

ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, що містить невідому величину під знаком логарифма.

Найпростішим логарифмічним рівнянням називається рівняння виду

$$\boxed{\log_a x = b}$$

ОДЗ: $x > 0$

$\Downarrow$

$$x = a^b$$

№ 1. Розв'язати рівняння $\log_3 x = 2$.

Рівняння

$$\boxed{\log_a f(x) = b}$$

еквівалентне системі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

Зауваження. Можна спочатку окремо знайти ОДЗ: $f(x) > 0$, а потім розв'язки рівняння $f(x) = a^b$ перетнуть з ОДЗ.

№ 2. Розв'язати рівняння $\log_3(x^2 - 3) = 0$.

Рівняння

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

рівносильне одній з наступних систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Зауваження. Обирається та система, що містить більш просту нерівність. Якщо нерівність є достатньо складною, то її можна не розв'язувати, але в кінці обов'язково потрібно виконати перевірку отриманих розв'язків.

Зауваження. Рівняння виду $\log_a x = b$ можна звести до вище наведеного типу наступним чином:

$$\begin{aligned} \log_a x &= b \cdot 1, \\ \log_a x &= b \cdot \log_a a, \\ \log_a x &= \log_a a^b \Rightarrow x = a^b. \end{aligned}$$

№ 3. Розв'язати рівняння $\log_2(8 - x) = \log_2(x + 12)$.

Рівняння виду

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)}.$$

рівносильне одній із систем

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Зауваження. Також рівняння такого типу можна розв'язувати за наступним алгоритмом:

1) знайти ОДЗ рівняння

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases}$$

2) знайти розв'язки еквівалентного рівняння $f(x) = g(x)$;

3) у відповідь записати ті розв'язки з пункту 2, які задовольняють ОДЗ, що було знайдено у першому пункті.

№ 4. Розв'язати рівняння $\log_{x+1}(x^2 + 2x) = \log_{x+1} 3$.

№ 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{\log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3$.

№ 6. Розв'язати рівняння $\log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$.

№ 7. Розв'язати рівняння $\log_{x^2+2}(4 - 5x^2 - 6x^3) = 2$.

№ 8. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x - 6) - \log_{x-6}\sqrt{x} = -2$.

№ 9. Розв'язати рівняння $\log_{2x+1}(5+8x-4x^2)+\log_{5-2x}(1+4x+4x^2)=4$.

№ 10. Розв'язати рівняння $\log_{4x} \frac{4x}{x+1} = |\log_{4x}(x+1)-1|$.

№ 11. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \lg(x - 4y) = 0, \\ \lg 2x + \lg y = 1. \end{cases}$$

№ 12. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} xy = 27, \\ \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$