ТЕМА 6. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ: ТЕОРІЯ ІГОР

1. Постановка задачі теорії ігор
2. Зведення задачі теорії ігор до ЗЛП

6.1. Постановка задачі теорії ігор

Управління ризиками в економіці, фінансах, менеджменті та бізнесі передбачає не тільки їх вимірювання, але й управління ними в умовах невизначеності. Одним з таких методів зниження ризику є теорія ігор.

Задача теорії ігор. Припустимо, що ми маємо декілька конфліктуючих сторін (осіб), кожна з яких приймає певні рішення, визначені заданим набором правил. Причому, обираючи певне рішення, кожна з цих сторін не знає, які рішення будуть прийматись її конкурентами. Якщо кожній з цих сторін відомий можливий остаточний результат конфліктної ситуації при заздалегідь визначених виплатах, то говорять, що між ними відбувається гра.

Ситуація називається **конфліктною**, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких є повністю, або частково протилежними.

Задача теорії ігор полягає у виборі такої стратегії поведінки кожного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Кількісна оцінка результатів гри, називається **виплатами**.

Гра – це реальний, або формальний конфлікт, в якому присутні, як мінімум 2 учасники (гравці), кожний з яких прагне досягти своїх цілей. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети, називаються **правилами гри**.

Гра називається **парною**, якщо в ній беруть участь тільки 2 гравця. Парна гра називається **грою з нульовою сумою**, якщо сума виплат дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу іншого.

Парна гра з нульовою сумою називається **антагоністичною**, або грою з суворим суперництвом. Далі будемо розглядати антагоністичні ігри.

Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, в яких він повинний зробити особистий хід, називається **стратегією гравця**.

Особистий хід означає свідомий вибір гравця та реалізацію певної послідовності дій.

Стратегія гравця вважається **оптимальною**, якщо протягом гри вона забезпечує йому максимально можливий середній виграш, або мінімально можливий середній програш.

Припустимо, що ми маємо парну гру з нульовою сумою:

– перший гравець може обрати будь яку i-ту стратегію з m своїх можливих стратегій;

– другий гравець, не знаючи вибору першого, обирає j-ту стратегію з n своїх можливих стратегій.

В результаті такого вибору, перший гравець виграє суму a_{ij}, а другий гравець її програє. Тоді, платіжна матриця (матриця гри) A буде мати вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Рядки даної матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Такі стратегії називаються **чистими стратегіями**.

Така гра називається скінченною грою розмірності $[m \times n]$.

Число $\alpha = \max_i \left(\min_j (a_{ij}) \right)$ називається **нижньою ціною гри** (максимін), а відповідна стратегія – максиміном (рядок).

Число $\beta = \min_j \left(\max_i (a_{ij}) \right)$ називається **верхньою ціною гри** (мінімакс), а відповідна стратегія гравця – мінімаксом (стовпцем).

<u>Теорема 1.</u> Нижня ціна гри ніколи не перевищує верхню ціну гри.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називається **ціною гри**. Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається **грою з сідловою крапкою**. Для такої гри, пошук оптимального рішення полягає у виборі максимінної, або мінімаксної стратегії, які є оптимальними для кожного з гравців.

<u>Приклад 1.</u> Нехай, платіжна матриця А має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри й оптимальну стратегію для першого та другого гравців.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри. Нижня ціна приймає значення:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} min \\ 5 \\ 13* \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

$$\alpha = max(5; 13; 4; 3) = 13$$

Тоді, верхня ціна гри буде дорівнювати:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

$$max \quad 15 \quad 13* \quad 20 \quad 13* \quad 17 \qquad \beta = min(15; 13; 20; 13; 17) = 13$$

Як бачимо, нижня ціна гри співпадає з верхньою. Тобто, ціна гри дорівнює 13 у.о., а для кожного гравця існує гра з чистою стратегією:

– перший гравець у своєму розпорядженні має 4 стратегії (рядки матриці A). Оптимальною для нього є стратегія №2, оскільки нижня ціна гри міститься в другому рядку;

– другий гравець у своєму розпорядженні має 5 стратегій (стовпці матриці A). Оптимальними для нього є стратегія №2, або стратегія №4, оскільки верхня ціна гри міститься у другому та четвертому стовпцях;

– середній максимальний виграш першого гравця та середній мінімальний програш другого гравця, за умови використання ними оптимальних стратегій, складе 13 у.о. (елемент матриці A, що знаходиться на перетині чистих стратегій).

Якщо гра, яка визначається платіжною матрицею A, не має сідлової крапки, то для її розв'язання використовуються змішані стратегії.

Вектор, в якому кожна складова представляє собою відносну частку використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається **змішаною стратегією** гравця.

Позначимо змішану стратегію першого гравця, як $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

Відповідно, змішана стратегія другого гравця – $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

З визначення змішаної стратегії випливає, що сума часток даних векторів дорівнює 1, а самі частки повинні бути більшими, або дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1; \;\; \sum_{j=1}^{n} z_j = 1$$

Якщо U^* є оптимальною змішаною стратегією першого гравця, а Z^* – оптимальною змішаною стратегією другого гравця, тоді ціна гри буде обчислюватись за формулою:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* Z_j^*$$

Визначення оптимальних стратегій U^*, Z^* та ціни гри v – це процес пошуку рішення гри.

Теорема 2. Кожна парна гра з нульовою сумою, має рішення в змішаних стратегіях.

Теорема 3. Якщо гра не має сідлової крапки, то для того, щоб число v було ціною гри, а U^* та Z^* оптимальними змішаними стратегіями, то необхідно й достатньо, щоб виконувались нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* \geq v$$

для всіх $j = 1,2,\ldots,n$;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_j^* \leq v$$

для всіх $i = 1,2,\ldots,m$

Приклад гри зі змішаними стратегіями буде розглядатись нижче. Після того, як ми розглянемо зведення такої задачі теорії ігор до пари двоїстих задач лінійного програмування.

6.2. Зведення задачі теорії ігор до ЗЛП

Розглянемо гру розмірності $[m \times n]$, що визначається платіжною матрицею A. Згідно з теоремою 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ й ціни гри v, нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* \geq v$ буде виконуватись для всіх $j = 1,2,\ldots,n$.

Припустимо, що ціна гри $v > 0$. Цього завжди можна досягнути, додавши до всіх елементів матриці A одне й те саме постійне число C. Це не призведе до зміни оптимальних стратегій, а лише збільшить ціну гри на C.

Далі, розділивши дві частини останньої нерівності на v, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{U_i^*}{v} \geq 1$$

Введемо умовні позначення:

$$\frac{U_i^*}{v} = y_i^*$$

Тоді, остання нерівність буде мати вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

$$y_i^* \geq 0$$

Використовуючи введені позначення, перепишемо умову $\sum u_i = 1$ у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \frac{1}{v}$$

Оскільки перший гравець прагне отримати максимальний виграш v, він повинний забезпечити мінімізацію значення $\frac{1}{v}$. З огляду на це, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to min$$

За умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

$$y_i^* \geq 0$$

Подібні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження максимального значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to max$ за аналогічних умов.

Таким чином, ми отримуємо пару двоїстих задач лінійного програмування:

1. Пряма задача

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

для всіх $j = 1,2, \dots, n$

$$y_i^* \geq 0.$$

2. Двоїста задача

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq 1$$

для всіх $i = 1,2, \dots, m$

$$x_i^* \geq 0.$$

Таким чином, для знаходження рішення даної гри, яка визначається платіжною матрицею A, необхідно скласти пару двоїстих задач лінійного програмування й знайти їхні рішення. Далі, ці рішення використовуються для визначення оптимальних стратегій кожного гравця та ціни гри за формулами:

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}$$

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*$$

$$z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*$$

Отже, процес пошуку рішення гри за допомогою методів лінійного програмування, складається з наступних етапів:

1. Складання пари двоїстих задач лінійного програмування, які є еквівалентними даній грі;
2. Визначення оптимальних рішень пари двоїстих задач;
3. Знаходження оптимальних стратегій для кожного гравця й ціни гри, з використанням співвідношень між розв'язками двоїстих задач.

Приклад 2. Нехай, платіжна матриця *A* має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні змішані стратегії першого та другого гравців.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри. Нижня ціна приймає значення:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} min \\ -1 \\ -5 \\ -5 \end{array}$$

$$\alpha = max(-1; -5; -5) = -1$$

Відповідно, верхня ціна гри буде дорівнювати:

$$\begin{array}{cc} A = & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \\ max & \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 6 \end{array} \end{array} \quad \beta = min(4; 4; 6) = 4$$

Як бачимо, нижня ціна гри не збігається з верхньою. Це означає, що для кожного з гравців існують оптимальні змішані стратегії.

В даному прикладі ціна гри може набувати від'ємних значень, оскільки деякі з оцінок приймають значення в діапазоні [-5; +6] ($a_{ij} < 0$). Щоб позбутись в умові задачі від’ємних значень, додаємо до всіх елементів матриці *A* таке число *C*, щоб кожен з них став більше нуля (*C* = 6):

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Далі складаємо пряму й двоїсту задачі лінійного програмування та знаходимо їхній розв'язок:

<u>1. Пряма задача</u>

$$F^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* \to min$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 3y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 5y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \geq 1 \\ 11y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1^* \geq 0; y_2^* \geq 0; y_3^* \geq 0$$

Вирішуючи вказану задачу лінійного програмування, отримаємо наступні відповіді:

$F^* = 0.1538; y_1^* = 0.1077; y_2^* = 0.0462; y_3^* = 0.$

<u>2. Двоїста задача</u>

$$F^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* \to max$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 5y_2^* + 11y_3^* \leq 1 \\ 3y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \leq 1 \\ 10y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1^* \geq 0; x_2^* \geq 0; x_3^* \geq 0$$

Розв'язуючи двоїсту задачу, отримуємо відповіді:

$F^* = 0.1538;\ x_1^* = 0.0769;\ x_2^* = 0.0769;\ x_3^* = 0.$

Далі визначаємо ціну гри:

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = \frac{1}{0.1538} = 6.5$$

Тоді, оптимальна змішана стратегія першого гравця буде знаходитись за формулою $u_i^* = vy_i^*$, тобто:

$$U^* = \begin{bmatrix} 6.5 \times 0.1077 \\ 6.5 \times 0.0462 \\ 6.5 * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Це означає, що перший гравець повинний застосовувати першу стратегію з ймовірністю 0,7, а другу стратегію – з ймовірністю 0,3. Третю стратегію застосовувати не варто.

Оптимальна змішана стратегія другого гравця визначається за формулою $z_j^* = vx_j^*$, тобто:

$$Z^* = [6.5 \times 0.0769; \quad 6.5 \times 0.0769; \quad 6.5 \times 0] = [0.5; \quad 0.5; \quad 0]$$

Це означає, що другий гравець повинний застосувати першу стратегію з ймовірністю 0,5, а другу стратегію – з ймовірністю 0,5. Третю стратегію, так само, застосовувати не варто.

Не слід забувати, що отримана вище ціна гри $v = 6.5$ була розрахована з урахуванням того, що до всіх елементів матриці A додавалось число $C = 6$.

Тоді, початкова ціна гри складе: 6,5 – 6 = 0,5. Це буде середній максимально можливий виграш для першого гравця й середній мінімально можливий програш для другого гравця за умови, що вони обидва застосують оптимальні змішані стратегії.