

ТЕМА 5. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ПОРТФЕЛЮ АКТИВІВ КОМПАНІЇ

1. Портфель активів: основні поняття та визначення
2. Кореляція активів, як основа управління портфелем
3. Оптимізація портфелю з двох активів
4. Оптимізація портфелю з N активів. Модель Марковіца

5.1. Портфель активів: основні поняття та визначення

Суттєво знизити економічний ризик від володіння активами можна в тому випадку, якщо інвестувати кошти не в поодинокі проекти, а в їхню сукупність, утворюючи портфель активів.

Портфель проектів – це диверсифікація (розподіл) інвестиційних коштів на реалізацію різних проектів в найбільш доходному, або менш ризикованому (надійному) співвідношенні.

Структура портфелю активів – це співвідношення часток коштів, вкладених в реалізацію різних проектів.

Таким чином, портфель активів компанії – це не просто набір виробничих технологій певної сукупної вартості, а пропорція (структура), з якою ці технології входять в портфель.

Будь-яка операційна, інвестиційна чи фінансова діяльність, за своєю суттю, є ризикованими. Тому, ідея поєднання максимізації прибутковості портфеля активів з мінімізацією ризику, є головною метою його формування.

Проте, формування оптимального портфеля активів – це лише початковий етап з його управління. Вартість продукції, обсяги її випуску, курси валют чи акцій змінюються з часом. Тому, управління портфелем активів вимагає постійної корекції його структури.

Управління портфелем активів – це процес формування, аналізу й систематичного коригування структури портфеля, з метою забезпечення максимальної віддачі від використання активів, в умовах мінімального ризику.

Вказані цілі є суперечливими між собою, оскільки максимізація віддачі призводить до зростання ризику й навпаки. Тому, ми маємо задачу багатокритеріальної оптимізації, яка може вирішуватись двома шляхами:

- мінімізація ризику в умовах прийнятного (задовільного) рівня доходності;
- максимізація доходності в умовах прийнятного (допустимого) рівня ризику.

Під **ризиком портфелю активів** будемо розуміти міру настання обставин, за яких суб'єкт господарювання може зазнати небажаних втрат, або ступінь відхилення фактичної середньої доходності портфелю від очікуваної.

В основі управління портфелем активів покладений **принцип диверсифікації** – це розподіл інвестиційних коштів між різноманітними активами, видами діяльності, галузями, регіонами, часом.

Наприклад, якщо ви прагнете убезпечити вільні грошові кошти (гривню) від знецінення внаслідок інфляції, зазвичай, ви купуєте долари чи євро. Портфельний інвестор диверсифікує свої кошти в різні валюти одночасно: долари, євро, англійські фунти стерлінгів, швейцарські франки тощо.

Вибір стратегії диверсифікації інвестиційних коштів залежить від мети формування портфелю, табл. 1.

Таблиця 1 – Класифікація портфелю активів за метою

Тип портфелю	Мета	Основні активи	Рівень ризику
Портфель зростання	Максимальне збільшення вартості активів	Акції інноваційних компаній з високим потенціалом зростання	Високий
Збалансований	Регулярні грошові виплати, або баланс між доходом й стабільністю	Акції успішних компаній з помірним зростанням, облігації	Середній
Консервативний	Збереження капіталу	Державні облігації, банківські депозити у державних банках, готівка	Низький

Незалежно від типу сформованого портфелю (табл. 1), головною метою диверсифікації є зниження волатильності (коливань) портфелю без значної втрати його потенційної доходності.

5.2. Кореляція активів, як основа управління портфелем

Під час вивчення експертних методів прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику, основною проблемою завжди був вибір пріоритету, що є важливішим: мінімізація ризику, або максимізація доходності. Тоді, вказане питання вирішувалось чисто суб'єктивно, в залежності від схильності до ризику особи, що приймає рішення та її функції переваги.

На противагу цьому, в основі управління портфелем активів покладено **загальне правило диверсифікації**: в портфель необхідно включати ті активи (проекти), які мають від'ємну кореляцію своїх життєвих циклів, що наближається до -1.

Тобто, для мінімізації ризику, не всі можливі проекти слід долучати до формування портфелю активів своєї компанії, а лише ті, в яких коливання життєвих циклів мають протилежний характер.

На рис. 1 показаний випадок, коли проекти А та В мають синхронні періоди коливань очікуваних доходностей протягом року. Підприємство може спрямувати наявні інвестиційні кошти на реалізацію проекту А, або проекту В.

Також, підприємство може розподілити ці кошти між двома проектами в пропорції 50/50 й сформувати портфель АВ. Життєвий цикл портфелю АВ показаний на рис. 1 червоною лінією. В такому випадку, підприємство отримає усереднене значення очікуваної доходності й усереднену варіацію (коливання) даного показника.

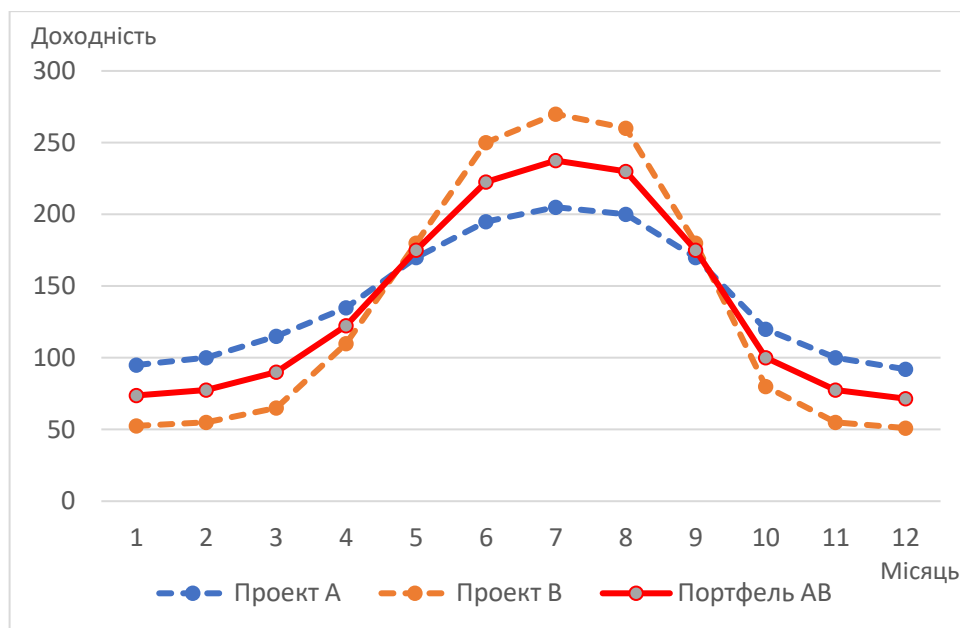


Рис. 1. Синхронні коливання життєвих циклів проектів А та В

На рис. 2 показаний випадок, коли проекти А та В мають протилежні періоди коливань очікуваних доходностей протягом року. Так само, підприємство може спрямувати наявні інвестиційні кошти на реалізацію проекту А, або проекту В.

Також, підприємство може розподілити ці кошти між двома проектами в пропорції 50/50 й сформувати портфель АВ, який показаний червоною лінією. В такому випадку, підприємство отримає усереднене значення очікуваної доходності й суттєве зниження варіації (коливань) даного показника.

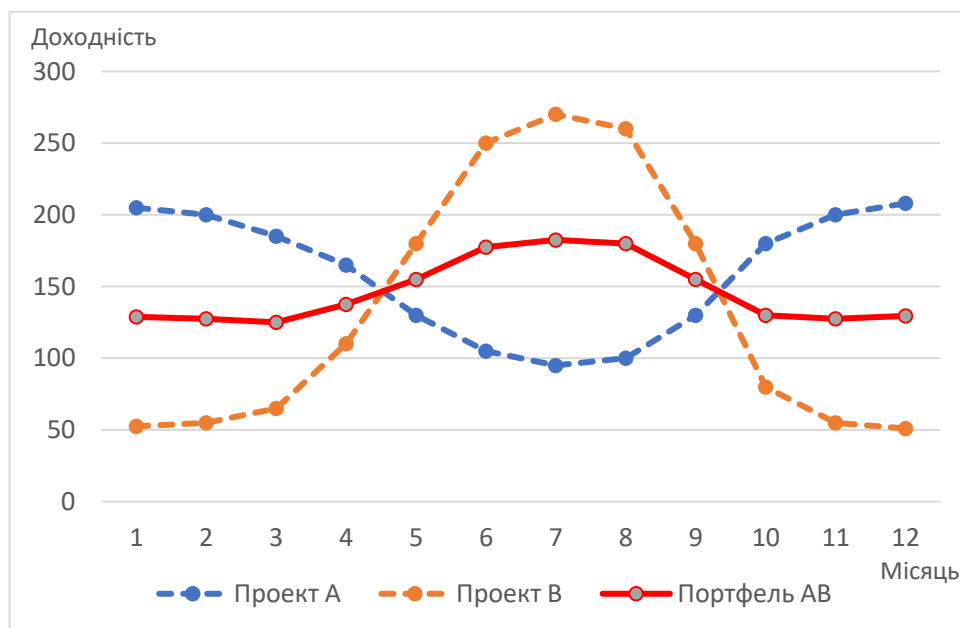


Рис. 2. Протилежні коливання життєвих циклів проектів А та В

Синхронність коливань очікуваної доходності різних активів, з яких формується портфель, можна оцінити за допомогою коефіцієнта коваріації, який розраховується за формулою:

$$Cov(R1_t; R2_t) = \frac{\sum_{t=1}^n [(R1_t - \overline{R1}) \times (R2_t - \overline{R2})]}{n - 1}, \quad (1)$$

Де $R1_t$, $R2_t$ – відповідно, доходності першого й другого активу (проекту) за період часу t ;

$\overline{R1}$, $\overline{R2}$ – відповідно, середня доходність першого й другого активу (проекту) за весь період часу, тривалістю n .

1. Додатна коваріація ($Cov(R1_t; R2_t) > 0$) означає узгодженість коливань доходностей оцінюваних активів.

2. Значення коваріації, близьке до нуля ($Cov(R1_t; R2_t) \approx 0$) означає відсутність узгоджених коливань між ними.

3. Від'ємна коваріація ($Cov(R1_t; R2_t) < 0$) означає, що доходність активів змінюється в протилежних напрямках.

При управлінні портфелем, згідно загального правила диверсифікації, найбільш бажаним є третій випадок з від'ємною коваріацією; найбільш небажаним – перший випадок з додатною коваріацією.

Недоліком розглянутого коефіцієнта коваріації є його безрозмірність. Тобто, його розрахункове значення залежить від вхідних даних й може знаходитись в діапазоні $(-\infty < Cov < +\infty)$. Тобто, кількісна оцінка за формулою (1) не дає повного уявлення про міру узгодженості життєвих циклів активів.

Коефіцієнт кореляції Пірсона нормує коваріацію й приводить її значення до відрізка $[-1; +1]$, формула (2).

$$Corr(R1_t; R2_t) = \frac{Cov(R1_t; R2_t)}{\sigma(R1_t) \times \sigma(R2_t)}, \quad (2)$$

Де $\sigma(R1_t)$, $\sigma(R2_t)$ – відповідно, середні квадратичні відхилення доходностей першого й другого активу (проекту) за весь період часу.

Градація значень коефіцієнта кореляції:

– $Corr \in [-1; -0,7)$, або $Corr \in (+0,7; +1]$ – сильна зворотна, або пряма лінійна залежність;

– $Corr \in [-0,7; -0,3)$, або $Corr \in (+0,3; +0,7]$ – середня зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок існує, але він менш сильний;

– $Corr \in [-0,3; -0,1)$, або $Corr \in (+0,1; +0,3]$ – слабка зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок слабкий;

– $Corr \in [-0,1; +0,1]$ – дуже слабка, або відсутня лінійна залежність.

– $Corr \rightarrow 0$ – кореляція відсутня, лінійного статистичного взаємозв'язку між змінними не спостерігається.

Таким чином, при формуванні портфелю, до його складу слід включати активи, кореляція яких прагне до -1.

5.3. Оптимізація портфелю з двох активів

Модель Марковіца (також відома як «Теорія сучасного портфеля») – це математична основа для формування портфеля активів, яка має на меті максимізувати очікувану дохідність для заданого рівня ризику, або мінімізувати ризик для заданого рівня очікуваної дохідності. Вона була розроблена Гаррі Марковіцом у 1952 році.

Основні припущення даної моделі:

1. Інвестори не схильні до ризику – це означає, що маючи два портфелі активів з однаковою очікуваною дохідністю, інвестор обирає той портфель, який має менший ризик;
2. Вибір інвесторів ґрунтується на двох факторах: очікувана дохідність (математичне сподівання) та ризик (дисперсія, або стандартне відхилення);
3. Диверсифікація – ризик портфеля можна зменшити, об'єднавши активи, які не мають прямої кореляції.

Оптимізація портфелю двох активів. Загальний випадок. Припустимо, що портфель складається з двох активів A_1 та A_2 (у вартісному вираженні), з частками x_1 та x_2 . Причому:

$$x_1 + x_2 = 1$$

1. Очікувана дохідність портфелю m_p

Дохідність активу A_1 позначимо як m_1 , а дохідність активу A_2 – як m_2 . Тоді, очікувана дохідність такого портфелю є лінійною комбінацією дохідностей його активів:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Тобто, дохідність портфелю з двох активів є середньозваженою дохідністю його складових.

Необхідно зазначити, що дохідність такого портфелю завжди буде знаходитись в інтервалі від m_1 до m_2 .

2. Ризик портфелю σ_p^2 (дисперсія)

Портфельний ризик є нелінійним й залежить від кореляції активів між собою:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$$

Де σ_1^2 , σ_2^2 – відповідно, дисперсія першого та другого активу; ρ_{12} – коефіцієнт кореляції між активами

Зважаючи, що коефіцієнт кореляції може приймати значення в діапазоні $0 \leq \rho_{12} \leq 1$, то ризик портфелю з двох активів завжди буде знаходитись в межах:

$$x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 - 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_p^2 \leq x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2$$

Або

$$(x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2)^2 \leq \sigma_p^2 \leq (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2$$

Тобто, у будь-якому випадку, ризик портфеля завжди є меншим середньозваженого ризику його складових, що є математичним обґрунтуванням доцільності диверсифікації:

$$\sigma_p^2 \leq (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2$$

Враховуючи вищесказане, розглянемо **особливі випадки оптимізації портфелю з двох активів**.

1. Абсолютно додатна кореляція ($\rho = 1$)

Очікувана доходність портфелю завжди буде дорівнювати середньозваженій доходності його активів:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Ризик портфелю (стандартне відхилення σ_p) також буде дорівнювати середньозваженому ризику його активів:

$$\sigma_p^2 = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2$$

Звідки

$$\sigma_p = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2$$

Тому, ми приходимо до лінійної залежності ризику від прибутковості. А отже, вирішення питань як мінімізації ризику, так й максимізації доходності, є тривіальним. Якщо експерт не схильний до ризику, то він сформує портфель лише з одного, менш ризикованого та менш доходного активу. Й навпаки, якщо експерт є схильним до ризику, то він надає перевагу більш доходному, але й більш ризиковому активу, рис. 3.

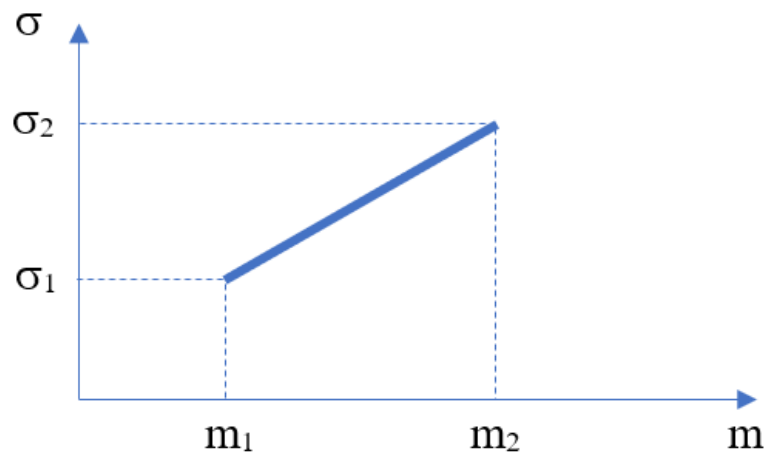


Рис. 3. Співвідношення доходності й ризику портфелю активів з абсолютно додатною кореляцією ($\rho = 1$)

2. Абсолютно від'ємна кореляція ($\rho = -1$)

Очікувана доходність портфелю залишається без змін:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Ризик портфелю (стандартне відхилення σ_p) буде дорівнювати:

$$\sigma_p^2 = (x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2)^2$$

Звідки

$$\sigma_p = |x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2|$$

Ризик такого портфелю буде дорівнювати нулю, якщо його структура буде дорівнювати:

$$x_{1,opt} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$x_{2,opt} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Тобто, при певній структурі двох активів з ненульовим ризиком, їхній портфель стає повністю безризиковим. Єдиною умовою цього є абсолютно від'ємна кореляція доходностей активів, рис. 4.

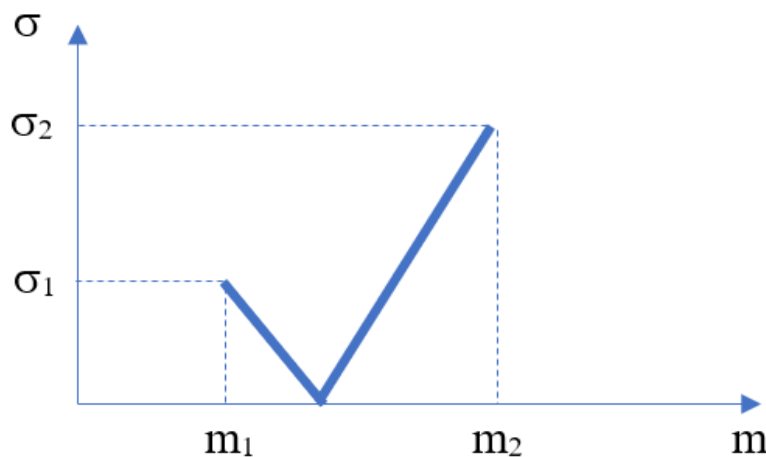


Рис. 4. Співвідношення доходності й ризику портфелю активів з абсолютно від'ємною кореляцією ($\rho = -1$)

3. Незалежні активи ($\rho = 0$)

Очікувана доходність портфелю залишається без змін:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Ризик портфелю буде дорівнювати:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2$$

Звідки

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2}$$

Мінімальне значення ризику такого портфелю досягається тоді, коли його структура буде дорівнювати:

$$x_{1,opt} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$x_{2,opt} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Відповідно, мінімальний ризик буде становити:

$$\sigma_{p,min} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Залежність між ризиком й очікуваною доходністю такого портфелю буде мати вигляд, як на рис. 5.

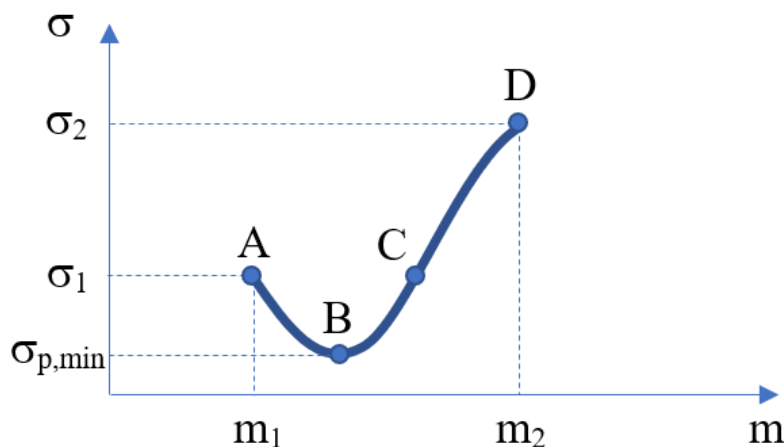


Рис. 5. Співвідношення доходності й ризику портфелю з незалежними активами ($\rho = 0$)

Мінімальний ризик даного портфелю забезпечується в крапці В, його обирає ОПР, яка не схильна до ризику.

Нормальна ОПР, серед відрізків АВ та ВС кривої, представленої на рис. 5, віддасть перевагу портфелю на відрізку ВС. Оскільки, за того самого рівня ризику, аналогічна доходність буде вищою.

Якщо порівнювати між собою крапки А та С, то:

- крапка А відповідає першому активу;
- крапка С відповідає портфелю з таким самим рівнем ризику, як у першого активу й значно вищим рівнем очікуваної доходності.

Відрізок CD відповідає перевагам ОПР, яка є схильною до ризику.

5.4. Оптимізація портфелю з N активів. Модель Марковіца

Раніше, ми розглядали випадок оптимізації портфелю, який складається з двох активів, на основі показників очікуваної доходності (математичного сподівання) та ризику (дисперсії, або стандартного відхилення). Далі, перейдемо до оптимізації портфелю з довільної кількості активів.

Оптимізація портфелю з N активів. Припустимо, що наш портфель формується з n активів. При цьому, кожний i -ий актив має відому очікувану доходність m_i й ризик σ_i^2 , а структура портфеля характеризується частками x_i , за умови $\sum x_i = 1$.

Тоді, очікувана доходність такого портфеля – це середньозважена доходність активів, які входять до його складу:

$$m_p = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

Відповідно, ризик портфелю (дисперсія), буде обчислюватись за формулою:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Де ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між активами i та j .

Перша складова цієї формули – це сума ризиків окремих активів, які увійшли до складу портфелю; друга складова – це кореляційний ризик кожної пари активів між собою, що виникає внаслідок диверсифікації.

З останнього рівняння зрозумілим стає **загальне правило диверсифікації**: в портфель необхідно включати ті активи, які мають від’ємну кореляцію своїх життєвих циклів, що наближається до -1.

Тобто, перша складова останньої формули буде лише збільшувати ризик портфелю, при додаванні до його складу кожного наступного активу. Друга складова має можливість зменшити сукупний портфельний ризик σ_p^2 , якщо парна кореляція між активами ρ_{ij} буде від’ємною.

Модель Марковіца. Модель Марковіца оптимізації портфелю з n активів полягає у знаходженні такої його структури, яка забезпечує мінімізацію ризику в умовах прийнятного (задовільного) рівня доходності, або максимізацію доходності в умовах прийнятного (допустимого) рівня ризику. Розглянемо ці два випадки.

1. Мінімізація ризику портфелю:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right) \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n x_i m_i \geq M$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Де M – прийнятний (задовільний) рівень доходності.

Дана оптимізаційна модель відповідає на питання: «Я хочу отримати портфель з доходністю, не нижче за M . Яка повинна бути його структура, щоб ризик портфелю був найнижчим?».

Шляхом послідовної покрокової зміни значення M (наприклад, від 5% до 30%), й відповідної оптимізації за даною моделлю, ми отримуємо набір портфелів, які на графіку «Ризик-Доходність» формують **ефективну**

множину. Ефективна множина пропонує портфель з мінімальним ризиком для кожного рівня доходності.

2. Максимізація очікуваної доходності портфелю:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i m_i \right) \rightarrow \max$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right) \leq R$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Де R – прийнятний (допустимий) рівень ризику.

Дана оптимізаційна модель відповідає на питання: «Я хочу отримати портфель з рівнем ризику, не вище за R . Яка повинна бути його структура, щоб очікуваний дохід портфелю був найбільшим?».

Шляхом послідовної покрокової зміни значення R й відповідної оптимізації за даною моделлю, ми так само отримуємо набір портфелів, які на графіку «Ризик-Доходність» формують **ефективну множину**.

З іншої сторони, кожний інвестор, який формує портфель активів, має індивідуальну функцію переваги, які розглядались на початку даного курсу з ризикології. У випадку з моделлю Марковіца, такі функції переваги називаються **кривими байдужості**. Множина портфелів на кривій байдужості є рівнозначними для інвестора, з точки зору поєднання доходності й ризику.

Позначимо ефективну множину портфелів, яку ми визначили за допомогою моделі Марковіца й криві байдужості інвестора на рис. 6.

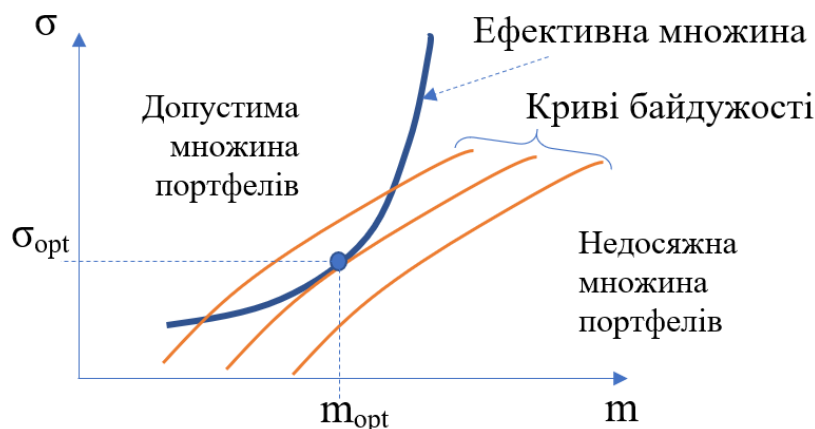


Рис. 6. Вибір оптимального портфелю

Ефективна множина портфельів позначена на рис. 6 синьою лінією; криві байдужості експерта – помаранчевими лініями.

Зліва зверху від ефективної множини знаходиться **допустима множина портфельів**. Ці портфелі є досяжними для інвестора, але вони характеризуються значно вищим ризиком за тієї самої доходності, як на ефективній множині портфельів.

Справа знизу від ефективної множини знаходиться **недосяжна множина портфельів**. Ці портфелі не можна сформувати на основі вхідних даних. Вони характеризуються значно меншим ризиком за тієї самої доходності, як на ефективній множині портфельів.

Кожна крива байдужості, яка знаходиться правіше від іншої, є більш бажаною для особи, що приймає рішення, оскільки забезпечує вищий рівень доходності за того самого рівня ризику.

Відповідно, оптимальним портфелем буде той, де крива байдужості буде мати єдину точку дотику з кривою ефективної множини.

Обмеження у застосуванні та недоліки моделі Марковіца:

1. Модель є чутливою до вхідних даних (динаміки активів за попередні періоди). Найменші похибки у вимірюванні ретроспективних даних призведуть до неправильної оцінки парних коефіцієнтів кореляції, що вплине на оптимальну структуру активів;

2. Від'ємна кореляція активів в минулому, не гарантує незмінну кореляцію цих активів в майбутньому. Тому, задача з управління портфелем, залишається вкрай актуальною;

3. Той факт, що доходність портфелю вимірюється на основі середньозважених доходностей його активів передбачає, що випадкові коливання доходностей кожного активу в часі мають нормальний розподіл. На практиці, це буває не завжди;

4. Відсутність урахування транзакційних витрат – модель ігнорує витрати на купівлю та продаж активів;

5. Велика кількість активів непропорційно збільшує обсяг необхідних розрахунків й ускладнює пошук оптимального рішення.

Наприклад, для портфелю зі 100 активів, на початковому етапі необхідно оцінити близько 5000 парних кореляцій між ними.

Складність знаходження оптимальних рішень полягає у тому, що модель Марковіца – це класична задача квадратичного програмування, оскільки ризик, який вимірюється показником дисперсії, є квадратичною функцією.

Для аналітичного розв'язку моделі Марковіца (пошуку оптимальної структури портфелю), можна використовувати метод множників Лагранжа. Його альтернативою є чисельні методи, з використанням інформаційних технологій (наприклад, «Пошук рішень» у Microsoft Excel).