

8. Лабораторна робота. Робота з графікою у системі комп'ютерної алгебри SageMath

Мета: засвоїти можливості роботи системи комп'ютерної алгебри SageMath до побудови графіків у декартовій, параметричній і полярній системі координат, а також поверхонь у просторі.

Теоретичні відомості та методичні рекомендації

У SageMath побудова графіків у декартовій, параметричній та полярній системах робиться різними функціями, але всі вони підтримують як числові, так і символічні вирази.

SageMath має дуже широкі можливості для побудови графіків – від простих 2D-кривих до складних 3D-поверхонь. Система інтегрує інструменти на основі Matplotlib, Jmol, Three.js та інших візуалізаційних бібліотек, тому підтримує і наукову, і навчальну графіку.

1. Декартова система координат. Використовується функція:

```
plot(f, (x, xmin, xmax), options...)
```

де f – вираз або функція від x ; $(x, xmin, xmax)$ – змінна і діапазон побудови (див. рис. 8.1).

```
x = var('x')
```

```
plot(sin(x), (x, -2*pi, 2*pi), color='blue', thickness=2)
```

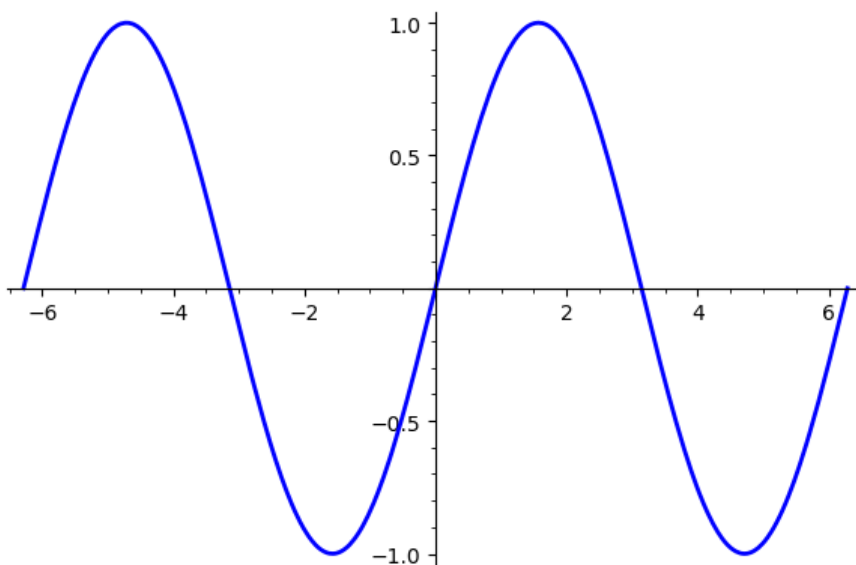


Рисунок 8.1 – Приклад 2D-графіки у декартовій СК

Можна будувати кілька функцій разом:

```
p1 = plot(sin(x), (x, -pi, pi), color='red')
```

```
p2 = plot(cos(x), (x, -pi, pi), color='green')
```

```
p1 + p2
```

Результат зображено на рис. 8.2:

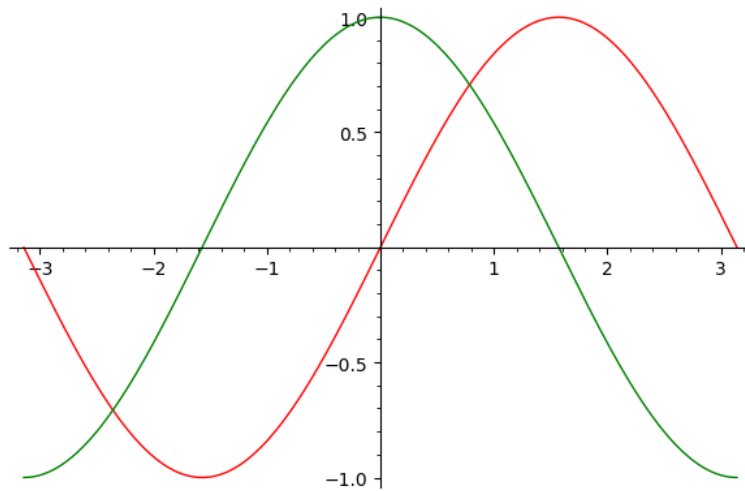


Рисунок 8.2 – Приклад двох графіків на одному рисунку

2. Параметрична система координат. Використовується функція:
`parametric_plot((x_expr, y_expr), (t, tmin, tmax), options...)`

де (x_expr, y_expr) – вирази для координат X і Y через параметр t ; $(t, tmin, tmax)$ – діапазон параметра (див. рис. 8.3).

`t = var('t')`

`parametric_plot((2*(cos(t))^3, 2*(sin(t))^3), (t, 0, 2*pi), color='purple')`

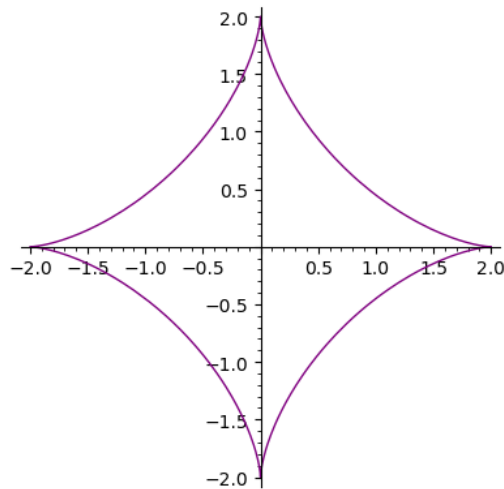


Рисунок 8.3 – Астроїда

Більш складна крива (спіраль Архімеда, див. рис. 8.4):

`parametric_plot((t*cos(t), t*sin(t)), (t, 0, 6*pi), color='orange')`

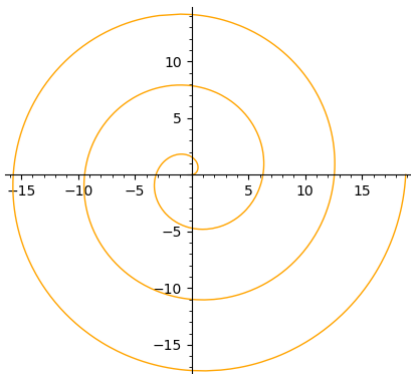


Рисунок 8.4 – Спіраль Архімеда

3. Полярна система координат. SageMath може двома способами побудувати лінію у полярній системі координат – полярну криву можна задати параметрично:

$$x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta,$$

або використати `polar_plot` з `sage.plot.polar_plot` (у старих версіях SageMath (\approx до 9.0)). У новіших версіях функція `polar_plot` стала доступна напряму з головного простору імен SageMath (без імпорту з підмодулів).

Наприклад (див. рис. 8.5):

```
theta = var('theta')
r = 2*sin(4*theta)
parametric_plot((r*cos(theta), r*sin(theta)), (theta, 0,
2*pi), color='magenta')
```

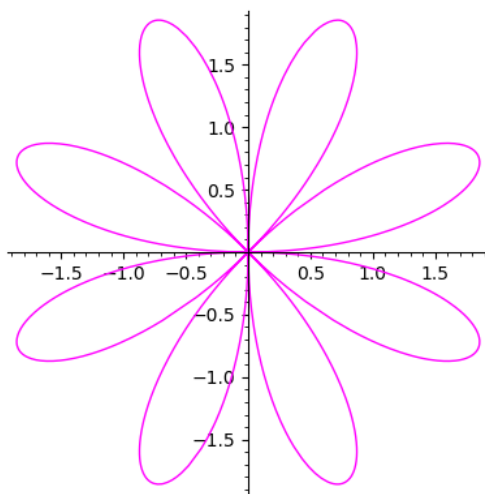


Рисунок 8.5 – Полярна роза

Або з вбудованим `polar_plot`. Результат буде той же, що і на рис. 8.5:

```
theta = var('theta')
polar_plot(2*sin(4*theta), (theta, 0, 2*pi),
color='magenta')
```

Додаткові можливості графіків:

- товщина лінії: `thickness=2`;
- колір: `color='red'`;
- додати сітку: `gridlines=True`;
- підписати осі: `axes_labels=['x', 'y']`;
- експорт у файл: `.save('name.png')`.

4. Кілька графіків разом. Графіки можна додавати оператором `+`, щоб порівнювати різні функції (див. рис. 8.6):

```
p1 = plot(x^2, (x, -5, 5), color='red')
p2 = plot(-2*x+3, (x, -5, 5), color='green')
p1 + p2
```

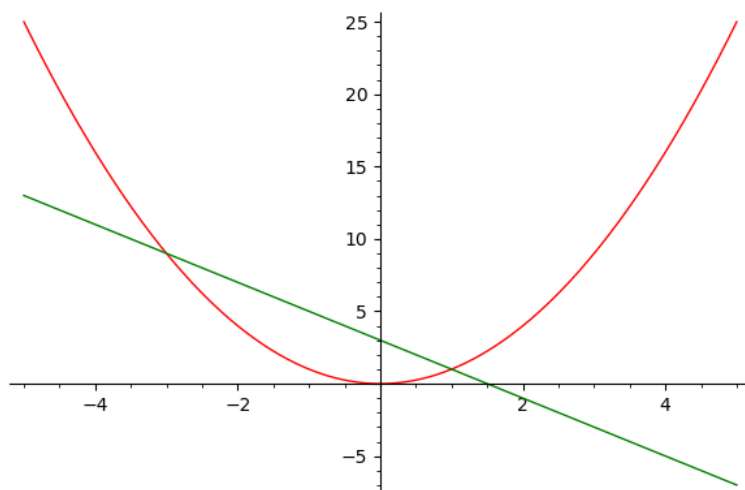


Рисунок 8.6 – Кілька графіків разом

5. Побудова поверхонь у 3D. SageMath підтримує як статичні, так і інтерактивні 3D-графіки. Функції двох змінних:

```
plot3d(f, (x, xmin, xmax), (y, ymin, ymax))
```

Наприклад, див. рис. 8.7

```
x, y = var('x y')
```

```
plot3d(sin(sqrt(x^2 + y^2))/(sqrt(x^2 + y^2)), (x, -5, 5), (y, -5, 5))
```

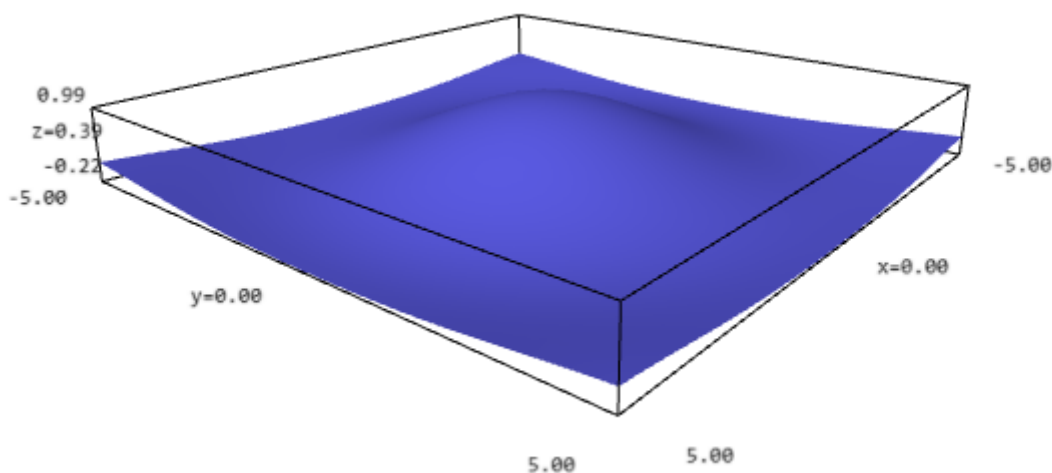


Рисунок 8.7 – Поверхня $\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Параметричні поверхні:

```
parametric_plot3d((X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)), (u, umin, umax), (v, vmin, vmax))
```

Наприклад, див. рис. 8.8

```
u, v = var('u v')
```

```
parametric_plot3d((cos(u)*sin(v), sin(u)*sin(v), cos(v)), (u, 0, 2*pi), (v, 0, pi))
```

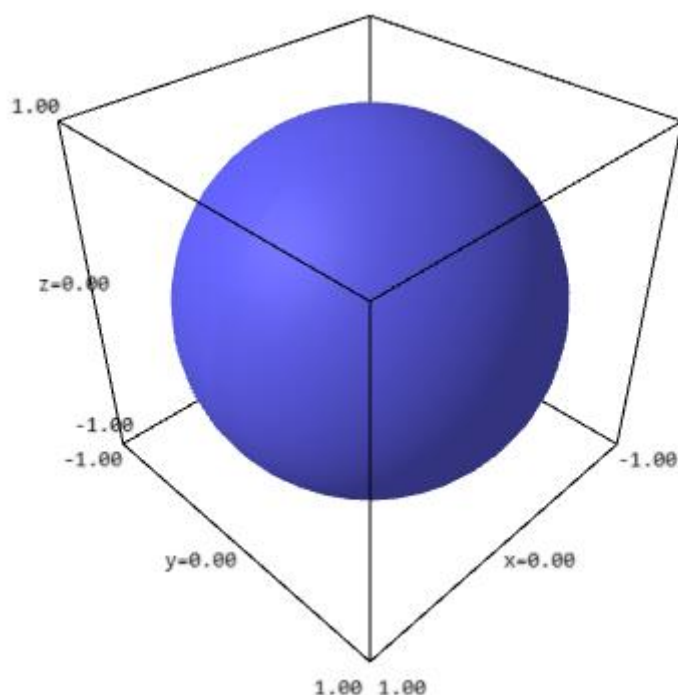


Рисунок 8.8 – Поверхня, яка задана параметрично

Полярні та циліндричні форми: можна використовувати параметричне задання через r , θ , z .

Отже, переваги побудови графіків у SageMath такі:

- єдиний синтаксис для 2D та 3D;
- можливість працювати одночасно з числовими та символічними виразами;
- підтримка складних параметричних і полярних форм;
- легка інтеграція з Python-бібліотеками для візуалізації (Matplotlib, Plotly).

Завдання до лабораторної роботи

1. Побудувати графіки функцій у декартовій системі координат у СКА SageMath (спочатку по одному, а потім два графіка на одному рисунку різного кольору):

1) a) $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$; b) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

2) a) $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2} - x$; b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.

3) a) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$; b) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

4) a) $y = 8x^2(x^2 - 1)^3$; b) $y = \frac{x}{2} - \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

5) a) $y = \frac{x^5-8}{x^4}$; b) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

6) a) $y = \frac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$; b) $y = \frac{x}{\ln x}$.

7) a) $y = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x}$; b) $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

- 8) a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; b) $y = (x^2 - 2)e^{-2x}$.
 9) a) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$; b) $y = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + \frac{6}{1+x}$.
 10) a) $y = \frac{x^2+2x-3}{x} - e^{\frac{1}{x}}$; b) $y = \frac{x}{2} + 2 \operatorname{arctg} x$.

2. Побудувати графіки функцій, заданих у параметричній системі координат у СКА SageMath:

- 1) $x = \frac{9}{2} \cos^3 t, y = \frac{9}{4} \sin^3 t, t \in [0; 2\pi]$.
 2) $x = t^3 - 2, y = t - 2, t \in [0; 10]$.
 3) $x = 5 \left(\cos t + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right), y = 5 \sin t, t \in [0; 2\pi]$.
 4) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]$.
 5) $x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}, y = 2 \operatorname{ch} t, t \in [0; 15]$.
 6) $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, t \in [0; \pi]$.
 7) $x = 3(\operatorname{sh} t - t), y = 3(\operatorname{ch} t - 1), t \in [0; 21]$.
 8) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 9) $x = 2t^3(1 - t^2), y = t\sqrt{7}, t \in [0; 12]$.
 10) $x = 2t^2, y = t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right), t \in [0; 20]$.

3. Побудувати графіки функцій, заданих у полярній системі координат у СКА SageMath:

- 1) $\rho = 5 \sin^2 2\varphi$.
 2) $\rho = 7 \cos^2 \varphi$.
 3) $\rho = 2(1 + \sin^2 \varphi)$.
 4) $\rho = 4 \sin 2\varphi$.
 5) $\rho = 9 \cos 5\varphi$.
 6) $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.
 7) $\rho = 3 \cos 3\varphi$.
 8) $\rho = 8 \cos 4\varphi$.
 9) $\rho = 7 \sin 5\varphi$.
 10) $\rho = 2 \sin 4\varphi$.

4. Побудувати поверхні, використовуючи основні опції функції `plot3d()` у декартовій системі координат у СКА SageMath:

- 1) $z = 2x^2 + 9y^2$.
 2) $z = 3 - (x^2 + y^2)$.
 3) $z = 4 - x^2$.
 4) $z = \frac{y^2}{5}$.
 5) $z = 2x^2 - 3y^2$.
 6) $z = 12 + x^2 + 2y^2$.
 7) $z = 2x^2 - 3$.
 8) $z = 4x^2 + \frac{y^2}{3} + 1$.
 9) $z = \frac{x^2}{3} - 6$.

$$10) \quad z = 6x^2 - y^2.$$

5. Побудувати поверхні, задані параметрично, у СКА SageMath:

- 1) Площина $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 2u + 3v. \end{cases}$, де $u, v \in \mathbb{R}$.
- 2) Параболоїд обертання $\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2. \end{cases}$, де $u \geq 0, v \in [0; 2\pi]$.
- 3) Однопорожнинний гіперболоїд $\begin{cases} x = \cosh v \cos u, \\ y = \cosh v \sin u, \\ z = \sinh v. \end{cases}$, де $u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi]$.
- 4) Тор $\begin{cases} x = (7 + 3 \cos u) \cos v, \\ y = (7 + 3 \cos u) \sin v, \\ z = r \sin u. \end{cases}$, де $u, v \in [0; 2\pi]$.
- 5) Сфера $\begin{cases} x = 2 \sin u \cos v, \\ y = 2 \sin u \sin v, \\ z = 2 \cos u. \end{cases}$, де $u, v \in [0; 2\pi]$.
- 6) Мобіусова смуга $\begin{cases} x = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \\ y = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \\ z = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}. \end{cases}$, де $u \in [0; 2\pi], v \in [-1; 1]$.
- 7) Конус $\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = 7u. \end{cases}$, де $u \geq 0, v \in [0; 2\pi]$.
- 8) Циліндр $\begin{cases} x = 4 \cos u, \\ y = 4 \sin u, \\ z = v. \end{cases}$, де $u \in [0; 2\pi], v \in \mathbb{R}$.
- 9) Гіперболічний параболоїд $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 - v^2. \end{cases}$, де $u, v \in \mathbb{R}$.
- 10) Поверхня синусоїдального гребеня $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \sin u \cdot \cos v. \end{cases}$, де $u, v \in \mathbb{R}$.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте можливості побудови графіків у СКА SageMath.
2. Розкажіть про синтаксис функції plot().
3. Розкажіть про синтаксис функції parametric_plot().
4. Розкажіть про синтаксис функції polar_plot().
5. Розкажіть про синтаксис функції plot3d().
6. Розкажіть про синтаксис функції parametric_plot3d().
7. Як змінити підписи осей на графіку?
8. Як можна покращити оформлення графіків у СКА SageMath?
9. Чи можна будувати кілька графіків одночасно? Якщо так, як?