота. Символьні перетворення у системі комп'ютерної алгебри SageMath

**Мета:** засвоїти можливості роботи системи комп'ютерної алгебри SageMath до символічних перетворень, таких як спрощення, розкладання, інтегрування, диференціювання.

### Теоретичні відомості та методичні рекомендації

SageMath – це потужний приклад математичного програмного забезпечення загального призначення, який поєднує можливості багатьох окремих систем в одному середовищі.

Sage – це безкоштовне і вільно розповсюджуване математичне програмне забезпечення з відкритими вихідними кодом для дослідницької роботи та навчання у різних областях включаючи алгебру, геометрію, теорію чисел, криптографію, чисельні обчислення та багато іншого. Як модель розробки Sage, так і умови його розповсюдження та використання обрані відповідно до принципів відкритої та спільної роботи: ми збираємо машину, а не винаходимо колесо. Однією з основних цілей Sage є створення доступної, безкоштовної та відкритої альтернативи Maple, Mathematica та MATLAB. Її головна ідея – об'єднати можливості багатьох уже існуючих математичних пакетів у єдиному зручному середовищі, зберігаючи безкоштовний і відкритий доступ.

У Sage є власне символічне ядро, проте Sage виступає переважно як інтегратор різних систем з єдиним графічним web-інтерфейсом – Jupyter Notebook (див. рис. 7.1).

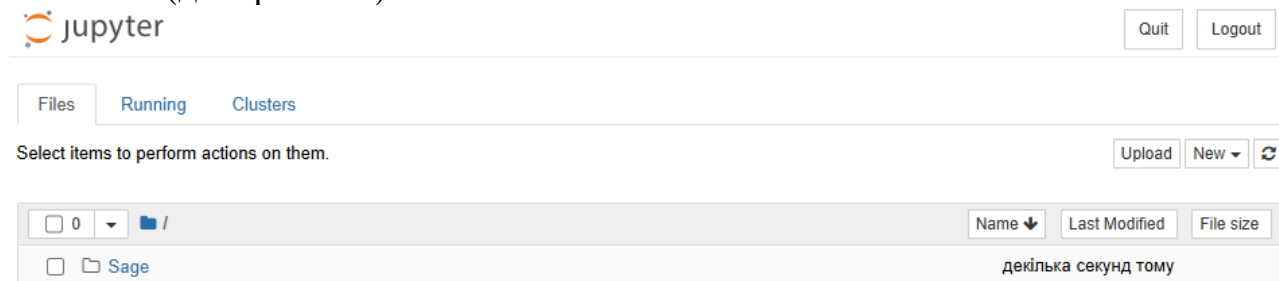


Рисунок 7.1 – Web-інтерфейс Jupyter Notebook

Основні характеристики:

1. відкритий код: SageMath поширюється під ліцензією GPL, тож кожен може вивчати, змінювати і поширювати її;
2. інтеграція з іншими системами – вона поєднує десятки бібліотек і пакетів, зокрема:
  - Maxima (символьна алгебра);
  - GAP (теорія груп);
  - PARI/GP (числова теорія);
  - SymPy (Python-бібліотека для символічної математики);
  - NumPy, SciPy, Matplotlib (наукові обчислення і графіка);
  - R (статистика);

3. мова програмування – використовує синтаксис Python, але з додатковими математичними можливостями;
4. підтримує різні типи обчислень:
  - символічні перетворення (спрощення, розкладання, інтегрування, диференціювання);
  - чисельні обчислення з довільною точністю;
  - розв’язування рівнянь і систем;
  - лінійну алгебру, аналіз, статистику;
  - теорію графів, комбінаторику;
  - диференціальні рівняння;
  - побудову 2D та 3D графіків.

У СКА SageMath є великий набір вбудованих числових і математичних констант, які можна використовувати без додаткового імпорту. Вони мають високу точність і можуть брати участь як у числових, так і в символічних обчисленнях.

У таблиці 7.1 наведено базові числові константи, що підтримуються системою SageMath:

Таблиця 7.1 – Базові числові константи у SageMath

Константа	Значення	Опис
pi	$\pi \approx 3.141592653$	Число $\pi$
e	$e \approx 2.718281828$	Число $e$ . Основа натурального логарифма
I або i	$\sqrt{-1}$	Уявна одиниця
oo	$\infty$	Нескінченність
NaN	–	«Not-a-Number», невизначене значення
sqrt(2)	$\approx 1.414213562$	Квадратний корінь з двох
sqrt(3)	$\approx 1.732050807$	Квадратний корінь з трьох
log2	$\approx 0.6931471806$	ln 2
log10	$\approx 2.302585093$	ln 10

У таблиці 7.2 наведено математичні та спеціальні константи, що підтримуються системою SageMath:

Таблиця 7.2 – Математичні та спеціальні константи у SageMath

Константа	Приблизне значення	Опис
EULER_GAMMA або euler_gamma	$\approx 0.5772156649$	Константа Ейлера–Маскероні
golden_ratio або phi	$\approx 1.6180339887$	Золоте відношення
Catalan	$\approx 0.9159655941$	Константа Каталана
Khinchin	$\approx 2.6854520010$	Константа Хінчина

twinprime_constant	$\approx 0.6601618158$	Константа подвійних простих чисел
zeta(n)		Функція Рімана, наприклад, $\text{zeta}(3) \approx 1.202056903$
degree	$\frac{\pi}{180}$	Один градус у радіанах
rad	$\frac{180}{\pi}$	Один радіан у градусах

Усі ці константи можуть бути символьними або числовими з довільною точністю. Можна вказати точність обчислень, наприклад,

`pi.n(100) # 100 знаків після коми`

У SageMath тригонометричні функції задаються так само, як у математиці, тільки в синтаксисі Python, причому вони можуть працювати і з числами, і з символьними виразами. У таблиці 7.3 наведено основні тригонометричні функції, що підтримуються системою SageMath:

Таблиця 7.3 – Основні тригонометричні функції у SageMath

Функція	Опис
<code>sin(x)</code>	синус
<code>cos(x)</code>	косинус
<code>tan(x)</code>	тангенс
<code>cot(x)</code>	котангенс
<code>sec(x)</code>	секанс
<code>csc(x)</code>	косеканс
<code>asin(x)</code>	арксинус
<code>acos(x)</code>	арккосинус
<code>atan(x)</code>	арктангенс
<code>acot(x)</code>	арккотангенс
<code>asec(x)</code>	арксеканс
<code>acsc(x)</code>	арккосеканс

У таблиці 7.4 наведено гіперболічні функції, що підтримуються системою SageMath:

Таблиця 7.4 – Гіперболічні функції у SageMath

Функція	Опис
<code>sinh(x)</code>	гіперболічний синус
<code>cosh(x)</code>	гіперболічний косинус
<code>tanh(x)</code>	гіперболічний тангенс
<code>coth(x)</code>	гіперболічний котангенс
<code>asinh(x)</code>	арксинус гіперболічний
<code>acosh(x)</code>	арккосинус гіперболічний

<code>atanh(x)</code>	арктангенс гіперболічний
<code>acoth(x)</code>	арккотангенс гіперболічний

У SageMath аргументи тригонометричних функцій за замовчуванням задаються в радіанах.

Арифметичні оператори у Sage:

- 1) + (додавання);
- 2) - (віднімання);
- 3) \* (множення);
- 4) / (ділення);
- 5) // (ділення націло);
- 6) % (остача від ділення);
- 7) ^ (піднесення до степеню);
- 8) \*\* (піднесення до степеню);
- 9) - (унарний мінус).

Приклад використання (див. рис. 7.2):

```
In [16]: sin(pi/2)+cos(pi)
```

```
Out[16]: 0
```

```
In [17]: tan(pi/4).n()
```

```
Out[17]: 1.0000000000000000
```

Рисунок 7.2 – Тригонометричні обчислення у СКА SageMath

Оператор присвоєння: =

```
In [16]: a = 7
         b = 5
```

```
In [17]: a == b
```

```
Out[17]: False
```

```
In [18]: a != b
```

```
Out[18]: True
```

```
In [19]: a >= b
```

```
Out[19]: True
```

Рисунок 7.3 – Приклади порівняння

Оператори порівняння (див. рис. 7.3):

- == (рівність). Перевіряє, чи два значення рівні;
- != (нерівність). Перевіряє, чи два значення не рівні;

- `<=` (менше або дорівнює). Перевіряє, чи одне значення менше або дорівнює іншому;
- `>=` (більше або дорівнює). Перевіряє, чи одне значення більше або дорівнює іншому;
- `<` (менше). Перевіряє, чи одне значення менше за інше;
- `>` (більше). Перевіряє, чи одне значення більше за інше.

Часто використовується метод `n()` (аналог функція `numerical_approx`). Цей метод приймає необов'язкові аргументи `prec`, що визначає кількість бітів точності, і `digits`, що визначає кількість десяткових цифр точності. За замовчуванням застосовується 53 біти точності (див. рис. 7.4).

```
In [1]: exp(1)
Out[1]: e

In [2]: n(exp(1))
Out[2]: 2.71828182845905

In [4]: exp(1).numerical_approx()
Out[4]: 2.71828182845905

In [5]: n(exp(1), digits=10)
Out[5]: 2.718281828

In [6]: n(exp(1), prec=100)
Out[6]: 2.7182818284590452353602874714
```

Рисунок 7.4 – Приклади обчислень з наперед заданою точністю

Якщо у виразі присутня більше ніж одна змінна, то Sage вимагає оголошення всіх їх символічними змінними – `var('x, y')` або `(x, y) = var('x, y')`.

У Sage є багато команд для перетворення алгебраїчних виразів, які дозволяють спрощувати, розкладати, розв'язувати та іншим чином маніпулювати виразами. Ось основні з них:

- функція `simplify()` спрощує вираз різними методами (без розкриття дужок);
- для розкриття дужок використовується функція `expand()`;
- функція `factor()` розкладає вираз на множники;
- функція `simplify_full()` виконує повне спрощення виразу з використанням кількох методів спрощення;
- функція `simplify_trig()` спрощує тригонометричні вирази;

- функція `simplify_rational()` спрощує раціональні вирази;
- функція `simplify_log()` спрощує логарифмічні вирази;
- функція `canonicalize_radical()` спрощує вирази з радикалами;
- функція `expand_trig()` розкриває дужки у тригонометричних виразах;
- функція `log_expand()` розкриває дужки у виразах, які містять логарифми;
- функція `partial_fraction()` розкладає раціональний дріб на прості дроби.

Ці команди дозволяють працювати з різними видами алгебраїчних виразів, спрощуючи, розкладаючи та маніпулюючи ними для досягнення потрібного результату, наприклад, див. рис. 7.5-7.6:

```
In [30]: expr8 = (x^2 - 1)^2/(x + 1)^4
         expr8.simplify_rational()
```

```
Out[30]: (x^2 - 2*x + 1)/(x^2 + 2*x + 1)
```

Рисунок 7.5 – Приклад спрощення раціональних виразів

```
In [45]: expr13 = 7/(x^3 - 1)
         expr13.partial_fraction()
```

```
Out[45]: -7/3*(x + 2)/(x^2 + x + 1) + 7/3/(x - 1)
```

Рисунок 7.6 – Приклад розкладання раціонального дроби на прості дроби

### Завдання до лабораторної роботи

1. Обчислити у СКА SageMath з точністю до 15 знаків після коми:

- 1)  $\frac{(7-6,35):6,5+9,9}{(1,2:36+1,2:0,25-1\frac{5}{16}):\frac{169}{24}}$
- 2)  $\left(\left(\frac{7}{9} - \frac{47}{72}\right) : 1,25 + \frac{7}{40}\right) : (0,358 - 0,108) \cdot 1,6 - \frac{19}{25}$
- 3)  $\frac{(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11})\cdot 3}{(1,5+\frac{1}{4}):18\frac{1}{3}}$
- 4)  $\left(\frac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{70}} + 0,125\right) : 2\frac{1}{2} + 0,43$
- 5)  $\frac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}:\frac{5}{7}}{2,5+0,4\cdot 3\frac{1}{3}} - \frac{(2\frac{1}{6}+4,5)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$
- 6)  $\frac{(13,75+9\frac{1}{6})\cdot 1,2}{(10,3-8\frac{1}{2})\cdot \frac{5}{9}} + \frac{(6,8-3\frac{3}{5})\cdot 5\frac{5}{6}}{(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6})\cdot 56} - 27\frac{1}{6}$

- 7)  $\frac{(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}):(\frac{1}{6}+0,1-\frac{1}{15})\cdot 2,52}{(0,5-\frac{1}{3}+0,25-\frac{1}{5}):(\frac{1}{6}-0,25-\frac{1}{5})\cdot \frac{7}{13}}$
- 8)  $\left(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-3\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}} \cdot 5,2\right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125} + 5,7\right)$
- 9)  $\frac{0,4+8(5-0,8\cdot\frac{5}{8})-5\cdot 2\frac{1}{2}}{(1\frac{7}{8}\cdot 8-(8,9-2,6:\frac{2}{3}))\cdot 34\frac{2}{5}} \cdot 90$
- 10)  $\frac{(\frac{5}{45}-4\frac{1}{6})\cdot 5\frac{8}{15}}{(\frac{2}{3}+0,75)\cdot 3\frac{9}{13}} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0,3:0,01}{70} + \frac{2}{7}$

2. Розкласти дробово-раціональну функцію на суму елементарних дробів у СКА SageMath:

- 1)  $\frac{x^2-5}{(x^2-4x+5)(x^2+9)}$
- 2)  $\frac{x+1}{x(x^4+6x^2+8)}$
- 3)  $\frac{1}{x^2(x^2+4)^2}$
- 4)  $\frac{3x^3+2x^2+1}{x(x+1)^2(x^2+4)}$
- 5)  $\frac{x^4-1}{(x^2+9)(x^3+x^2)}$
- 6)  $\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}$
- 7)  $\frac{3x^2+4x-1}{(x^2+4x+29)^2}$
- 8)  $\frac{x^3-x-1}{x(x-1)^2(x^2+4)}$
- 9)  $\frac{x^4-1}{(x^2+16)(x^3+x^2)}$
- 10)  $\frac{5}{(x+4)(x^2+4x+20)}$

3. Спростити вираз у СКА SageMath:

- 1)  $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$
- 2)  $\left(\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2} + \left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right) : \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$
- 3)  $\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
- 4)  $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b)\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$
- 5)  $x \cdot \frac{1+\frac{2}{\sqrt{x+4}}}{2-\sqrt{x+4}} + \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}}$
- 6)  $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$
- 7)  $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$

$$8) \frac{x-1}{x^4+x^2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+x^{\frac{1}{4}}}}{x^{\frac{1}{2}+1}} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1.$$

$$9) \left( \frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} \cdot (5 - 2x^2).$$

$$10) \sqrt{\frac{2a}{(1+a)^3\sqrt{1+a}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}.$$

### Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте систему комп'ютерної алгебри SageMath.
2. Які Ви знаєте базові числові константи у SageMath?
3. Які Ви знаєте математичні та спеціальні константи у SageMath?
4. З якою точністю можна проводити обчислювання у SageMath?
5. У яких одиницях беруться аргументи тригонометричних функцій за замовчуванням у SageMath?
6. Коли зручно використовувати функцію `numerical_approx()`?
7. Як оголошуються символічні змінні у SageMath?
8. Охарактеризуйте команди для перетворення алгебраїчних виразів, які дозволяють спрощувати, розкладати і розв'язувати у SageMath?