Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

П.Г.Стєганцева, М.О.Гречнєва, Є.В.Стєганцев

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від р.

Запоріжжя
2020

УДК: 510.6 (075.8)
С79

Стєганцева П.Г., Гречнєва М.О., Стєганцев Є.В. Математична логіка : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика» Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 102 с.

У навчальному посібнику подано в систематизованому вигляді програмний матеріал дисципліни "Математична логіка". Він містить матеріал, необхідний для розуміння і свідомого засвоєння основних понять, теорем, конструкцій всіх подальших курсів. В посібнику наведено достатню кількість задач з детальними та обґрунтованими розв'язаннями. До кожної теми подано задачі, які можуть бути використані на практичних заняттях і для самостійної роботи.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика».

Рецензент

С.В. Курапов, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск

І.В. Зіновєєв, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП

Логіка має відношення і до філософії, і до математики. В процесі навчання математики відбувається взаємодія логіки та математики. Вплив логіки на математику відбувається в процесі навчання побудові та доведенню математичних тверджень, при аналізі принципів побудови математичних теорій. Математична логіка входить до складу фундаментальних математичних дисциплін, зокрема, до дискретної математики. Пов'язана з алгоритмізацією та автоматичним розв'язанням задач. Логіка дозволяє визначити правильний шлях будь-якого дослідження і передбачити наслідки вибору неправильного шляху, вона впливає на формування мислення, яке визначає життєву позицію людини.

Математична логіка використовується для обґрунтування математики. Зокрема, основними її задачами є: аналіз методів міркувань, оформлення математичного доведення незалежно від природної мови, наявність в якій синонімів або змістовних відтінків заважає строгому логічному аналізу. Математика в своєму розвитку, з часів виникнення і до теперішнього часу, зазнала декілька криз. Необхідність їх подолання і призвела до виникнення таких розділів, як основи математики, математична логіка. Виділяють три основних кризи:

Перша пов`язана з потребою введення ірраціонального числа (була викликана появою невимірюваних відрізків);

Друга пов`язана з появою диференціального та інтегрального числення;

Третю кризу пов`язують з появою теорії множин.

Намагаючись подолати парадокси, які виникли в теорії множин, математики створили три школи:

1) логіцисти; 2) інтуїціоністи; 3) формалісти.

У 1900 році Гільберт запропонував програму формалізації всієї математики. Потрібно було з`ясувати, чи можна всю математику отримати із деякої зчисленної системи аксіом. В 1931 році Гедель довів теорему про те, що навіть всю арифметику неможливо вивести із зліченого списку аксіом.

Одним із наслідків роботи цих трьох напрямків стало те, що математична логіка виділилась як окрема дисципліна. Її предметом є :

1) вивчення форм і законів мислення;
2) вивчення формальних аксіоматичних теорій;
3) розвиток теорії алгоритмів.

Прикладами формальних аксіоматичних теорій являються числення висловлювань і числення предикатів.

Класичну математичну логіку називають ще двозначною, оскільки вона базується на принципі, у відповідності до якого кожне висловлювання може бути або істинним, або хибним. Існують також тризначні і, в загальному випадку, багатозначні логіки. Методи математичної логіки використовуються в інформатиці, лінгвістиці, штучному інтелекті, фізиці, біології, вона тепер є самостійною областю, яка інтенсивно розвивається і постійно знаходяться її нові застосування.

Як інструмент вивчення математики математична логіка аналізує: побудову математичних тверджень, методи доведення математичних тверджень, побудову математичних теорій.

Метою вивчення дисципліни «Математична логіка» є:

- **ознайомлення** з логікою висловлювань і предикатів, з проблемою повноти системи булевих функцій, аксіоматичним принципом побудови формальних теорій;
- **засвоєння алгоритмів** побудови таблиці істинності висловлювань, нормальних форм булевих функцій, перевірки системи булевих функцій на повноту, представлення міркування в логічній символіці та перевірки його істинності.

Тема1 Логіка висловлювань. Булеві функції

1.1 Поняття висловлювання. Логічні операції. Таблиці істинності. Формули логіки висловлювань.

Під *висловлюванням* розуміють розповідне речення, про яке можна однозначно сказати: істинне воно чи хибне. Висловлювання позначають буквами латинського алфавіту $A,B,C\ldots$. Будемо вважати, що константи 0 та 1 теж є висловлюваннями. Якщо висловлювання A істинне, то пишуть: $A=1$, якщо хибне, то $A=0$. Числа 0 та 1 називають *значеннями істинності висловлювання*.

Приклад 1.1 Висловлювання A: «$2\cdot 2=4$» істинне, а висловлювання B: «$2\cdot 2=5$» - хибне. Отже, можемо записати $A=1$, а $B=0$.

Висловлювання, подібні до A і B з прикладу 1.1, є *простими* або *елементарними висловлюваннями*, із них за допомогою *логічних операцій* отримують складені висловлювання. Під логічною операцією розуміють такий спосіб побудови з даних простих висловлювань складеного висловлювання, що значення істинності останнього однозначно визначається значеннями істинності даних простих висловлювань.

Символи і терміни логічних операцій

1) $-$ «***заперечення***»; не
2) $\wedge$ «***кон'юнкція***»; і
3) $\vee$ «***диз'юнкція***»; або
4) $\Rightarrow$ «***імплікація***; якщо…, то…
5) $\Leftrightarrow$ «***еквіваленція***»; тоді і тільки тоді
6) / «***штрих Шеффера***»;
7) $\downarrow$ «***стрілка Пірса***»;
8) $\oplus$ «***додавання по модулю 2*** **(виключне або)**».

Означення 1.1 *Таблицею істинності* висловлювання A, утвореного з простих висловлювань $A_1, A_2, \ldots, A_n$, називається таблиця, в кожному рядку якої за певним набором значень істинності цих простих висловлювань записане значення істинності висловлювання A (або *логічне значення висловлювання*). Існує рівно 2^n різних наборів значень істинності висловлювань $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які прийнято записувати в лексикографічному порядку.

Означення логічних операцій дамо за допомогою таблиць істинності:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \downarrow B$	A / B	$A \oplus B$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Будь-яке складене висловлювання представляє собою деякий логічний вираз. Ці вирази називають формулами.

Означення 1.2 *Формулою* в логіці висловлювань називається:

а) будь-яке елементарне висловлювання (або *атом*, або *пропозиціональна змінна*);

б) якщо A і B – формули то $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – також формули;

в) інших формул немає.

У відповідності до означення побудова кожної формули є послідовністю, кожний елемент якої є або атомом, або отримується з попередніх елементів послідовності за правилом б).

Наприклад, послідовність A, B, $\overline{B}$, $A \wedge \overline{B}$, $A \wedge \overline{B} \Rightarrow B$ є побудовою формули $A \wedge \overline{B} \Rightarrow B$.

Як і в звичайній алгебрі порядок виконання логічних операцій можна регулювати дужками. Якщо їх поставити в останній формулі таким чином $A \wedge (\overline{B} \Rightarrow B)$, то побудова формули запишеться послідовністю A, B, $\overline{B}$, $\overline{B} \Rightarrow B$, $A \wedge (\overline{B} \Rightarrow B)$.

У відсутності дужок прийнято наступний порядок (за спаданням пріоритету) виконання дій: **заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.**

Корисними будуть також наступні домовленості:

- Не використовувати дужки для формули під знаком заперечення, наприклад $\overline{A \wedge B}$;
- При читанні формули називати її за найслабшою операцією. Наприклад, формула $A \wedge \overline{B} \Rightarrow B \vee C$ є імплікацією;
- В однаковому сенсі використовувати символи «$\wedge$» і «$\cdot$» для позначення кон'юнкції.

1.2 Рівносильні формули. Види формул логіки висловлювань. Логічні закони

Означення 1.3 Дві формули A і B називаються *рівносильними*, якщо вони приймають однакові значення на всіх наборах значень істинності елементарних висловлювань, що входять в них. Позначають $A = B$.

Очевидно, що таблиці істинності рівносильних формул співпадають.

Приклад 1.2 Складемо таблицю істинності для формули $F = \overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1

0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Бачимо, що таблиці істинності формул F і $A \downarrow B$ співпадають. Отже,

$$\overline{A \vee B} = A \downarrow B.$$

Аналогічно, можна довести наступні рівності:

$$\overline{A \wedge B} = A / B,$$

$$\overline{A \Leftrightarrow B} = A \oplus B.$$

Отримані формули виражають логічні операції 6), 7) і 8) через перші п’ять логічних операцій.

Означення 1.4 Формула A в логіці висловлювань називається *тотожно істинною (*або *тавтологією,* або *логічним законом)*, якщо вона приймає значення 1 (істинна) при всіх допустимих наборах значень істинності простих висловлювань, які входять в неї. Позначають $\vdash A$.

Приклад 1.3 Формули 1) $A \vee \overline{A}$, 2) $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ – тотожно істинні. Переконаємось у цьому за допомогою таблиць істинності:

A	B	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Теорема 1.1 Якщо $A = B$, то формула $A \Leftrightarrow B$ є тотожно істинною.

Дійсно, якщо $A = B$**,** то їх таблиці істинності однакові, але тоді за означенням еквіваленції таблиця істинності формули $A \Leftrightarrow B$ містить лише одиниці, тобто згідно з означенням 1.4 маємо висновок: $\vdash A \Leftrightarrow B$**, що і треба було довести.**

Має місце і обернена теорема.

Теорема 1.2 Якщо $\vdash A \Leftrightarrow B$, то $A = B$.

Зауваження. Доведена теорема дозволяє запис $A = B$ називати логічним законом. Наприклад, доведена вище рівносильність формул $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ дає наступний логічний закон

$$X \Rightarrow Y = \overline{X} \vee Y.$$

Приклад 1.4 Формула $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$ є логічним законом.

Дійсно, складемо таблиці істинності формул $A = \overline{X \vee Y}$, $B = \overline{X} \wedge \overline{Y}$ і $A \Leftrightarrow B$.

X	Y	$X \vee Y$	$\overline{X \vee Y} = A$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y} = B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Теорема 1.3 Якщо формули A та $A \Rightarrow B$ - тавтології, то B теж тавтологія.

Доведення. Розглянемо набір значень елементарних висловлювань, що входять до формул A та B, при якому $B = 0$. Оскільки A тавтологія, то при тому ж наборі змінних $A = 1$. Але тоді формула $A \Rightarrow B$ хибна при вибраному наборі змінних, що суперечить умові, адже $A \Rightarrow B$ тавтологія. Таким чином, формула B при всіх наборах змінних приймає значення 1, тобто є тавтологією.

Означення 1.5 Формула A логіки висловлювань називається *тотожно хибною (*або *суперечливою)*, якщо вона приймає значення 0 на кожному із наборів значень простих висловлювань, які входять до неї.

Означення 1.6 Формула A називається *нейтральною* (або *виконуваною*), якщо вона ні тотожно істина, ні тотожно хибна.

Теорема 1.4 Наступні умови рівносильні:

1) формула A тотожно хибна;

2) формула A не є виконуваною;

3) формула $\overline{A}$ є тавтологією.

Список основних логічних законів:

1. закони комутативності:

$x \vee y = y \vee x$,

$x \wedge y = y \wedge x$.

2. закони асоціативності:

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

3. закони дистрибутивності:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z)$,

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

4. закон подвійного заперечення:

$\overline{\overline{x}} = x$.

5. закони де Моргана:

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$,

$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

6. закони ідемпотентності:

$x \vee x = x$,

$x \wedge x = x$.

7. закони поглинання:

$x \vee (x \wedge y) = x$,

$x \wedge (x \vee y) = x$.

8. $\overline{x} \wedge x = 0$,

$\overline{x} \vee x = 1$.

9. закони нуля та одиниці

$0 \vee x = x$,

$0 \wedge x = 0$.

$1 \vee x = 1$,

$1 \wedge x = x$.

Зауваження:

1) Доведення логічних законів проводяться за допомогою таблиць істинності.

2) Говорять, що одна формула має більш простий вигляд в порівнянні з іншою формулою (є спрощеною), якщо вона отримана з неї з використанням логічних законів і для її побудови використано менше символів в порівнянні з вихідною формулою.

Наприклад, спрощенням формули $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$ буде наступна послідовність дій:

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y) \vee (\bar{y} \vee x) = \bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee x = 1.$$

3) Заперечення, яке відноситься до елементарного висловлювання, називається *простим,* в противному випадку заперечення називається *складним.*

Означення 1.7 Формула логіки висловлювань називається *зведеною*, якщо вона побудована тільки за допомогою операцій диз'юнкції, кон'юнкції і простого заперечення.

Теорема 1.5 Кожну формулу логіки висловлювань можна замінити рівносильною їй зведеною формулою.

Доведення. Формули (1.1), (1.2), (1.3) доводять, що кожну формулу логіки висловлювань можна побудувати за допомогою операцій –, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Логічні закони (1.4) і (1.5) показують, що з цього списку операцій можна виключити операції $\Rightarrow$ і $\Leftrightarrow$, **що і треба було довести.**

Щоб перевірити, чи є задана формула *A* тавтологією, існує кілька методів:

1) складання таблиці істинності формули *A*;

2) спрощення формули *A* за допомогою логічних законів до результату *A=1* (наприклад, як у п.2) попереднього зауваження);

3) спрощення формули $\overline{A}$ за допомогою логічних законів до результату $\overline{A}=0$.

1.3 Означення булевої функції. Способи задання. Двоїсті булеві функції

Таблиця істинності формули логіки висловлювань, що залежить від *n* атомів, визначає на множині з 2^n наборів значень цих атомів функцію, яка приймає значення з множини $\{0,1\}$. Введемо деякі поняття та терміни, які зручно використовувати при вивченні цього розділу.

Нехай дано множину $B=\{0,1\}$. Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, які приймають значення тільки із множини B, називаються логічними або булевими змінними. Самі елементи 0 і 1 називаються булевими константами.

Прикладом булевих змінних є елементарні висловлювання, адже вони приймають значення 1 (істинне) або 0 (хибне), їх ще називають *пропозиціональними змінними* або *атомами*.

Означення 1.8 Впорядкований набір значень n булевих змінних називають n-вимірним булевим вектором.

Приклад 1.5 Набір $(1,1,0,1,1)$ є 5-вимірним булевим вектором, а набір $(0,1,1)$ – 3-вимірним.

Множина всіх попарно різних n-вимірних булевих векторів представляє собою n-ний декартовий степінь множини *B*, тобто множину B^n. З теореми про потужність декартового добутку скінченних множин безпосередньо випливає наступна

Теорема 1.6 Число різних n-вимірних булевих векторів дорівнює 2^n.

Інше доведення цієї теореми випливає з наступного міркування. Кожну координату n-вимірного булевого вектора можна вибрати двома способами, а значить за правилом добутку отримаємо $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$.

Означення 1.9 *Булевою функцією* від n змінних називається відображення $f : B^n \to B$. Отже, областю визначення булевої функції є множина всіх n-вимірних булевих векторів, а областю значення – множина $B = \{0,1\}$. Позначають $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Областю істинності булевої функції* називається множина n-вимірних булевих векторів з області визначення, на яких функція приймає значення 1.

Множину всіх булевих функцій від довільного скінченого числа змінних позначають P_2.

Теорема 1.7 Число всіх булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Доведення. Будь-яка булева функція від n змінних однозначно задається стовпцем своїх значень, довжина якого дорівнює числу різних n – вимірних булевих векторів, тобто дорівнює 2^n. Кожний стовпець є 2^n - вимірним булевим вектором, тому число різних стовпців дорівнює 2^{2^n}, що і **треба було довести.**

Випадок $n = 0$ за означенням відповідає функціям, які не залежать від змінних, тобто константам 0 та 1. При $n = 1$ маємо 4 функції

x	01	Позначення	Назва
$f_0^{(1)}$	00	0	Константа 0
$f_1^{(1)}$	01	x	Тотожна функція
$f_2^{(1)}$	10	$\bar{x}$	Заперечення
$f_3^{(1)}$	11	1	Константа 1

При $n = 2$ кількість булевих функцій дорівнює 16

x y	0011 0101	Позначення	Назва
$f_0^{(2)}$	0000	0	Константа 0
$f_1^{(2)}$	0001	$x \wedge y$	Кон'юнкція
$f_2^{(2)}$	0010	$\overline{x \Rightarrow y}$	Заперечення імплікації
$f_3^{(2)}$	0011	x	Проекція на перший елемент
$f_4^{(2)}$	0100	$\overline{y \to x}$	Заперечення оберненої імплікації
$f_5^{(2)}$	0101	y	Проекція на другий елемент
$f_6^{(2)}$	0110	$x \oplus y$	Сума за модулем 2
$f_7^{(2)}$	0111	$x \vee y$	Диз'юнкція
$f_8^{(2)}$	1000	$x \downarrow y$	Стрілка Пірса (заперечення диз'юнкції)
$f_9^{(2)}$	1001	$x \leftrightarrow y$	Еквіваленція
$f_{10}^{(2)}$	1010	$\bar{y}$	Заперечення на другий елемент
$f_{11}^{(2)}$	1011	$y \to x$	Обернена імплікація
$f_{12}^{(2)}$	1100	$\bar{x}$	Заперечення на перший елемент
$f_{13}^{(2)}$	1101	$x \to y$	Імплікація
$f_{14}^{(2)}$	1110	$x \mid y$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)

$f_{15}^{(2)}$	1111	1	Константа 1

Отже, можемо **задавати булеву функцію різними способами**. Частіше всього будемо користуватись наступними:

1) таблицею значень (таблицею істинності) або просто вектором значень;

2) формулою логіки висловлювань;

3) порядковим номером.

Зауваження.

1) В таблиці істинності булевої функції всі n–вимірні булеві вектори з області її визначення завжди треба розташовувати в лексикографічному порядку, тобто так, щоб вони відповідали послідовності десяткових чисел від 0 до $2^n - 1$. Ці десяткові числа будемо називати номерами булевих векторів у разі необхідності. Зрозуміло, що лише за такої домовленості має сенс поняття «вектор значень булевої функції».

2) Очевидно, що маючи формулу, можна легко перейти до таблиці істинності. Обернена дія нам поки що під силу лише в деяких випадках, наприклад для булевих функцій від однієї або двох змінних. Пізніше ми зможемо для будь-якої функції перейти від таблиці до формули.

3) Можливість задання булевої функції порядковим номером випливає з її задання вектором значень. Дійсно, вектор значень є 2^n-вимірним булевим вектором, якому відповідає певне десяткове число. Саме це число і називають порядковим номером відповідної булевої функції.

Означення 1.10 Дві булеві функції від n змінних називаються *рівними*, якщо вони приймають однакові значення при всіх наборах змінних, тобто якщо їхні таблиці істинності співпадають.

Означення 1.11 Булеві вектори $\alpha = (x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$ та $\beta = (x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1}...,x_n)$ з області істинності булевої функції $f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ називаються *сусідніми* по змінній x_i. Змінна x_i називається *фіктивною*, якщо для будь-якої пари сусідніх по цій змінній булевих векторів функція набуває однакових значень. В противному випадку, коли існує хоча б одна пара сусідніх по цій змінній булевих векторів, на яких функція набуває різних значень, змінна x_i називається *суттєвою*.

Приклад 1.6 Змінна x для функції $f(x,y)=(x\wedge\bar{y})\vee\bar{y}$ є фіктивною. Це випливає з законів поглинання.

Поняття фіктивної змінної дозволяє дати означення рівних булевих функцій у випадку, коли формули, що їх реалізують, залежать від різної кількості змінних.

Означення 1.12 Булеві функції f та g називають *еквівалентними* або *рівними,* якщо від формули, що задає одну з них, можна перейти до формули, що задає іншу, виключивши з першої формули фіктивні змінні.

Приклад 1.7 Функції $f(x,y)=(x\wedge\bar{y})\vee\bar{y}$ та $g(y)=\bar{y}$ рівні, оскільки $f(x,y)=g(y)=\bar{y}$. Цей перехід, як уже зазначалось, виконано за законом поглинання.

Означення 1.13 Нехай дано булеву функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$. *Двоїстою* до цієї функції називається *булева функція* $f^*(x_1,\ldots,x_n)$, для якої виконується рівність $f^*(x_1,\ldots,x_n)=\overline{f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}$. *Функція* f називається *самодвоїстою,* якщо $f^*=f$.

Приклад 1.8 Для функції $f(x,y,z)=x\vee y\bar{z}\vee x\bar{y}z$ двоїста функція має вигляд $f^*(x,y,z)=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}\,\bar{\bar{z}}\vee\bar{x}\,\bar{\bar{y}}\,\bar{z}}=\bar{\bar{x}}\wedge(\bar{\bar{y}}\vee\bar{z})\wedge(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y}\vee\bar{\bar{z}})=x\wedge(y\vee\bar{z})\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)$.

Знайдемо двоїсті для деяких функцій від однієї або двох змінних:

1) $f_1(x,y)=x$. Оскільки $f_1^*(x,y)=\bar{\bar{x}}=x=f_1$, то ця функція самодвоїста;

2) $f_2(x,y)=x\vee y$. Двоїстою є функція $f_2^*(x,y)=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}=x\wedge y$;

3) Аналогічно, для $f_3(x,y)=x\wedge y$ двоїстою є функція $f_3^*(x,y)=\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}=x\vee y$;

4) Двоїсті до констант: $0^*=1,\quad 1^*=0$.

Розглянемо операцію утворення складної булевої функції. Цю операцію називають суперпозицією булевих функцій. Як і в теорії, наприклад, дійсних функцій будемо замість деяких аргументів булевої функції підставляти інші булеві функції, а потім можемо повторювати цю процедуру.

Означення 1.14 *Суперпозицією* булевої функції f_0 та функцій $f_1, f_2, ..., f_m$ називається функція $f = f_0(g_1, g_2, ..., g_k)$, де кожна з функцій $g_i, i = \overline{1,k}$ співпадає з однією з функцій $f_j, j = \overline{1,m}$. Ще в цьому випадку говорять, що функція може бути представлена формулою над $\Sigma = \{f_0, f_1, ..., f_m\}$ і позначають $f = F[f_0, f_1, ..., f_m]$.

Приклад 1.9 Розглянемо формулу, що задає функцію $f(x, y, z)$ таким чином $f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y}) \vee z$. Ця формула містить функції: $g(x_1)$ – заперечення, $s(x_1, x_2)$ – кон'юнкція і $l(x_1, x_2)$ – диз'юнкція. Тобто, задана функція є суперпозицією вказаних функцій або представлена формулою над $\Sigma = \{g, l, s\}$. Її можна записати таким чином $f(x, y, z) = l(s(x, g(y)), z)$.

Теорема 1.8 (принцип двоїстості). Нехай $f = f_0(g_1, g_2, ..., g_k)$ – суперпозиція функцій f_0 і $f_1, f_2, ..., f_m$. Тоді двоїста до неї функція дорівнює відповідній суперпозиції двоїстих функцій, тобто $f^* = f_0^*(g_1^*, g_2^*, ..., g_k^*)$.

Цей принцип полегшує процес знаходження двоїстих функцій.

Наслідок Якщо булеві функції рівні, то і двоїсті до них функції також рівні.

Теорема 1.9 (алгоритм знаходження двоїстої для функції, заданої зведеною формулою) Якщо булева функція f задана формулою над $\Sigma = \{\wedge, \vee, -\}$, то для отримання формули для двоїстої до неї функції f^* треба

- Змінити всі знаки диз`юнкції на знаки кон`юнкції і навпаки;
- Змінити 0 на 1 і 1 на 0;
- Знаки заперечення не змінювати;
- Дужки також залишити на тому ж місці.

Зауваження. 1) (*побудова таблиці двоїстої функцій*) Для отримання таблиці істинності двоїстої функції потрібно «перевернути» стовпець значень даної функції і кожне значення замінити протилежним.

2) (*перевірка самодвоїстості функції за таблицею*) З означення випливає, що $\overline{f(x_1,...,x_n)} = f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$, тобто значення функції на наборах $(x_1,\dots,x_n)$ і $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ протилежні. Звернемо увагу на те, що такі набори розташовані симетрично відносно горизонтальної осі симетрії таблиці (такі набори природно теж називати протилежними).

1.4 Нормальні форми булевих функцій і формул логіки висловлювань

Таблицею істинності булева функція задається однозначно. Якщо ж функція задана формулою логіки висловлювань, то її представлення не однозначне.

Приклад 1.10 Формули $f(x,y) = x \Rightarrow y$ та $f(x,y) = \bar{x} \vee y$ задають одну булеву функцію від двох змінних, вона має порядковий номер 13.

Означення 1.15 *Елементарною кон`юнкцією* або елементарним добутком називається кон`юнкція скінченого числа попарно різних булевих змінних, які входять із запереченням або без нього, а також константа 1.

Приклад 1.11 Формули x_1, $\bar{x}_5$, $x_1x_2x_3\bar{x}_5$ є елементарними кон`юнкціями. Формули $x_1x_3\bar{x}_3$, $\overline{x_1x_2}$ не є елементарними кон'юнкціями.

Означення 1.16 *Елементарною диз`юнкцією* або елементарною сумою називається диз`юнкція попарно різних булевих змінних, які входять із запереченням або без нього, а також константа 0.

Приклад 1.12 Формули $x_1, \bar{x}_5$, $x_1 \vee \bar{x}_5$, $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_7$ є елементарними диз'юнкціями, а формули $x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_3$, $\overline{x_1 \vee x_2}$ не є елементарними диз'юнкціями.

Очевидно, якщо формула f є елементарною кон`юнкцією, то $f^*$ є елементарною диз`юнкцією. Окремо взята змінна або заперечення окремо взятої змінної є одночасно і елементарною кон`юнкцією і елементарною диз`юнкцією.

Оскільки $x \wedge x = x$ і $x \vee x = x$, то природно вважати, що кожна змінна входить в елементарну кон'юнкцію і в елементарну диз'юнкцію не більше одного разу. Тоді коректним буде наступне

Означення 1.17 Кількість змінних в елементарній кон'юнкції (в елементарній диз'юнкції) називають її *довжиною*.

Для булевої константи 1 будемо вживати термін «кон'юнкція довжини 0», а для булевої константи 0 – «диз'юнкція довжини 0».

Означення 1.18 Формула F називається *кон`юнктивною нормальною формою булевої функції* (КНФ), якщо вона є кон`юнкцією скінченного числа попарно різних елементарних диз`юнкцій або $F \equiv 0$.

Приклади КНФ:

1) $x_1 \vee x_5$ - одна елементарна диз'юнкція довжиною 2;

2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ – три елементарні диз'юнкції довжиною 2, 2 і 3 відповідно;

3) $x_1 \wedge \bar{x}_2$ – дві елементарні диз'юнкції, обидві довжиною 1;

4) 0 – одна елементарна диз'юнкція довжиною 0.

Означення 1.19 Формула F називається *диз`юнктивною нормальною формою булевої функції* (ДНФ), якщо вона є диз`юнкцією скінченного числа попарно різних елементарних кон`юнкцій або $F \equiv 1$.

Приклади ДНФ:

1) $x_1 x_5$ - одна елементарна кон'юнкція довжиною 2,

2) $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$ – три елементарні кон'юнкції довжиною 2, 2 і 3 відповідно;

3) $x_1 \vee \bar{x}_2$ – дві елементарні кон'юнкції, обидві довжиною 1;

4) 1 – одна елементарна кон'юнкція довжиною 0.

Зауваження. Якщо формула f є КНФ деякої булевої функції, то ця формула, очевидно, є зведеною. Але тоді з правила отримання двоїстої функції випливає, що формула f^* є ДНФ двоїстої до f функції.

Теорема 1.10 Для будь-якої булевої функції існує еквівалентна їй КНФ і еквівалентна їй ДНФ, причому не єдині.

Доведення. Відомо, що формулу F, яка задає булеву функцію, можна замінити зведеною формулою, причому так, що операція заперечення використовується тільки до окремо взятих змінних. Якщо ця зведена формула являється диз`юнкцією елементарних кон`юнкцій, то це ДНФ. Якщо в ній зустрічаються кон`юнкції, то потрібно використати закони дистрибутивності. Аналогічне міркування для КНФ.

Приклад 1.13 Побудувати будь-яку ДНФ функції $F = (x \wedge y \Rightarrow x \wedge \bar{y} \wedge z) \wedge y$.

$$F = (x \wedge y \Rightarrow x \wedge \bar{y} \wedge z) \wedge y = (\overline{xy} \vee x\bar{y}z)y = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x\bar{y}z)y =$$
$$= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}z)y = \bar{x}y \vee \bar{y}y \vee x\bar{y}zy = \bar{x}y$$

1.5 Досконалі нормальні форми булевої функції

Означення 1.20 *Конституентою* 1 (*конституентою* 0) булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається будь-яка елементарна кон'юнкція (елементарна диз'юнкція) довжини n.

Приклад 1.14 Для функції $f(x,y,z)$ елементарна кон'юнкція $x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}$ є конституантою 1, а для функції $f(x,y,z,t)$ ні. Для функції $f(x,y,z)$ елементарна диз'юнкція $x\vee\bar{y}$ не є конституентою 0.

Теорема 1.11 Для кожної конституенти 1 є тільки один булевий вектор із області визначення булевої функції, на якому ця конституента дорівнює 1.

Доведення. Нехай M – деяка конституента 1, причому множина змінних впорядкована. Поставимо кожній змінній у відповідність 1, а запереченню змінної – 0. Отримаємо n – вимірний булевий вектор з області визначення булевої функції і за означенням кон'юнкції на цьому векторі *M=1*. На будь-якому іншому булевому векторі з області визначення *M=0.*

Наприклад, $(x_1x_2)(1,1)=1$; $(\bar{x}_1x_2)(0,1)=1$; $(x_1\overline{x_2})(1,0)=1$; $(\overline{x_1},\overline{x_2})(0,0)=1$.

Наслідок. Число різних конституент 1 булевої функції від n змінних дорівнює 2^n.

Доведення. Кожній конституенті 1 за теоремою відповідає єдиний $n-$вимірний булевий вектор, на якому вона приймає значення 1. І, навпаки, по кожному $n-$вимірному булевому вектору побудуємо конституенту 1 за правилом: компоненти 0 в булевому векторі замінимо відповідними змінними, а компоненти 1 – запереченнями відповідних змінних. Наприклад, $(1,0,1,1,0)\to x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5$. Отже, множина всіх $n-$вимірних булевих векторів та множина всіх повних елементарних коньюнкцій від n змінних еквівалентні, а тому мають однакові потужності.

Означення 1.21 *Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)* булевої функції від n змінних називається диз'юнкція тих її конституент 1, які відповідають булевим векторам з області істинності.

Приклади досконалих ДНФ:

1) $f(x_1,x_2)=(x_1\wedge x_2)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2)$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)$;

3) $f(x)=x$.

Теорема 1.12 Для кожної булевої функції, відмінної від константи 0, існує єдина ДДНФ.

Аналогічно формулюються наступні теорема та наслідок.

Теорема 1.13 Для кожної конституенти 0 є тільки один булевий вектор із області визначення булевої функції, на якому ця конституента дорівнює 0.

Наслідок. Число різних конституент 0 булевої функції від n змінних дорівнює 2^n.

Означення 1.22 *Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)* булевої функції від n змінних називається кон'юнкція тих її конституент 0, які відповідають булевим векторам, що не входять в область істинності.

Приклади досконалих КНФ:

1) $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

3) $f(x) = x$.

Теорема 1.14 Для кожної булевої функції від n змінних, відмінної від константи 1, існує єдина ДКНФ.

Алгоритм побудови ДДНФ (ДКНФ) за таблицею істинності.

1) Виділити булеві вектори, на яких функція приймає значення 1 (значення 0);

2) Записати відповідні цим векторам конституенти 1 (конституенти 0);

3) Записати диз'юнкцію (кон'юнкцію) отриманих конституент 1 (конституент 0).

Приклад 1.15 Нехай булева функція $E(x, y, z)$ задана вектором значень (11100101). Побудуємо її таблицю істинності в явному вигляді, вказавши для кожного набору, при якому $E(x, y, z)$ набуває значення 1, відповідну конституенту одиниці, а для кожного набору, при якому $E(x, y, z)$ набуває значення 0, – відповідну конституенту нуля.

x	y	z	$E(x, y, z)$	Конституента одиниці	Конституента нуля
0	0	0	1	$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$	
0	0	1	1	$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$	
0	1	0	1	$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$	
0	1	1	0		$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$
1	0	0	0		$(\bar{x} \vee y \vee z)$
1	0	1	1	$(x \wedge \bar{y} \wedge z)$	
1	1	0	0		$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$
1	1	1	1	$(x \wedge y \wedge z)$	

Тепер можна виписати ДДНФ як диз'юнкцію конституент одиниці та ДКНФ як кон'юнкцію конституент нуля:

ДДНФ: $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$;

ДКНФ: $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

Зауваження.

1) За заданою ДДНФ або ДКНФ булевої функції легко перейти до її таблиці.

2) Якщо дві формули булевої алгебри зводяться до однієї ДДНФ (або ДКНФ), то вони рівносильні або, інакше, реалізують одну і ту саму булеву функцію.

3) Якщо формула f є ДКНФ деякої булевої функції, то ця формула, очевидно, є зведеною. Але тоді з правила отримання двоїстої функції випливає, що формула f^* є ДДНФ двоїстої до f функції.

Знаходження ДДНФ та ДКНФ за допомогою логічних законів

Нехай булева функція задана формулою. Як побудувати її досконалі нормальні форми, не переходячи до таблиць істинності. Розв'язання цієї задачі можна розбити на такі кроки.

1) Формулу, яка задає булеву функцію, зведемо до будь-якої ДНФ (КНФ);

2) Якщо в цій ДНФ (КНФ) існує елементарна кон'юнкція (диз'юнкція), яка не містить хоча б однієї із змінних, наприклад змінної x_i, то помножимо цю кон'юнкцію на $x_i \vee \bar{x}_i = 1$ (додамо до цієї диз'юнкції $x_i \bar{x}_i = 0$) та застосуємо закони дистрибутивності.

3) Скінчене число кроків забезпечить нам перехід до ДДНФ (ДКНФ) заданої булевої функції.

Приклад 1.16 Формула $F(x, y, z) = (x \wedge y \Rightarrow x\bar{y}z)y = ... = \bar{x}y$ є ДНФ даної булевої функції від трьох змінних, але не ДДНФ. За вказаним в доведенні теореми алгоритмом отримаємо

$\bar{x}y = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}$ - ДДНФ даної булевої функції.

Приклад 1.17 Формула $F(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$ є КНФ, але не є ДКНФ булевої функції від трьох змінних. Виконаємо перетворення

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\overline{x_3})(x_1 \vee x_3 \vee x_2\overline{x_2})(x_2 \vee x_3 \vee x_1\overline{x_1}) =$$
$$= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3 \vee x_1)(x_2 \vee x_3 \bar{x}_1) =$$
$$= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2)$$

Отримали ДКНФ.

1.6 Поліном Жегалкіна. Поняття лінійної булевої функції

Будемо розглядати лише такі елементарні кон'юнкції (іноді їх називають *монотонними*), в яких відсутні заперечення змінних. Константу 1 теж будемо вважати такою кон'юнкцією.

Означення 1.23 *Поліномом Жегалкіна* булевої функції називається формула виду $K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m$, де $m \geq 1$ і $K_i, i = \overline{1,m}$ - монотонна елементарна кон'юнкція.

Наведемо список деяких логічних законів для операції $\oplus$

1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ - асоціативність;

2) $x \oplus y = y \oplus x$ - комутативність;

3) $x \oplus 0 = x$,

4) $x \oplus x = 0$,

5) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ - дистрибутивність;

6) $\bar{x} = x \oplus 1$,

7) $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

Теорема 1.15 Для будь-якої булевої функції існує, причому єдиний, поліном Жегалкіна.

Доведення. Так як система $\{\wedge, \oplus, 1\}$ є повною, то будь-яку булеву функцію можна записати формулою над цією системою. Залишилось застосувати закон дистрибутивності, потім звести подібні доданки, отримаємо поліном Жегалкіна. Для доведення єдиності підрахуємо кількість всіх можливих попарно різних поліномів. Кожну кон'юнкцію в поліномі можна подати у вигляді $(x_1 \vee \alpha_1)(x_2 \vee \alpha_2)\ldots(x_n \vee \alpha_n)$, де $\alpha_i = \begin{cases} 0, \textit{ якщо змінна } x_i \textit{ присутня,} \\ 1, \textit{ якщо змінна } x_i \textit{ відсутня.} \end{cases}$ Число таких кон'юнкцій 2^n. Отже будь-який поліном Жегалкіна має вигляд $(K_1 \vee \alpha_1) \oplus (K_2 \vee \alpha_2) \oplus \ldots \oplus (K_{2^n} \vee \alpha_{2^n})$, а їх кількість дорівнює 2^{2^n}, тобто співпадає з кількістю всіх можливих булевих функцій від *n* змінних. Це доводить еквівалентність цих множин, а отже єдиність полінома Жегалкіна для кожної булевої функції. **Теорема доведена**.

Існує кілька *методів* знаходження поліному Жегалкіна:

1) Безпосереднє перетворення формули за допомогою законів логіки (корисними будуть наведені вище закони 1)-7)),

2) Заміною в ДДНФ функції символу $\vee$ символом $\oplus$,

3) Методом невизначених коефіцієнтів.

Означення 1.24 Булева функція називається *лінійною*, якщо її поліном Жегалкіна містить лише кон'юнкції довжини не більше одиниці.

Наприклад, функція $f(x,y)=x\oplus y\oplus 1$ є лінійною, а функція $f(x,y)=xy\oplus y\oplus 1$ не є лінійною.

1.7 Повні і замкнуті класи булевих функцій. Теорема Поста

Означення 1.25 Система $\Sigma=\{f_1, f_2,..., f_n\}$ булевих функцій називається *повною* (в P_2), якщо будь-яка функція $f\in P_2$ є суперпозицією функцій з системи Σ.

Теорема 1.16 Система $\Sigma=\{-,\wedge,\vee\}$ є повною.

Доведення. Для будь-якої функції $f\neq 0$ існує формула над $\Sigma=\{-,\wedge,\vee\}$, наприклад ДДНФ(*f*). Для $f=0$ маємо, наприклад, $f=x\wedge\bar{x}$.

Теорема 1.17 Якщо система $\Sigma=\{f_1, f_2,..., f_n\}$ є повною, а Σ' інша система булевих функцій, причому кожна функція з системи Σ є суперпозицією функцій з системи Σ', то Σ' також повна.

Доведення. Нехай $\Sigma'=\{h_1,h_2,...,h_m\}$. За умовою $(\forall i=\overline{1,n})$ $f_i=f_i(h_1,h_2,...,h_m)$. Оскільки Σ є повною, то для будь-якої функції $g\in P_2$ існує формула над Σ, тобто $g=F[f_1, f_2,..., f_n]$. Остаточно маємо,

$$g=F[f_1, f_2,..., f_n]=F[f_1(h_1,h_2,...,h_m), f_2(h_1,h_2,...,h_m),..., f_n(h_1,h_2,...,h_m)]= \\ =\Phi[h_1,h_2,...,h_m],$$

звідки випливає повнота системи Σ', що й треба було довести.

Приклад 1.18

1) $\Sigma'=\{-,\wedge\}$ - повна система. Дійсно, система $\Sigma=\{-,\wedge,\vee\}$ є повною, і $x\vee y=\overline{\overline{x\vee y}}=\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}$. За попередньою теоремою $\Sigma'=\{-,\wedge\}$ теж повна.

2) $\Sigma' = \{x|y\}$ - повна система. Це випливає з повноти системи $\Sigma = \{-,\wedge\}$. Дійсно, $x|y = \overline{x \wedge y}$. Тоді, $x|x = \overline{x \wedge x} = \bar{x}$, $x \wedge y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$.

3) $\Sigma' = \{\wedge, \oplus, 1\}$ - повна система, оскільки $\Sigma = \{-,\wedge\}$ повна і $\bar{x} = x \oplus 1$.

Означення 1.26 Нехай $\Sigma \subset P_2$. *Замиканням* Σ називається сукупність всіх булевих функцій, які виражаються формулами над системою Σ. Замикання системи Σ позначають символом $[\Sigma]$.

Властивості замикання:

1) $A \subseteq [A]$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow [A] \subseteq [B]$, причому $A \subset B \Rightarrow [A] \subseteq [B]$;

3) $([A] \cup [B]) \subseteq [A \cup B]$;

4) $[[A]] = [A]$.

Означення 1.27 (повної системи) Система Σ булевих функцій називається *повною*, якщо $[\Sigma] = P_2$.

Означення 1.28 Система Σ булевих функцій називається *замкнутим класом*, якщо $[\Sigma] = \Sigma$, тобто якщо будь-яка суперпозиція функцій із Σ належить Σ.

Очевидно, найпростішим замкнутим класом є P_2. Зрозуміло також, що для систем A та B булевих функцій з $A \subseteq B \wedge [B] = B$ і з властивості 2) замикання випливає, що система A не є повною.

Приклад 1.19 Замиканням системи $\{x \oplus y, 1\}$ є клас лінійних функцій.

Ми вже знаємо два класи булевих функцій - лінійні та самодвоїсті. Будемо позначати ці класи літерами L та S відповідно. Познайомимось ще з трьома класами.

1) Клас T_0 функцій, що зберігають константу 0.

Говорять, що булева функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ зберігає константу 0, якщо $f(0,\ldots,0) = 0$.

Наприклад, функція $f(x,y)=x\vee y$ зберігає 0, тобто $f(x,y)\in T_0$, а $g(x,y)=x\to y$ не зберігає 0, тобто $g(x,y)\notin T_0$.

2) Клас T_1 функцій, що зберігають константу 1.

Говорять, що булева функція $f(x_1,...,x_n)$ зберігає константу 1, якщо $f(1,...,1)=1$.

Наприклад, функції $f(x,y)=x\vee y$ та $g(x,y)=x\to y$ зберігають 1, а функція $h(x,y)=x\oplus y$ не зберігає 1, тобто $h(x,y)\notin T_1$.

3) Клас M монотонних функцій.

Означення 1.29 Нехай $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ та $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$ – два булевих вектора. Якщо для будь-якого $i=\overline{1,n}$ виконуються нерівності $\alpha_i\le\beta_i$, то говорять, що перший вектор *не більший* за другий і позначають $\alpha\le\beta$.

Наприклад, $(0,0,1)\le(1,0,1)$, а для булевих векторів $(0,0,1)$ та $(0,1,0)$ означення не виконується, вони називаються **непорівнянними.**

Означення 1.30 Булева функція називається *монотонною*, якщо для будь-яких булевих векторів $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ та $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$ з області визначення функції має місце імплікація $\alpha\le\beta\Rightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$.

Наприклад, функція $f(x,y)=x\vee y$ є монотонною, а функція $g(x,y)=x\to y$ не монотонна. Дійсно, нерівності $(0,0)\le(1,0)$ і $f(0,0)\ge f(1,0)$ доводять, що імплікація не монотонна.

Теорема 1.18 Класи T_0, T_1, S, L, M є замкнутими.

Доведення. Дійсно, нехай $g\in T_0$, $f_i(x_1,...,x_n)\in T_0$ і $h=g(f_1,f_2,...,f_n)$. Тоді, $h(0,...,0)=g(f_1(0,...,0),f_2(0,...,0),...,f_n(0,...,0))=g(0,...,0)=0$, тобто $h\in T_0$.

Аналогічно доводиться, що клас T_1 - замкнутий.

Замкнутість класу L випливає з того, що суперпозиція лінійних функцій знову є лінійною функцією. Наприклад, якщо $g=x_1\oplus x_2\oplus 1$, $f_1=x_1\oplus 1$, $f_2=x_1\oplus x_3$, то $h=g(f_1,f_2)=f_1\oplus f_2\oplus 1=x_3\oplus 1$.

Для функцій $g \in S,\ f_i(x_1,...,x_n) \in S$ та їх суперпозиції $h = g(f_1, f_2,..., f_n)$ отримаємо $h^* = g^*\left(f_1^*, f_2^*,..., f_n^*\right) = g^*\left(f_1, f_2,..., f_n\right) = g\left(f_1, f_2,..., f_n\right)$, звідки $h \in S$.

Нехай $g \in M,\ f_i(x_1,...,x_n) \in M$. З монотонності функцій $f_i(x_1,...,x_n)$ випливає, що для будь-яких булевих векторів $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ має місце імплікація $\alpha \le \beta \Rightarrow f_i(\alpha) \le f_i(\beta)$. Тоді має місце нерівність $(f_1(\alpha), f_2(\alpha),..., f_n(\alpha)) \le (f_1(\beta), f_2(\beta),..., f_n(\beta))$ для наборів з області визначення функції g, а з її монотонності випливає $g(f_1(\alpha), f_2(\alpha),..., f_n(\alpha)) \le g(f_1(\beta), f_2(\beta),..., f_n(\beta))$. Отже, суперпозиція $h = g(f_1, f_2,..., f_n)$ теж монотонна, що і треба було довести.

Лема. Для будь-якої $f \in P_2$, яка не є константою 1, з умови $f \notin T_0$ випливає $f \notin M$.

Теорема 1.19 (теорема Поста) Система булевих функцій є повною в P_2 тоді і тільки тоді, коли вона повністю не міститься в жодному з класів T_0, T_1, *S*, *L*, *M*.

Теорема Поста дуже зручна для перевірки довільної системи функцій на повноту. Для цього складають так звану критеріальну таблицю.

	T_0	T_1	S	L	M
f1	+	–	–	+	+
f2	–	–	+	+	–
…					
fn	+	+	+	–	–

Таблицю заповнюють знаками «+» (якщо функція у відповідному рядку належить до класу у відповідному стовпчику) і «–» (у противному випадку). Якщо в кожному стовпчику є принаймні один «–», то система булевих функцій повна, в противному випадку вона неповна.

Означення 1.31 Система $\Sigma \subset P_2$ називається *базисом*, якщо вона повна і після вилучення з неї хоча б однієї функції стає неповною.

Цікавим є питання про кількість функцій в базисі. Раніше було показано, що система $\Sigma = \{x|y\}$ є повною, отже мінімальний базис може складатися лише з однієї функції. Має місце

Теорема 1.20 Максимальне число функцій в базисі дорівнює 4.

Доведення. Можливі чотири випадки:

1) система булевих функцій не містить функцій 0 і 1,
2) система булевих функцій містить константу 0, не містить 1,
3) система булевих функцій містить константу 1, не містить 0,
4) система булевих функцій містить одночасно і 0, і 1.

У випадку 1) з повноти системи випливає, що в ній є функція $f \notin T_0$, але тоді за лемою $f \notin M$. Отже, достатньо систему доповнити не більше, ніж трьома функціями – несамодвоїстою, немонотонною та не зберігаючою 1.

У випадку 2) в системі є функція $f = 0$, яка не є самодвоїстою, а також $f \notin T_1$, а у випадку 3) в системі є функція $f = 1$, яка не є самодвоїстою, а також $f \notin T_0$. В кожному з цих випадків необхідно не більше трьох функцій для повноти системи.

У випадку 4) функції 0 і 1 у системі є функціями, що не належать класам T_1 і T_0 відповідно, а також вони не є самодвоїстими. Потрібно ще не більше двох функцій.

Теорема доведена.

1.8 Логічні наслідки з даних посилань. Отримання всіх наслідків з даних посилок. Запис міркувань у логічній символіці. Правильні і неправильні схеми міркувань

Багато математичних тверджень мають форму «Якщо *A*, то *B*», тобто форму імплікації. Залишимо поза увагою імплікації типу «Якщо число 3 парне, то сніг білий». Будемо розглядати тепер лише такі імплікації, складові А та В яких мають спільний зміст.

Означення 1.32 Говорять, що формула B є *логічним наслідком* формул $A_1, A_2, ..., A_n$, якщо B істинна на кожному наборі значень її атомів, при яких кожна з формул $A_1, A_2, ..., A_n$ істинна. Формули $A_i, i = \overline{1,n}$ називаються *посилками* або *гіпотезами.* Позначають $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

В частинному випадку, $A \vdash B$ означає, що формула B є логічним наслідком формули A. В цьому випадку також говорять що висновок В отримано з умови А за допомогою дедукції.

Теорема 1.21 $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли імплікація $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \Rightarrow B$ є тавтологією. В частинному випадку, $A \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Rightarrow B$ є тавтологією.

Приклад 1.20.

1) Формула $P = A \wedge B \vee \overline{C}$ є логічним наслідком формули $Q = A \wedge \overline{C}$. Дійсно,

$$Q \Rightarrow P = \overline{A \wedge \overline{C}} \vee \left(A \vee \overline{C}\right) \wedge \left(B \vee \overline{C}\right) = \left(\overline{A} \vee C \vee A \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee C \vee B \vee \overline{C}\right) = 1.$$

2) Формула B є логічним наслідком посилок A і $A \Rightarrow B$. Дійсно,

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B = \overline{A \wedge (A \Rightarrow B)} \vee B = \overline{A} \vee \left(A \wedge \overline{B}\right) \vee B =$$
$$= \left(A \vee \overline{A}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \vee B = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B = 1.$$

Теорема 1.22 (про всі наслідки з даних посилок) Нехай дано посилки $A_1, A_2, ..., A_n$. Позначимо $D_1 \cdot D_2 \cdot ... \cdot D_m$ досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ) формули $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$. Логічними наслідками даних посилок є диз'юнкції $D_1, D_2, ..., D_m$ та всі можливі кон'юнкції цих диз'юнкцій.

Приклад 1.21

1) Знайти всі наслідки з посилок $A_1 = x$, $A_2 = x \vee \overline{y}$.

Знаходимо ДКНФ кон'юнкції посилок: $x(x \vee \bar{y}) = (x \vee y\bar{y})(x \vee \bar{y}) = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$. Всі наслідки: $x \vee y$, $x \vee \bar{y}$, $(x \vee y)(x \vee \bar{y})$.

2) Розглянемо посилки: «Якщо $a \vdots 10$, то $a \vdots 5$», «Число a не ділиться на 5». Які можливі наслідки з цих посилок? Чи є твердження «$\overline{a \vdots 10}$» логічним наслідком з цих посилок?

Позначимо $A_1 = b \Rightarrow c$, $A_2 = \bar{c}$, де b означає $a \vdots 10$, c є висловлювання $a \vdots 5$. Знайдемо ДКНФ формули $A_1 \wedge A_2$: $(b \Rightarrow c) \wedge \bar{c} = (\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$. Запишемо всі логічні наслідки: $(\bar{b} \vee c)$, $(\bar{c} \vee \bar{b})$, $(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})$, $(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$.

Далі, оскільки $\bar{b} = \bar{b} \vee (c \wedge \bar{c}) = (\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})$, то отримали, що $\bar{b}$ (це означає «$\overline{a \vdots 10}$») є логічним наслідком з даних посилок.

З імплікаціями, зміст складових *A* та *B* яких спільний, мають справу при дедуктивному методі міркування. Під міркуванням будемо розуміти виведення з деякої вихідної сукупності тверджень (посилок, гіпотез) нового твердження (висновку). Висновок відділяється від посилок за допомогою слів «значить», «тому», «з цього випливає», «отже» і т.ін. Для аналізу міркування ігнорують конкретний зміст посилок і зосереджуються на схемі (або формі) міркування.

Фундаментальний принцип логіки полягає в тому, що в правильному міркуванні з істинності посилок не може випливати хибний висновок. Але істинність посилок є необхідною, але не достатньою умовою правильності міркування. Якщо існує міркування за тією ж схемою, в якому посилки істинні, а висновок хибний, то міркування невірне. Якщо такого контрприкладу не існує, то міркування правильне.

Приклад 1.22 Розглянемо міркування: «Якщо даний многокутник правильний, то в нього можна вписати коло. Даний многокутник правильний. Отже, в даний многокутник можна вписати коло».

В цьому міркуванні є дві посилки, які утворено з елементарних висловлювань: «даний многокутник правильний» і «в даний многокутник можна вписати коло». Щоб відволіктись від змісту, позначимо ці висловлювання буквами A та B відповідно. Тоді перша посилка має вигляд імплікації $A \Rightarrow B$, а друга є A. Для доведення правильності міркування потрібно довести, що B є логічним наслідком вказаних посилок, тобто що $A \Rightarrow B, A \vdash B$, а для цього треба довести, що імплікація $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ є логічним законом (тавтологією). Це вище вже було показано.

Отже, наведене міркування є правильним.

Розглянемо наступну схему міркування: $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C \vdash B \wedge D$.

Припустимо, що кожна з посилок істинна, а $B \wedge D=0$, що можливо, наприклад, при $B=1, D=0$. Тоді отримаємо $A \Rightarrow B=1$, а з $C \Rightarrow D=1$ випливає $C=0$, і з $A \vee C=1$ випливає $A=1$. Отже, існує набір $(A, B, C, D)=(1,1,0,0)$, при якому всі посилки істинні, а висновок хибний. Таким, чином міркування за наведеною схемою неправильне або нелогічне.

Розглянемо декілька схем правильних міркувань, їх ще називають *правилами виводу*. Важливо пам'ятати, що ці схеми забезпечать правильність міркування лише якщо всі посилки будуть істинними.

1) схема з прикладу 1.22 відповідає не лише розглянутому конкретному міркуванню, а носить загальний характер. В кожному подібному міркуванні істинність посилок забезпечить істинність висновку. Тому цю схему називають ще **правилом відділення (modus ponens)** і записують у вигляді

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}.$$

Нагадаємо, що правило **modus ponens** можна записати у вигляді логічної формули $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$.

2) Інша схема правильного міркування називається п**равилом заперечення** і має вигляд $\dfrac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$.

Дійсно,

$$\begin{gathered}(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}} \vee \overline{A} = \overline{A \Rightarrow B} \vee B \vee \overline{A} = A \wedge \overline{B} \vee \left(B \vee \overline{A}\right) = \\ = \left(B \vee \overline{A} \vee A\right)\left(B \vee \overline{A} \vee \overline{B}\right) = 1\end{gathered}.$$

Приклад 1.23 Якщо використати висловлювання з попереднього прикладу 1.22, то друга посилка має вигляд $\overline{B}$ «В даний многокутник не можна вписати коло», і висновок $\overline{A}$ «Даний многокутник не є правильним» є логічним наслідком з даних посилок.

3) Правило силогізму (або транзитивності): $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$

Дійсно,

$$\begin{gathered}(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = \left(\overline{A \Rightarrow B} \vee \overline{B \Rightarrow C}\right) \vee \overline{A} \vee C = A\overline{B} \vee B\overline{C} \vee \overline{A} \vee C = \\ = \left(A \vee \overline{A}\right)\left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \vee (B \vee C)\left(\overline{C} \vee C\right) = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B \vee C = 1\end{gathered}$$

Приклад 1.24 Міркування за правилом силогізму: «Якщо число ділиться на 6, то воно ділиться на 3. Якщо число ділиться на 3, то сума його цифр ділиться на 3. Отже, якщо число ділиться на 6, то сума його цифр ділиться на 3».

4) $\dfrac{A \vee B, \overline{A}}{B}$ **правило видалення диз'юнкції**

5) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ **правило видалення кон'юнкції**

6) $\dfrac{A}{A \vee B}$ **правило введення диз'юнкції**

7) $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$ **правило введення кон'юнкції**

8) $\dfrac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$ **правило контрапозиції**

Означення 1.33 Сукупність формул $A_1, A_2, ..., A_n$ називається *суперечливою*, якщо при будь-якому наборі значень атомів хоча б одна з формул набуває хибне значення.

Очевидно, необхідною і достатньою умовою суперечливості системи формул $A_1, A_2, ..., A_n$ є тотожна хибність формули $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$.

Наприклад, сукупність формул A і $\overline{A}$ є суперечливою.

Теорема 1.23 Якщо логічним наслідком формул $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$ є хибна формула, то $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

Доведення. За умовою теореми із сукупності формул $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$ випливає хибна формула. Розглянемо набір значень атомів, при якому формули $A_1, A_2, ..., A_n$ істинні, а формула $\overline{B}$ – хибна (такий набір існує згідно з означенням імплікації). Але тоді формула B істинна, а значить імплікація $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \Rightarrow B$ є тавтологією, звідки за означенням логічного слідування отримаємо, що $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

Доведена теорема 1.23 є логічним обґрунтуванням *методу доведення від супротивного*. Наведемо кілька *схем доведення від супротивного*, які випливають з доведеної теореми:

1) $(A \Rightarrow B) = \left(\overline{A \Rightarrow B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right)$,

2) $(A \Rightarrow B) = (A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A})$,

3) $(A \Rightarrow B) = (A \wedge \overline{B} \Rightarrow B)$.

Сутність проблеми розв'язуваності в логіці висловлювань полягає в питанні про існування загального алгоритму, який дозволив би за скінченне число кроків відносно будь-якої конкретної формули отримати відповідь на питання, чи буде вона тотожно істинною. Відповідь на це питання в логіці висловлювань позитивна. Є кілька методів, деякі з них ми вже навіть використовували вище.

1. Складання таблиці істинності.

2. Рівносильні перетворення формули.

3. Метод непрямого доведення (метод «від супротивного»). Для цього припускаємо, що дана формула не є тотожно істинною. Тоді існує хоча б один набір значень змінних, що входять в цю формулу, при якому вона приймає хибне значення. Якщо такий набір значень змінних вдається знайти, дана формула не буде тотожно істинною. Якщо ж припущення про існування такого набору значень приводить до протиріччя, дана формула тотожно істинна.

Питання для самоконтролю

1. *Означення бінарних логічних операцій над висловлюваннями.*
2. *Скільки різних наборів значень змінних визначають значення складного висловлювання, побудованного з 5 елементарних висловлювань, з n висловлювань?*
3. *Як довести рівносильність двох формул логіки висловлювань?*
4. *Яка формула є тавтологією?*
5. *Назвіть три способи завдання булевих функцій.*
6. *Як перевірити, чи є змінна булевої функції суттєвою? фіктивною змінною?*
7. *Алгоритм знаходження двоїстої для булевої функції, заданої зведеною формулою.*
8. *Як за таблицею знайти досконалі нормальні форми булевих функцій (ДДНФ та ДКНФ)?*
9. *Як за допомогою логічних законів знайти досконалі нормальні форми булевих функцій (ДДНФ та ДКНФ)?*
10. *Як записати загальний вигляд поліному Жегалкіна булевої функції? В чому полягає сутність методу невизначених коефіцієнтів для знаходження поліному Жегалкіна?*
11. *Як перевірити, чи є одна формула логічним наслідком іншої?*
12. *Як називаються дві формули логіки висловлювань, кожна з яких є логічним наслідком іншої?*
13. *Яка система булевих функцій називається повною?*
14. *Навести два приклади повних систем булевих функцій.*
15. *Як формулюється теорема Поста?*

Приклади розв’язування задач до теми 1

Задача 1. Показати, що формули $A = X \Rightarrow Y$ і $B = \overline{X} \vee Y$ рівносильні.

Розв’язання. Цей висновок можна отримати після складання таблиць істинності формул

X	Y	A	$\overline{X}$	B
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Порівнюючи третій та п’ятий стовпці таблиці, приходимо до висновку $A = B$

Задача 2. Показати, що формули $F = A \wedge B \vee C$ і $F' = A \wedge (B \vee C)$ нерівносильні.

Розв’язання. Розглянемо набір (0,1,1) значень змінних A, B, C. Покажемо, що на цьому наборі задані формули приймають різні значення істинності. Дійсно, $F(0,1,1) = 0 \wedge 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$, а $F'(0,1,1) = 0 \wedge (1 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0$.

Задача 3. Довести логічний закон $a \Leftrightarrow b = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$.

Розв’язання. Підготуємо таблицю

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a \Leftrightarrow b$	$\overline{a} \vee b$	$a \vee \overline{b}$	$(\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Порівнюючи останній стовпчик з п’ятим, приходимо до висновку.

Задача 4. Довести, що формула $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y$ є тавтологією.

Розв’язання. Застосуємо логічні закони $\overline{x \oplus y} = x \Leftrightarrow y$, $\bar{x} = x \oplus 1$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$. Отримаємо

$$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \overline{y \oplus x} \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus \overline{y \oplus x}} \Leftrightarrow y = \overline{\overline{x \oplus \overline{y \oplus x}} \oplus y} =$$
$$= \overline{x \oplus \overline{y \oplus x}} \oplus y \oplus 1 = x \oplus \overline{y \oplus x} \oplus 1 \oplus y \oplus 1 = x \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus 1 \oplus y \oplus 1 = 1.$$

Узагальнення. Формула $F[\Leftrightarrow]$, в якій кожна змінна зустрічається парне число раз, є тавтологією.

Задача 5. Знайти булеві функції, двоїсті до булевих функцій від двох змінних з векторами значень (1,1,0,1) та (1,0,0,1).

Розв’язання. Задані булеві функції мають порядкові номери 13 та 9 і є імплікацією та еквіваленцією відповідно. Скористаємось означенням двоїстої функції, отримаємо

$$(x \Rightarrow y)^* = \overline{\bar{x} \Rightarrow \bar{y}} = \bar{x} \wedge y;$$
$$(x \Leftrightarrow y)^* = \overline{\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}} = x \oplus y.$$

Задача 6. Знайти функцію, двоїсту до функції $f(x, y, z) = (x \vee y) \oplus z$: а) за означенням, б) використовуючи принцип двоїстості.

Розв’язання. б) Відомо, що двоїстою до диз’юнкції є кон’юнкція, двоїстою до еквіваленції є додавання по модулю 2. Отже, маємо

$$f^*(x, y, z) = ((x \vee y) \oplus z)^* = (x \wedge y) \Leftrightarrow z.$$

Задача 7. Показати, що функція $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ є самодвоїстою.

Розв’язання. Скористаємось законом двоїстості. Двоїста функція має вигляд $f^*(x, y, z) = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$. Застосуємо закони поглинання, отримаємо

$$f^*(x, y, z) = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = ((x \vee y)x \vee (x \vee y)z)(y \vee z) = (x \vee (x \vee y)z)(y \vee z) =$$
$$= (x \vee xz \vee yz)(y \vee z) = xy \vee xyz \vee yz \vee xz = xy(1 \vee z) \vee yz \vee xz = xy \vee yz \vee xz = f(x, y, z)$$

Задача 8. Для заданої формулою $f(x,y)=(x\vee\bar y)\bar x$ булевої функції побудувати її ДДНФ.

Розв’язання. Достатньо застосувати дистрибутивний закон, отримаємо ДДНФ у вигляді

$$f(x,y)=(x\vee\bar y)\bar x = x\bar x\vee\bar y\bar x=\bar x\bar y\,.$$

Задача 9. Для заданої формулою $h(x,y,z)=xy\vee\bar z$ булевої функції побудувати її ДКНФ.

Розв’язання. Застосуємо дистрибутивний закон, отримаємо КНФ заданої функції у вигляді $h(x,y,z)=xy\vee\bar z=(x\vee\bar z)(y\vee\bar z)$. Ця формула є КНФ, але не є ДКНФ, оскільки елементарні диз’юнкції не є конституентами нуля. Використаємо логічний закон $a\bar a=0$, тоді

$$h(x,y,z)=(x\vee\bar z)(y\vee\bar z)=(x\vee\bar z\vee y\bar y)(y\vee\bar z\vee x\bar x)=(x\vee\bar z\vee y)(x\vee\bar z\vee\bar y)(y\vee\bar z\vee x)(y\vee\bar z\vee\bar x)$$

Нарешті, $h(x,y,z)=(x\vee y\vee\bar z)(x\vee\bar y\vee\bar z)(\bar x\vee y\vee\bar z)$.

Задача 10. Звести булеву функцію $f(x,y)=x\oplus y$ до ДДНФ і ДКНФ.

Розв’язання. Оскільки $x\oplus y=\overline{x\Leftrightarrow y}$, а $x\Leftrightarrow y=(x\Rightarrow y)(y\Rightarrow x)$, то побудову ДДНФ можна представити таким чином

$$x\oplus y=\overline{x\Leftrightarrow y}=\overline{x\Rightarrow y}\vee\overline{y\Rightarrow x}=x\bar y\vee\bar x y\,.$$

Для отримання ДКНФ цієї функції застосуємо для ДДНФ двічі дистрибутивний закон і закон $x\vee\bar x=1$, отримаємо

$$x\oplus y=x\bar y\vee\bar x y=(x\bar y\vee\bar x)(x\bar y\vee y)=(x\vee\bar x)(\bar y\vee\bar x)(x\vee y)(\bar y\vee y)=(x\vee y)(\bar x\vee\bar y).$$

Задача 11. Звести формули $x\,\overline{(x\vee\bar y)\overline{x\bar z}}$ і $x\vee\left(y\overline{x\bar z}\right)$ до ДНФ.

Розв’язання. Для першої формули $x\,\overline{(x\vee\bar y)\overline{x\bar z}}=x\left(\overline{(x\vee\bar y)}\vee x\bar z\right)=x\bar x y\vee x x\bar z=x\bar z$. Для другої формули $x\vee\left(y\overline{x\bar z}\right)=x\vee\left(y(\bar x\vee z)\right)=x\vee\bar x y\vee yz$.

Задача 12. Звести формули $x\vee\overline{(x\bar y)\vee\overline{x\vee\bar z}}$ і $x\left(y\vee\overline{x\vee\bar z}\right)$ до КНФ.

Розв’язання. Для першої формули

$$x \vee \overline{(x\bar{y}) \vee \overline{x \vee \bar{z}}} = x \vee ((\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z})) = (x \vee \bar{x} \vee y)(x \vee x \vee \bar{z}) = x \vee \bar{z}$$

Для другої формули $x\left(y \vee \overline{x \vee \bar{z}}\right) = x(y \vee \bar{x}z) = x(y \vee \bar{x})(y \vee z)$.

Задача 13. Побудувати поліном Жегалкіна булевих функцій $x \Rightarrow y$, $x \Leftrightarrow y$, $x \vee y\bar{z}$.

Розв'язання. Скористаємось логічними законами. Отримаємо

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = (x \oplus 1) \vee y = (x \oplus 1)y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus 1,$$

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus y} = x \oplus y \oplus 1,$$

$$x \vee y\bar{z} = xy\bar{z} \oplus x \oplus y\bar{z} = xy(z \oplus 1) \oplus x \oplus y(z \oplus 1) = xyz \oplus xy \oplus x \oplus yz \oplus y.$$

Задача 14. Дослідити на монотонність булеві функції

$$f(x, y, z) = xy \vee xz \vee \bar{x}z, \quad g(x, y, z) = x \Rightarrow (x \Rightarrow y).$$

Розв'язання. Перша функція може бути задана рівносильною формулою $f(x, y, z) = xy \vee z$ і її таблиця істинності має вигляд

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для всіх пар порівняних наборів, для першого з яких функція приймає значення 1, маємо:

$1 = f(0,0,1) \le f(0,1,1) = 1$, $1 = f(0,0,1) \le f(1,0,1) = 1$, $1 = f(0,0,1) \le f(1,1,1) = 1$,

$1 = f(0,1,1) \le f(1,1,1) = 1$, $1 = f(1,0,1) \le f(1,1,1) = 1$, $1 = f(1,1,0) \le f(0,1,1) = 1$.

Якщо ж на меншому з двох порівняних наборів функція приймає значення 0, то очевидно означення монотонної функції буде виконуватись.

Таким чином, функція $f(x,y,z) = xy \vee z$ є монотонною.

Функція $g(x,y,z) = x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ не є монотонною. Дійсно, для наборів (0,0) та (1,0) з області її визначення маємо $(0,0)<(1,0)$, але $1 = g(0,0) > g(1,0) = 0$

Задача 15. Чи є система $K = \{ f(x_1,...,x_n) : f(0,0,...,0) = 1\}$ булевих функцій замкнутим класом?

Розв'язання. Доведемо, що задана система не є замкнутим класом. Для цього достатньо показати, що в цій системі існують такі булеві функції, що деяка їх суперпозиція не належить системі. Розглянемо функції $h(x) = \bar{x}$ і $g(x,y) = x \Leftrightarrow y$. Так як $h(0) = 1$ і $g(0,0) = 1$, то вони належать до системи K. Функція $f(x,y) = h(\, g(x,y)) = \overline{x \Leftrightarrow y}$ є суперпозицією функцій h і g, але $f(0,0) = 0$, а значить $f \in K$, що і треба було довести.

Задача 16. Знайти потужність класів Поста.

Розв'язання. Очевидно, що класи T_0 і T_1 булевих функцій від n змінних мають однакову потужність. Вона дорівнює половині потужності множини всіх булевих функцій від n змінних, тобто числу $2^{2^n - 1}$. Це зрозуміло з правила побудови таблиці всіх булевих функцій від n змінних. Цей же результат легко отримати за правилом добутку з комбінаторики, оскільки вектор значень, наприклад, функції з класу T_0, є двійковим числом довжини 2^n, в якому перша цифра 0, а всі інші можуть незалежно приймати одне з двох значень – 0 або 1.

Потужність класу S самодвоїстих функцій від n змінних дорівнює $2^{2^{n-1}}$. Дійсно, вектор значень самодвоїстої функції однозначно визначається значеннями на половині булевих векторів з області визначення, тобто 2^{n-1} компонентами, кожна з яких може приймати значення 0 або 1.

Загальний вигляд лінійної функції від n змінних наступний $f(x_1,...,x_n)=a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n$, де кожне з $a_i, i=\overline{0,n}$ може бути 0 або 1. Тоді для потужності класу L лінійних функцій отримаємо число 2^{n+1}.

Для класу M монотонних функцій існують лише оцінки, точне число не відоме для довільного n.

Задача 17. Чи є такі системи булевих функцій повними?

а) $\{\downarrow\}$, б) $\{\vee,\Rightarrow\}$, в) $\{-,\Leftrightarrow\}$.

Розв'язання. Для системи а) скористаємось теоремою 1.16 і тим фактом, що система $\Sigma=\{-,\vee\}$ є повною. Так як $x\downarrow y=\overline{x\vee y}$, то $x\downarrow x=\overline{x\vee x}=\bar{x}$. Крім того, $x\vee y=\overline{x\downarrow y}=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$.

Таким чином, отримали функції системи Σ як суперпозиції функцій системи $\{\downarrow\}$. За теоремою 1.16 ця остання система повна.

Для дослідження системи б) помітимо, що обидві функції цієї системи належать до класу T_1. Обидві функції системи в) належать до класу L. За теоремою Поста ці системи не є повними.

Задача 18. Показати, що: 1) формула $A\cdot B\vee\overline{C}$ є логічним наслідком формули $A\cdot\overline{C}$, 2) формула BA є логічним наслідком формул $B\vee C, A, \overline{C}$.

Розв'язання. 1) Треба показати, що формула $A\overline{C}\Rightarrow A\cdot B\vee\overline{C}$ є тавтологією. Виконаємо перетворення

$$A\overline{C}\Rightarrow AB\vee\overline{C}=\overline{A\overline{C}}\vee AB\vee\overline{C}=\overline{A}\vee C\vee AB\vee\overline{C}=1.$$

2) Покажемо, що формула $(B\vee C)A\overline{C}\Rightarrow BA$ є тавтологією. Скористаємось методом від супротивного, тобто припустимо, що ця імплікація хибна, звідки $(B\vee C)A\overline{C}=1$, а $BA=0$. За означенням кон'юнкції отримаємо $B=0$ і $A=0$, але тоді $(B\vee C)A\overline{C}=0$, що суперечить припущенню.

Задача 19. Знайти всі наслідки з посилок X і $X\leftrightarrow Y$.

Розв'язання. Застосуємо алгоритм знаходження всіх наслідків:

1. Складаємо кон'юнкцію посилок $X\wedge(X\leftrightarrow Y)$

2. Знаходимо ДКНФ кон’юнкції посилок
$$X \wedge (X \leftrightarrow Y) \equiv X \wedge (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \equiv (X \vee Y\overline{Y})(\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y}) \equiv$$
$$\equiv (X \vee Y)(X \vee \overline{Y})(\overline{X} \vee Y)(X \vee \overline{Y}) \equiv (X \vee Y)(X \vee \overline{Y})(\overline{X} \vee Y)$$
3. Формули $X \vee Y$, $X \vee \overline{Y}$, $\overline{X} \vee Y$, $(X \vee Y)(X \vee \overline{Y})$, $(X \vee Y)(\overline{X} \vee Y)$, $(X \vee \overline{Y})(\overline{X} \vee Y)$, $(X \vee Y)(X \vee \overline{Y})(\overline{X} \vee Y)$ є всіма можливими наслідками з даних посилок.

Задача 20. Знайдіть наслідки з посилок $\overline{X}Y \vee Z$, $\overline{XY}$, $Y \Rightarrow (X \vee \overline{Z})$, що містять тільки змінні X та Z.

Розв’язання. За алгоритмом знаходимо всі наслідки з даних посилок.
$$\left(\overline{X}Y \vee Z\right)\overline{XY}\left(Y \Rightarrow \left(X \vee \overline{Z}\right)\right) = \left(\overline{X} \vee Z\right)\left(Y \vee Z\right)\left(\overline{X} \vee \overline{Y}\right)\left(\overline{Y} \vee X \vee \overline{Z}\right) =$$
$$= \left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right)\left(X \vee Y \vee Z\right)\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$$

З цієї ДКНФ отримаємо 31 наслідок, але умову задовольняє лише кон’юнкція першої та другої конституент нуля, оскільки $\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right) = \overline{X} \vee Z$.

Задача 21. Довести, що формула $\left(p \vee q\right)\left(p \to r\right)\left(q \to r\right) \to r$ є тавтологією.

Розв’язання. Виконаємо перетворення
$$\left(p \vee q\right)\left(p \to r\right)\left(q \to r\right) \to r = \overline{\left(p \vee q\right)\left(p \to r\right)\left(q \to r\right)} \vee r = \overline{p \vee q} \vee \overline{p \to r} \vee \overline{q \to r} \vee r =$$
$$= \overline{p}\overline{q} \vee p\overline{r} \vee q\overline{r} \vee r = \overline{p}\overline{q}\overline{r} \vee \overline{p}\overline{q}r \vee p\overline{q}\overline{r} \vee pq\overline{r} \vee pq\overline{r} \vee \overline{p}q\overline{r} \vee \overline{p}\overline{q}r \vee \overline{p}qr \vee p\overline{q}r \vee pqr =$$
$$= \overline{p}\overline{q}\overline{r} \vee \overline{p}\overline{q}r \vee p\overline{q}\overline{r} \vee pq\overline{r} \vee \overline{p}q\overline{r} \vee \overline{p}qr \vee p\overline{q}r \vee pqr$$

Отримали ДДНФ, яка містить всі можливі конституенти одиниці, отже ця формула є тавтологією.

Задачі для практичних занять та самостійної роботи до теми 1

Задача 1. Спростити формули:

а) $\overline{A \vee B \vee C} \cdot A \cdot \left(B \vee \overline{C}\right) \cdot \overline{B}$,

б) $(A \vee B) \cdot \overline{C} \vee A \vee \overline{C} \vee B \vee A$.

Задача 2. Довести рівносильність формул $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ і $P \cdot Q \Rightarrow R$.

Задача 3. Довести, що формули є тавтологіями:

а) $PQ \Rightarrow R \Leftrightarrow P\overline{R} \Rightarrow \overline{Q}$,

б) $(P \Rightarrow Q)\left(\overline{P} \Rightarrow Q\right) \Rightarrow Q$,

в) $(P \Rightarrow Q)\left(R \Rightarrow \overline{Q}\right) \Rightarrow \left(P \Rightarrow \overline{R}\right)$,

г) $(P \Rightarrow Q)\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{R}\right) \Rightarrow (R \Rightarrow P)$,

д) $(P \Rightarrow Q)\left(\overline{P} \Rightarrow R\right) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Задача 4. Скільки існує різних булевих функцій від трьох змінних? Від чотирьох змінних? Від *n* змінних?

Задача 5. Дано булеві функції: а) $f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \downarrow z)$, б) $g(x, y, z) = ((x \Rightarrow y) \vee \bar{z}) | x$. Побудувати її таблицю, знайти вектор значень та порядковий номер.

Задача 6. Знайти вектор значень булевої функції з порядковим номером а) 79, б) 115.

Задача 7. Дано булеву функцію: а) $F(x, y, z) = ((x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x))z$, б) $G(x, y, z) = ((x \Rightarrow y)(\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow y)xz$. Знайти фіктивні та суттєві змінні. Записати формулу рівної їй булевої функції.

Задача 8. Для заданої формулою булевої функції побудувати її ДДНФ: а) $g(x, y) = x\bar{y} \vee \bar{x}$, б) $h(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$.

Задача 9. Для заданої формулою булевої функції побудувати її ДКНФ: а) $g(x, y) = x\bar{y} \vee \bar{x}$, б) $h(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$.

Задача 10. Побудувати поліном Жегалкіна булевих функцій: а) $x \vee y \vee z$, б) $xy \vee yz \vee xz$, в) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$.

Задача 11. Чи є такі функції лінійними:

а) $f(x,y,z) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \downarrow z)$,

б) $g(x,y,z) = ((x \Rightarrow y) \vee \bar{z}) | x$,

в) $h(x,y,z) = (01010010)$?

Задача 12. Дослідити булеву функцію $f(x,y,z) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow z$ на лінійність, побудувавши її поліном Жегалкіна методом рівносильних перетворень.

Задача 13. Довести, що коли в ДДНФ булевої функції замінити символ $\vee$ символом $\oplus$, то отриману формулу можна звести до полінома Жегалкіна. Побудувати таким способом поліном Жегалкіна функції $f(x,y,z) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow z$.

Задача 14. Дослідити на монотонність булеві функції:

а) $f(x,y,z) = \overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$,

б) $g(x,y,z) = \overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$,

в) $h(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$,

г) $q(x,y,z) = xy \vee x \vee \bar{x}z$.

Задача 15. Показати, що клас $\{1, \oplus\}$ булевих функцій не замкнутий.

Задача 16. Виразити всі основні операції через імплікацію.

Задача 17. Чи є повними такі системи булевих функцій:

а) $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$, б) $\{1, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, в) $\{1, \wedge, \vee\}$,?

Задача 18. Чи є повними такі системи булевих функцій:

а) $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$,

б) $\{(01000100), (11111100), (10001000)\}$?

Задача 19. Показати, що система $\{0, (x \Rightarrow y) \downarrow (y \Leftrightarrow z), (x | (xy)) \Rightarrow z, x \oplus y\}$ булевих функцій не є повною, доповнити її до повної системи і знайти всі базиси цієї повної системи.

Задача 20. Доповнити систему $\{x \oplus \bar{y}\}$ до базису.

Задача 21. Розташуйте формули в такому порядку, щоб з кожної формули випливали всі, що стоять після неї:

а) $X \vee \bar{X}$, $X \wedge Y$, $X \wedge \bar{X}$, $X \to Y$, $X \leftrightarrow Y$,

б) $\bar{X} \leftrightarrow Y$, $\overline{X \to (\bar{X} \to Y)}$, $X \to (Y \to X)$, $X \vee Y$, $\bar{X} \wedge Y$.

Задача 22. Довести, що схема $\dfrac{X \to Y, \bar{Y}}{\bar{X}}$ міркування - правильна, а схема $\dfrac{X \to Y, \bar{X}}{\bar{Y}}$ – неправильна.

Задача 23. Чи є наслідками теореми Піфагора наступні твердження: а) трикутник зі сторонами 3, 4, 5 – прямокутний; б) трикутник зі сторонами 3, 4, 6 – не прямокутний.

Задача 24. Студент розв'язував задачу: «Послідовність задана формулою загального члена. Довести, що вона є арифметичною прогресією». Він міркував так: «Якщо послідовність – арифметична прогресія, тоді $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$. Перевірка показала, що для заданої послідовності ця рівність виконується,. Отже, ця послідовність є арифметичною прогресією». Чи вірні ці міркування?

Задача 25. Розглянемо теорему: «Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то суми довжин його протилежних сторін рівні». Чи можна на основі цієї теореми стверджувати, що в ромб можна вписати коло?

Задача 26. Знайдіть всі наслідки з посилок: а) $X \to Y$ і $\bar{Y}$; б) $X \to Y$, $Y \vee Z$ і $XY \leftrightarrow Z$; в) $X \leftrightarrow Y$ і $Y \leftrightarrow Z$; г) $(X \wedge Y) \to \bar{Z}$, Y і Z.

Задача 27. Знайдіть наслідки з посилок $X_1 \vee X_2$, $X_1 \to X_3$, $X_2 \leftrightarrow X_4$, які містять: а) тільки змінні X_1 і X_4, б) тільки змінні X_2, X_3 і X_4.

(Вказівка. Побудувати таблицю істинності всіх посилок; відмітити набори змінних, коли всі посилки одночасно істинні; окремо скласти таблицю для змінних X_1 і X_4, поставивши 1 для тих наборів, які є піднаборами відмічених наборів, і 0 для решти наборів; перейти від таблиці до формули).

Задача 28. Довести, що формула $(\overline{p} \to p) \to p$ є тавтологією (правило виводу Евкліда).

Задача 29. Обґрунтувати правило виводу $\dfrac{(p \to q), (q \to r), (r \to s)}{p \to s}$.

Навести приклад міркування за цим правилом.

Задача 30. Чи є міркування правильними?

1) Якщо студент отримав 5, то він розв’язав задачу. Студент одержав 5. Отже, студент розв’язав задачу.

2) Якщо замінити мікросхему, то телевізор працюватиме за умови, що напругу увімкнено. Мікросхему замінили. Напругу не увімкнули. Отже телевізор не працюватиме.

3) Я піду на лекцію або залишуся і вип’ю кави. Я не піду на лекцію. Отже, я залишуся і вип’ю кави.

Тема 2 Числення висловлювань

2.1 Поняття формальної системи. Системи аксіом. Правила виводу

Більшість математичних теорій будуються аксіоматичним методом і називаються аксіоматичними. В математичній теорії твердження, що доводяться, називаються *теоремами*. Вони виводяться з деяких фіксованих тверджень, що приймаються без доведень і називаються *аксіомами* цієї математичної теорії.

Розрізняють змістовні та формальні аксіоматичні теорії. Доведення теорем в них теж називають змістовними та формальними відповідно. Більшість математичних теорій є змістовними (наприклад, евклідова геометрія, векторний простір, алгебраїчні структури). В змістовних аксіоматичних теоріях можна користуватись звичайними міркуваннями і всіма логічними законами, тобто правила логічного виводу не фіксуються.

Аксіоматична теорія логіки висловлювань називається численням висловлювань, вона є прикладом формальної теорії. Всі аксіоми та теореми є тавтологіями. Крім аксіом вказують ще правила виводу і правило підстановки. Процес доведення в численні висловлювань зводиться до певних механічних дій над формулами по точно визначеним правилам.

Найбільш важливими для математики є тотожно істинні формули або тавтології. Знаходження тавтологій є основною задачею логіки висловлювань, а отже, і числення висловлювань, оскільки тавтології виражають закони логічного мислення.

Правило підстановки. Нехай формула Φ є тавтологією, A - одна з її пропозиціональних змінних і B – будь-яка формула. Тоді формула, яка отримана з Φ заміною в ній всіх входжень A на B, теж є тавтологією. Результат підстановки B замість A у формулі Φ зручно позначати символом $\Pi_A^B(\Phi)$.

Правило підстановки дозволяє одну і ту саму аксіому записати безліччю способами, тому аксіоми зручніше називати *схемами аксіом.* Існує кілька аксіоматичних теорій логіки висловлювань. Розглянемо аксіоматичну теорію, що будується на аксіомах (в численні висловлювань замість символу $\Rightarrow$ використовують як правило символ $\rightarrow$)

A_1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

A_2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

A_3: $(\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((\overline{B} \rightarrow A) \rightarrow B)$.

Правило виводу - **modus ponens (МП):** $\dfrac{A \rightarrow B, A}{B}$

2.2. Поняття виводу. Виведення із гіпотез. Теорема дедукції

Означення 2.1 *Виводом* (або *формальним доведенням*) називається скінченна послідовність формул, кожен елемент якої є або аксіома, або отриманий з попередніх формул за правилом МП. Формула називається вивідною, якщо вона зустрічається в деякому виводі. Позначення $\vdash A$ використовують, щоб сказати, що формула A є вивідною.

Зауваження. Послідовність з однієї формули $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ є виводом, оскільки ця формула отримана з аксіоми A_1. А, наприклад, послідовність з двох формул $A \rightarrow B$, $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ не є виводом, оскільки перша з формул не задовольняє означенню.

Оформлення виводу формули часто записують у вигляді послідовності кроків, записаних один під одним, доповнених короткими поясненнями.

Теорема 2.1 Формула $A \rightarrow A$ є вивідною (або $\vdash A \rightarrow A$).

Доведення. 1) $\Pi_B^{A \rightarrow A}(A_1): A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$,

2) $\Pi_{B,C}^{A \rightarrow A, A}(A_2): (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$,

3) МП для 1) і 2): $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$,

4) $\Pi_B^A(A_1): A \to (A \to A)$,

5) МП для 3) і 4): $A \to A$.

Наслідок. Формула $(A \to B) \to (A \to B)$ є вивідною.

Поняття виводу з гіпотез є розширенням поняття виводу і співпадає з ним, якщо множина гіпотез є порожньою.

Означення 2.2 Нехай Г – деяка скінченна множина формул (гіпотез) числення висловлювань, яка може бути і порожньою. *Виводом* формули В з гіпотез Г називається послідовність формул, в якій кожна формула або аксіома, або належить Г, або отримується за правилом МП з попередніх формул. Позначають Г $\vdash$В.

Властивості виводу із гіпотез.

1) якщо $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma, A \vdash B$,

2) якщо $\Gamma, A, C \vdash B$, то $\Gamma, C, A \vdash B$,

3) якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$,

4) якщо $\Gamma \vdash A_i$ для кожного $i = 1,\ldots,n$ і $A_1,\ldots,A_n \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$,

5) якщо $\Gamma \vdash A \to B$, то $\Gamma, A \vdash B$.

Теорема 2.2 Формула $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ є вивідною**.**

Доведення Будемо доводити, що B виводиться з $\overline{B} \to \overline{A}$ і A.

1) A – гіпотеза,

2) аксіома А1: $A \to (\overline{B} \to A)$**,**

3) МП для 1) і 2): $\overline{B} \to A$**,**

4) $\overline{B} \to \overline{A}$ - гіпотеза,

5) аксіома А3: $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$**,**

6) МП для 4) і 5): $(\overline{B} \to A) \to B$**,**

7) МП для 3) і 6): B.

Зауваження. Ця формула називається законом контрапозиції. Цей логічний закон є обґрунтуванням методу доведення від супротивного, який широко використовується при побудові змістовних аксіоматичних теорій.

Теорема 2.3 Формула $\overline{A} \to (A \to B)$ є вивідною.

Доведення. 1) $\Pi_{A,B}^{\overline{A},\overline{B}}(A_1): \overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A})$,

2) формула з теореми 2.2, позначимо її B_1,

3) $\Pi_{A,B}^{B_1,\overline{A}}(A_1): B_1 \to (\overline{A} \to B_1)$,

4) МП для 3) і 2): $\overline{A} \to B_1$,

5) $\Pi_{A,B,C}^{\overline{A},\overline{B}\to\overline{A},A\to B}(A_2): (\overline{A} \to B_1) \to ((\overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A})) \to (\overline{A} \to (A \to B)))$,

6) МП для 5) і 4): $(\overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A})) \to (\overline{A} \to (A \to B))$,

7) МП для 6) і 1): $\overline{A} \to (A \to B)$.

Теорема 2.4 Якщо $\Gamma = \{A\}$, то $A \vdash (B \to A)$ для будь-якої формули *B*.

Доведення. 1) A_1: $A \to (B \to A)$**,**

2) *A* – гіпотеза,

3) МП для 1) і 2): $B \to A$

Теорема 2.5 (дедукції) $A_1, A_2, ..., A_n, B \vdash C$ тоді і лише тоді, коли $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B \to C$.

Зауваження. Теорему дедукції іноді формулюють у більш лаконічному вигляді: «$\Gamma, B \vdash C$ тоді і лише тоді, коли $\Gamma \vdash B \to C$», вважаючи, що формули $A_1, A_2, ..., A_n$ з попереднього формулювання утворюють систему гіпотез.

Терема 2.6 Якщо з $\overline{F}$ виводиться A і з $\overline{F}$ виводиться $\overline{A}$, то F - вивідна формула.

Доведення. 1) $\vdash \overline{F} \to \overline{A}$ за теоремою дедукції,

2) аксіома А3: $(\overline{F} \to \overline{A}) \to ((\overline{F} \to A) \to F)$**,**

3) МП для 1) і 2): $(\overline{F} \to A) \to F$,

4) $\vdash \overline{F} \to A$ за теоремою дедукції,

5) МП для 3) і 4): F.

Теорема 2.7 (правило силогізму) Якщо $\Gamma = \{A \to B, B \to C\}$, то $\Gamma \vdash A \to C$.

Доведення. За теоремою дедукції достатньо довести $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$.

1) A – гіпотеза,

2) $A \to B$ - гіпотеза,

3) МП для 1) і 2): B,

4) $B \to C$ - гіпотеза,

5) МП для 3) і 4): C.

Теорема 2.8 $\vdash \overline{\overline{A}} \to A$

Доведення Будемо доводити $\overline{\overline{A}} \vdash A$

1) $\Pi_{A,B}^{\overline{A},A}(A_3): \left(\overline{A} \to \overline{\overline{A}}\right) \to \left(\left(\overline{A} \to \overline{A}\right) \to A\right)$,

2) $\overline{\overline{A}}$ - гіпотеза,

3) $\overline{\overline{A}} \vdash \left(\overline{A} \to \overline{\overline{A}}\right)$ - доведено вище, отже $\overline{A} \to \overline{\overline{A}}$ - вивідна формула,

4) МП для 1) і 3): $\left(\overline{A} \to \overline{A}\right) \to A$,

5) $\overline{A} \to \overline{A}$ - вивідна,

6) МП для 4) і 5): A – вивідна з $\overline{\overline{A}}$.

Теорема 2.9 $\vdash A \to \overline{\overline{A}}$.

Доведення.

1) $\Pi_{B}^{\overline{\overline{A}}}(A_3): \left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to A\right) \to \overline{\overline{A}}\right)$,

2) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$ - доведено в попередній теоремі,

3) МП для 1) і 2): $\left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to A\right) \to \overline{\overline{A}}$,

4) $\Pi_{B}^{\overline{\overline{\overline{A}}}}(A_1): A \to \left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to A\right)$

5) Теорема 2.7 для 3) і 4): $\overline{\overline{A}}$ – вивідна з A.

Означення 2.3 Імплікацію $\overline{A} \to B$ будемо називати диз'юнкцією формул А та В і позначати $A \vee B$. Заперечення $\overline{A \to \overline{B}}$ назвемо кон'юнкцією $A \wedge B$ формул A та B. Формулу $(A \to B) \wedge (B \to A)$ назвемо еквіваленцією $A \leftrightarrow B$ формул A та B.

Зауваження. Коректність наведеного означення випливає з того, що раніше була доведена рівносильність наведених пар формул, тобто, що

$\overline{A} \to B = A \vee B$;

$\overline{A \to \overline{B}} = A \wedge B$;

$(A \to B) \wedge (B \to A) = A \leftrightarrow B$.

Теорема 2.10 Формула $A \vee \overline{A}$ є вивідною.

Доведення. За попереднім означенням формула $A \vee \overline{A}$ є формулою $\overline{A} \to \overline{A}$. Ця формула є вивідною, бо раніше було доведено, що формула $A \to A$ є вивідною.

2.3 Числення висловлювань і булеві функції. Несуперечність і повнота числення висловлювань

Розглянута формальна аксіоматична теорія – числення висловлювань – відповідає змістовній теорії, яку ми вище називали логікою висловлювань. В зв'язку з цим виникає питання повноти та несуперечності цієї аксіоматичної теорії. Кожну формулу числення висловлювань можна розглядати як формулу логіки висловлювань.

Під повнотою числення висловлювань розуміють можливість виводу в ній будь-якої тавтології з логіки висловлювань. З іншого боку, аксіоми числення висловлювань є тавтологіями логіки висловлювань і будь-яка вивідна формула в численні висловлювань є тавтологією логіки висловлювань.

Розглянемо інший спосіб обгрунтування повноти числення висловлювань. Формули числення висловлювань реалізують булеві функції.

Тавтології реалізують булеві функції, рівні константі 1. Згідно з теоремою Поста система булевих функцій (заперечення, імплікація) є повною, звідки випливає, що для будь-якої булевої функції знайдеться формула числення висловлювань, що реалізує цю булеву функцію.

Лема. Аксіоми A_1, A_2, A_3 є тавтологіями.

Довести можна, побудувавши таблиці істинності булевих функцій, що реалізують ці аксіоми. З леми випливає

Теорема 2.11 В численні висловлювань вивідними є лише тавтології.

Дійсно, кожна формула у виводі є або аксіомою (тобто тавтологією), або отримана по правилу МП з тавтологій, отже теж є тавтологією.

Означення 2.4 Формальна теорія називається *суперечливою*, якщо в ній одночасно є виводи формул A і $\overline{A}$.

Теорема 2.12 Числення висловлювань несуперечливе.

Доведення. Припустимо, що числення висловлювань суперечливе, тобто у ньому існує одночасно два виводи A і $\overline{A}$. Тоді за теоремою про повноту A і $\overline{A}$ – тавтології. Отримуємо протиріччя з означенням тавтології. Теорема доведена.

Питання для самоконтролю

1. *До якого типу формул відносяться аксіоми числення висловлювань?*
2. *Який вигляд має правило* ***modus ponens ?***
3. *В чому сутність правила підстановки?*
4. *Як в численні висловлювань визначаються диз'юнкція, кон'юнкція, еквіваленція (через імплікацію)?*
5. *Назвіть властивості виводу із гіпотез.*
6. *Який вигляд має закон контрапозиції?*
7. *Наведіть приклад застосування правила силогізму.*
8. *Яка теорія називається супреічливою?*

Приклади розв'язування задач до теми 2

Задача 1. Для заданого виводу з гіпотез сформулювати пояснення кожного кроку:

1) $A \to (B \to C)$,

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

3) $(A \to B) \to (A \to C)$,

4) $A \to B$,

5) $A \to C$.

Розв'язання. 1) – гіпотеза, 2) - аксіома A_2, 3) - МП для 1) і 2), 4) – гіпотеза, 5) - МП для 3) і 4).

Задача 2. Послідовність $A \to B$, $B \to C$, $A \to (B \to A)$, A, $B \to A$ є виводом формули $B \to A$ з гіпотез: а) $\{A\}$, б) $\{A, A \to B\}$, в) $\{A, A \to B, B \to C\}$, г) $\{A, A \to B, B \to C, B \to A\}$. Показати, що кожна відповідь правильна і вказати, які властивості виводу з гіпотез використано і як можна скоротити вивід.

Задача 3. Довести, що формула $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ вивідна в численні висловлювань (правило контрапозиції).

Розв'язання. Будемо доводити, що $(\overline{B} \to \overline{A}) \vdash (A \to B)$.

1) $(\overline{B} \to \overline{A})$ - гіпотеза,

2) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$ - аксіома А3,

3) МП для 1) і 2): $(\overline{B} \to A) \to B$,

4) $\Pi_{B}^{\overline{B}}(A_1)$: $A \to (\overline{B} \to A)$,

5) правило силогізму для 4) і 3): $A \to B$.

Висновок випливає з теореми дедукції.

Задача 4. Довести, що формула $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Так само за теоремою дедукції можемо взяти $A \to B$ за гіпотезу.

1) $A \to B$ - гіпотеза,

2) $\overline{\overline{A}} \to A$ - доведено в лекціях,

3) правило силогізму для 2) і 1): $\overline{\overline{A}} \to B$.

4) $B \to \overline{\overline{B}}$ - доведено в лекціях,

5) правило силогізму для 3) і 4): $\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}$,

6) $\left(\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}\right) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$ - з попередньої задачі підстановкою $\overline{A}$ замість B і $\overline{B}$ замість A,

7) МП для 5) і 6): $\left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$.

Задача 5. Довести, що формула $A \to \left(\overline{B} \to \overline{A \to B}\right)$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Доведемо спочатку $\{A \to B, A\} \vdash B$.

1) A - гіпотеза,

2) $A \to B$ - гіпотеза,

3) МП для 1) і 2): B.

Тепер застосуємо двічі теорему дедукції, отримаємо $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$. За попередньою теоремою вивідною є формула $((A \to B) \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A \to B}\right)$. За правилом силогізму для двох останніх формул отримаємо $\vdash A \to \left(\overline{B} \to \overline{A \to B}\right)$, що і треба було довести.

Задача 6. Довести, що формула $(A \to B) \to \left(\left(\overline{A} \to B\right) \to B\right)$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Будемо доводити, що $\{A \to B, \overline{A} \to B\} \vdash B$.

1) $A \to B$ - гіпотеза,

2) $\overline{A} \to B$ - гіпотеза,

3) $(A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$ - доведено в попередній задачі,

4) МП для 1) і 3): $\overline{B} \to \overline{A}$,

5) правило силогізму для 4) і 2): $\overline{B} \to B$,

6) $П_A^B(A_3)$: $(\overline{B} \to \overline{B}) \to ((\overline{B} \to B) \to B)$,

7) $\overline{B} \to \overline{B}$ - було доведено в лекціях,

8) МП для 7) і 6): $(\overline{B} \to B) \to B$,

9) МП для 5) і 8): B.

Якщо двічі застосувати теорему дедукції, то отримаємо висновок, що формула $(A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$ є вивідною.

Задачі для практичних занять та самостійної роботи до теми 2

Задача 1. Користуючись теоремою дедукції, побудувати виводи таких формул:

1) $(A \to B) \to B$,

2) $(A \to B) \to (A \to A)$,

3) $A \to (B \to (C \to C))$,

4) $A \to ((A \to B) \to B)$,

5) $A \to (\overline{A} \to B)$,

6) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$,

7) $(A \to (B \to C)) \to (A \to \overline{B \to C})$,

8) $((A \to B) \to A) \to A$.

Задача 2. Користуючись теоремою дедукції, побудувати вивід формули $A \to C$ з множини гіпотез $\{A \to (B \to C), B\}$.

Задача 3. Показати, що формули є тавтологіями в численні висловлювань:

1) $A \wedge B \to A$,

2) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$,

3) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B})$,

4) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow C)$,

5) $((A \leftrightarrow B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \leftrightarrow C))$.

(Вказівка. Скористатись означенням 2.3).

Тема 3 Логіка предикатів

3.1 Поняття предикату. Способи задання. Область визначення та область істинності предиката. Типи предикатів

Логіка висловлювань дозволяє розв’язати численні задачі, пов’язані з мисленням і дослідженням правильності мислення, особливо в рамках природничо-математичних наук. Але неважко навести приклади, коли інструментів логіки висловлювань виявляється недостатньо. Навіть в шкільному курсі математики є багато прикладів подібного роду:

«**Будь-яке** ціле число є раціональним. Дане число ціле. Значить, воно раціональне».

Або, наприклад, ми хочемо з’ясувати правильність такого міркування: «Прямі *а* та *в* паралельні. Прямі *в* та *с* паралельні. Отже, прямі *а* та *с* паралельні». Маємо три висловлювання, які можемо позначити *A*, *B*, *C*. Це міркування в логіці висловлювань запишеться формулою $AB \Rightarrow C$ і його істинність випливала б з тавтологічності цієї формули, що очевидно не має місця. Отже, **ми знаємо, що наведене міркування істинне, але довести це засобами логіки висловлювань не можемо**. Аналіз міркувань подібного роду приводить до необхідності **розширення логіки висловлювань** і таким розширенням є **логіка предикатів**.

Означення 3.1 Твердження, яке залежить від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і перетворюється у висловлювання в результаті заміни всіх змінних їх значеннями з множин $M_1, M_2, ..., M_n$ відповідно, називається n*–місним предикатом*, заданим на множинах $M_1, M_2, ..., M_n$. Позначається $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають *предметними*. Підмножина множини $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, на якій предикат перетворюється в істинне висловлювання, називається *областю істинності предиката* і позначається

$I(P)$.

Зауваження. Якщо в означенні предиката $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, то говорять, що n–місний предикат заданий на множині M.

З предикатами зустрічаються ще в середній школі. Кожне алгебраїчне рівняння або нерівність є предикатом. Завдання розв'язати рівняння або нерівність є по суті завданням знайти область істинності предиката.

Приклад 3.1

1) $M = R, P(x): "\, x < 5"$ – одномісний предикат на множині дійсних чисел. $P(1): "1 < 5"$ – істинне висловлювання, $P(7): "7 < 5"$ хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $I(P(x)) = \{x \in R : x \in (-\infty;5)\}$.

2) $M_1 = M_2 = R$, $P(x,y): "\, y = sin\, x"$ – двомісний предикат на множині дійсних чисел. $P(0,0)$: $"0 = sin\, 0"$ – істинне висловлювання, $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$: $"\frac{1}{2} = sin\frac{1}{2}"$ – хибне висловлювання. Областю істинності предиката є множина $\mathrm{I}(P(x,y)) = \{(x,y) : y = \sin x\}$.

3) $M_1 = M_2 = N$, $P(x,y): "\, x \vdots y"$ – двомісний предикат на множині натуральних чисел. $P(2,1): "2 \vdots 1"$ – істинне висловлювання, $P(2,3): "2 \vdots 3"$ – хибне висловлювання.

4) $P(x,y,z): "\, x + y + 2z = 1"$ – тримісний предикат.

Увага! З означення n–місного предикату на множині M і наведених прикладів випливає наступний цікавий висновок: кожний предикат задає функцію P з M^n в множину $B = \{0,1\}$. Тому іноді предикат називають логічною функцією.

Зауваження. Якщо зафіксувати одну зі змінних в n–місному предикаті, то одержимо $(n-1)$–місний предикат. В частинному випадку, з одномісного предиката отримаємо висловлювання (0-місний предикат).

Приклад 3.2 $P(x,y):"\, x < y"$ – двомісний предикат. Покладемо $y = 5$, тоді $P(x,5) = P(x):"\, x < 5"$ – одномісний предикат.

Означення 3.2 Якщо множина істинності предикату співпадає з його областю визначення, то він називається *тотожно істинним*. Предикат з порожньою областю істинності називається *тотожно хибним*. В інших випадках предикат називається *виконуваним*. Очевидно, тотожно істинний предикат є виконуваним (але не навпаки).

Означення 3.3 Два предикати, задані на одній і тій же множині, називаються *рівносильними*, якщо при будь-якому наборі значень змінних вони приймають однакові значення істинності.

Приклад 3.3 Предикати $x = 1$ і $x + y - y = 1$ рівносильні, оскільки при $x=1$ вони істинні, при будь-якому іншому дійсному значенні x вони обидва хибні.

Предикат $|x| \geq 0$ є тотожно істинним на множині дійсних чисел.

Предикат $\sin x = 10$ є тотожно хибним на множині дійсних чисел.

Зауваження. Відношення рівносильності предикатів є відношенням еквівалентності. Цей факт є дуже корисним і широко використовується. Наприклад, при розв'язанні рівнянь або нерівностей (які є предикатами) це дозволяє переходити від одного з них до йому рівносильного. Ми називаємо такий перехід рівносильним перетворенням.

3.2 Операції над предикатами. Квантори. Квантифікація предиката. Формули логіки предикатів

Так як значення предикатів є висловлюваннями, то над ними можна виконувати ті ж логічні операції, що і над висловлюваннями. Наприклад, якщо $P(x)$ та $Q(x)$ – одномісні предикати, то $P(x) \vee Q(x)$ – диз'юнкція, $P(x) \wedge Q(x)$ – кон'юнкція цих предикатів, а $\overline{P(x)}$ – заперечення предиката $P(x)$. За допомогою логічних операцій з простих предикатів утворюють складні предикати.

Приклад 3.4

1) Запереченням предиката $P(x):" x<5"$, заданого на множині дійсних чисел, є предикат $\overline{P(x)}:" x\ge 5"$.

2) Кон'юнкцією предикатів $P(x):" x<3"$ і $Q(x):" x\vdots 2"$, заданих на множині N, є предикат $P(x)\wedge Q(x)" x<3\wedge x\vdots 2"$.

Логічним операціям над предикатами відповідають операції над множинами, що є їхніми областями істинності. Наприклад, область істинності кон'юнкції предикатів дорівнює перетину областей істинності цих предикатів. У попередньому прикладі маємо $I(P(x)\wedge Q(x))=I(P(x))\bigcap I(Q(x))=$ $=\{1,2\}\bigcap\{x\in N \mid x\vdots 2\}=\{2\}$.

Крім зазначених логічних операцій над предикатами, використовується ще *операція приписування кванторів до предиката*, яку ще називають *зв'язуванням змінних* або *квантифікацією*. Найчастіше використовують квантори двох видів: *квантор загальності* (позначається символом $\forall$. Читається «для всіх…», «для кожного…», «для будь-якого…» або «кожний…», «будь-який…»), *квантор існування* (позначається символом $\exists$. Читається: «існує…» або «знайдеться…»).

Зауваження. Операція квантифікації є узагальненням операцій кон'юнкції та диз'юнкції висловлювань на випадок нескінченного числа висловлювань. Пояснимо це докладніше. Нехай на множині M заданий предикат $P(x)$. Якщо $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ та $P(x_1)=1, P(x_2)=1,...,P(x_n)=1$, то $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} P(x_i)=1$, що можна записати у вигляді $(\forall x)\,P(x)$. Таким чином, у випадку скінченної множини квантор загальності означає кон'юнкцію істинних висловлювань. Природно вважати, що $\bigwedge\limits_{i=1}^{\infty} P(x_i)=1$, якщо й тільки якщо $P(x_i)=1$ при кожному i та використовувати запис $(\forall x)\,P(x)$ також і у випадку нескінченної множини M. Тобто для довільної множини, на якій заданий предикат $P(x)$, має місце рівність $(\forall x)\,P(x) = \underset{i}{\wedge} P(x_i)$. Аналогічна рівність для квантора існування, заданого на довільній множині (скінченній або нескінченній), має вигляд $\underset{i}{\vee} P(x_i) = (\exists x)P(x)$. Іноді використовують запис $(\exists!\, x \in M)\, P(x)$, щоб підкреслити, що існує єдиний елемент множини M, для якого має місце властивість $P(x)$. Наприклад, $\exists!\, x \in N \mid x < 2$. Дійсно, властивість $x < 2$ притаманна лише натуральному числу 1.

Ми вже знаємо, що із предиката від n змінних можна одержати предикат від $n-1$ *змінної, якщо зафіксувати одну зі змінних. Є й інший спосіб – приписати квантор. Наприклад, із предиката* $P(x,y)$ *від двох змінних одержуємо предикат* $(\forall x \in M)\, P(x,y)$ *від однієї змінної* y*, із предиката* $P(x)$ *від однієї змінної одержуємо висловлювання* $(\exists x)\, P(x)$. *Отже, операцію квантифікації можна застосувати до предикатів від однієї або більше змінної.*

Увага! Висловлювання $(\forall x)\, P(x)$ істинне тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно істинний. Висловлювання $(\exists x)P(x)$ істинне тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ виконуваний, і хибне, якщо предикат $P(x)$ тотожно хибний.

Змінну x у висловлюваннях $(\forall x)\, P(x)$ та $(\exists x)\, P(x)$ називають ще *зв'язаною*, на відміну, наприклад, від змінної x в предикатах $P(x)$ або $(\forall y)\, P(x, y)$.

Предикат від *n* змінних можна перетворити у висловлювання, поставивши перед ним *n* кванторів, щоб всі змінні стали зв'язаними. Наприклад, речення $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\forall z \in R)\, x(y+z) = xy + xz$ є висловлюванням про істинність дистрибутивного закону для множення і додавання дійсних чисел.

З предиката від двох змінних за допомогою операції квантифікації можна утворити 8 висловлювань

1) $(\forall x)(\forall y)(F(x,y))$ – «для будь-якого x і для будь-якого y $F(x,y)$»;

2) $(\forall y)(\forall x)(F(x,y))$ – «для будь-якого y і для будь-якого x $F(x,y)$»;

3) $(\exists x)(\exists y)(F(x,y))$ – «існує x і існує y такі, що $F(x,y)$»;

4) $(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ – «існує x і існує y такі, що $F(x,y)$»;

5) $(\forall y)(\exists x)(F(x,y))$ – «для будь-якого y існує x такий, що $F(x,y)$»;

6) $(\exists x)(\forall y)(F(x,y))$ – «існує x такий, що для будь-якого y $F(x,y)$»;

7) $(\forall x)(\exists y)(F(x,y))$ – «для будь-якого x існує y такий, що $F(x,y)$»;

8) $(\exists y)(\forall x)(F(x,y))$ – «існує y такий, що для будь-якого x $F(x,y)$»;

Висловлювання 1) і 2), а також 3) і 4) мають один і той же сенс і, отже, однакові значення істинності.

Якщо висловлювання 6) істинне, то, вочевидь, істинне і висловлювання 5), але не навпаки.

Якщо висловлювання 8) істинне, то, вочевидь, істинне і висловлювання 7), але не навпаки.

Наприклад, $(\forall x)(\exists y)(x+y=0)$ (будь-яке число має протилежне) – істинне висловлювання, $(\exists y)(\forall x)(x+y=0)$ (існує число, протилежне будь-якому числу) – хибне висловлювання.

Побудова заперечень висловлювань найчастіше відбувається приписуванням частки «не» перед присудком: дорівнює – не дорівнює, менше – не менше і інші. Для математичних тверджень, що містять квантори, цей прийом неприйнятний, оскільки не дає заперечення. Наприклад, для висловлювання «Всі натуральні числа є парними» висловлювання «Всі натуральні числа не є парними» не є запереченням. **Побудова заперечень** для тверджень з кванторами відбувається за наступним правилом:

1) Якщо твердження починається з квантора загальності (існування), треба замінити його квантором існування (загальності);

2) Поставити символ заперечення над всім логічним виразом, що стоїть після квантора.

Символічний запис цього правила має вигляд:

$\overline{(\forall x)\, A(x)} = (\exists x)\overline{A(x)}$;

$\overline{(\exists x)\, A(x)} = (\forall x)\overline{A(x)}$.

Доведемо, наприклад, що $\overline{(\forall x)\, A(x)} = (\exists x)\overline{A(x)}$. Нехай $\overline{(\forall x)\, A(x)} = 1$, тоді $(\forall x)\, A(x) = 0$. За означенням квантора загальності кон’юнкція $\wedge A(x_i)$ дорівнює 0, а значить існує принаймні одне *i*, що $A(x_i) = 0$, звідки $\overline{A(x_i)} = 1$. Отже, маємо істинне висловлювання $(\exists x)\overline{A(x)}$. Аналогічно, з істинності висловлювання $(\exists x)\overline{A(x)}$ доводиться істинність висловлювання $\overline{(\forall x)\, A(x)}$.

Зауважимо, що це правило побудови заперечень поширюється і на логічні вирази, що починаються з кількох кванторів. Для цього треба це правило послідовно застосувати кілька разів. Наприклад,

$$\overline{(\forall x)(\forall y)(\exists z)\, A(x,y,z)} = (\exists x)\overline{(\forall y)(\exists z)\, A(x,y,z)} =$$
$$= (\exists x)(\exists y)\overline{(\exists z)\, A(x,y,z)} = (\exists x)(\exists y)(\forall z)\,\overline{A(x,y,z)}.$$

Приклад 3.5

1) Запереченням твердження «Кожне натуральне число – парне» є твердження «Існують натуральні числа, які не є парними».

2) Для твердження «$(\forall\, x \in N)(\exists\, y \in N)\; x \vdots y$» заперечення має вигляд «$(\exists\, x \in N)(\forall\, y \in N)\; \overline{x \vdots y}$».

Означення 3.4 *Формулою* в логіці предикатів називається:

а) будь-яке висловлювання;

б) будь-який *n*-місний предикат;

в) якщо A і B – формули, то $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – також формули;

г) якщо A – формула і x – предметна змінна, то $(\forall x)\, A$ і $(\exists x)\, A$ - також формули, A називається областю дії квантора;

в) інших формул немає.

Зауваження. Область дії квантора може складати частину формули, яку можна виділити, наприклад за допомогою дужок. Наприклад, у формулі $(\exists y)(B(x) \vee (\forall x)\, A(x, y))$ областю дії квантора існування є $B(x) \vee (\forall x)\, A(x, y)$, а областю дії квантора загальності – підформула $A(x, y)$. Дамо уточнення поняття *зв'язаної* та *вільної* змінної. Змінна у формулі називається *вільною*, якщо хоча б одне її входження в цій формулі є вільним. В наведеній формулі змінна *y* вільна, змінна *x* теж є вільною, тому що її перше входження є вільним, хоча друге входження – зв'язане за допомогою квантора загальності.

Формули без вільних змінних називають *замкнутими*, в противному випадку – *відкритими*.

3.3 Види формул логіки предикатів

Означення 3.5 *Інтерпретацією* формули логіки предикатів називається результат її перетворення у висловлювання шляхом виконання наступних дій:

1) задання множини *M*, з якої предметні змінні будуть набувати значень;

2) заміна кожного предикатного символу конкретним предикатом, заданим на множині *M*; заміна кожного висловлювання (нуль-місного предикатного символу) одним з двох значень істинності;

3) заміна кожного вільного входження змінної конкретним елементом з множини *M* (у випадку відкритої формули).

Очевидно, для кожної формули логіки предикатів існує безліч інтерпретацій і кожна інтерпретація є замкнутою формулою. Нагадаємо, що просте висловлювання має два можливих значення, а складне висловлювання, побудоване з *n* простих висловлювань, має 2^n інтерпретацій (наборів значень цих простих висловлювань). В будь-якому разі, формула логіки висловлювань має скінченне число інтерпретацій.

Приклад 3.6 Нехай дано відкриту формулу $B(x) \vee (\forall x) A(x, y)$ логіки предикатів. Побудуємо її інтерпретацію:

1) візьмемо $M = \{0\}$;

2) замінимо *B(x)* предикатом $x = 1$, а $A(x,y)$ замінимо предикатом $x + y = 0$;

3) візьмемо $y = 0$ для вільної змінної *y*.

Побудована інтерпретація є істинним висловлюванням, оскільки висловлювання $(\forall x) A(x, y)$ є істинним.

Побудуємо іншу інтерпретацію цієї формули:

1) візьмемо $M = R$;

2) замінимо $B(x)$ предикатом $x = 1$, а $A(x,y)$ замінимо предикатом $x + y = 0$;

3) візьмемо $y = 0$ для вільної змінної *y*.

Побудована інтерпретація не є істинним висловлюванням, так як тепер висловлювання $(\forall x) A(x, y)$ є хибним і, наприклад, при *x*=2 предикат *B(x)* теж є хибним висловлюванням.

Приклад 3.7 $(\forall x) P(x) \to Q(x, y)$

Інтерпретація: *M* – множина дійсних чисел, $P(x)$:"$x \vdots 3$", $Q(x, y)$:"$x + y = 4$", *y*=1.

Зауваження Іноді говорять про інтерпретацію над конкретною наперед заданою множиною.

Означення 3.6 Формула логіки предикатів називається *виконуваною на заданій множині*, якщо існує її істинна інтерпретація на цій множині. *Формула логіки предикатів* називається *виконуваною,* якщо існує така множина *M* і така інтерпретація цієї формули на множині *M*, яка є істинним висловлюванням.

Наприклад, формула $B(x) \vee (\forall x) A(x, y)$ є виконуваною, оскільки вона є виконуваною на множині $M = \{0\}$, що випливає з прикладу 3.6.

Означення 3.7 Дві формули логіки предикатів називаються *рівносильними на множині M*, якщо всі їх інтерпретації на цій множині приймають однакові значення істинності. Дві формули логіки предикатів називаються *рівносильними*, якщо вони рівносильні на **будь-якій** непорожній множині.

Приклад 3.8 Формули $G=(\forall x)(B(x)\wedge A(x))$ і $F=(\forall x)B(x)\wedge(\forall x)A(x)$ рівносильні. Дійсно, нехай M – будь-яка непорожня множина, B^*, A^* - конкретні предикати на M. Тоді $G^*=(\forall x\in M)(B^*(x)\wedge A^*(x))$ і $F^*=(\forall x\in M)B^*(x)\wedge(\forall x\in M)A^*(x)$ є висловлюваннями. Якщо $G^*=1$, то для будь-якого $x_0\in M$ $B^*(x_0)\wedge A^*(x_0)=1$. За означенням кон'юнкції $B^*(x_0)=1\wedge A^*(x_0)=1$, а за означенням квантора загальності $(\forall x\in M)B^*(x)=1\wedge(\forall x\in M)A^*(x)=1$, отже $F^*=1$. Аналогічно, з $F^*=1$ випливає $G^*=1$.

Зауваження. Для доведення нерівносильності формул достатньо навести контрприклад, тобто знайти таку інтерпретацію, при якій ці формули набувають різних значень істинності. Розглянемо, наприклад, формули $G=(\exists x)(\forall y)A(x,y)$ і $H=(\forall y)(\exists x)A(x,y)$ та їх інтерпретації на множині $M=\{2,3\}$, на якій розглянемо двомісний предикат $A(x,y)$:"$y \vdots x$". Тоді $G^*=(\exists x\in M)(\forall y\in M)\,y \vdots x$, $G^*=0$, а $H^*=(\forall y\in M)(\exists x\in M)\,y \vdots x$, $H^*=1$. Значить, ці формули не рівносильні.

Означення 3.8 Формула логіки предикатів називається *загальнозначущою на множині M*, якщо **будь-яка** її інтерпретація на цій множині є істинним висловлюванням. Формула логіки предикатів називається *загальнозначущою*, якщо вона є загальнозначущою на **будь-якій** непорожній множині.

Приклади 3.9

1) будь-яка тавтологія логіки висловлювань є загальнозначущою формулою логіки предикатів;

2) формула з прикладу 3.6 не є загальнозначущою. Для **доведення** того, що формула не є загальнозначущою, достатньо побудувати одну її інтерпретацію, яка є хибним висловлюванням. Нагадаємо, що друга інтерпретація формули з прикладу 3.6 доводить, що ця формула не є загальнозначущою.

3) формула $(\forall x)B(x)\vee(\forall x)A(x)\Rightarrow(\forall x)(B(x)\vee A(x))$ є загальнозначущою. Дійсно, нехай M – будь-яка непорожня множина, B^*, A^* - конкретні предикати над M. Тоді потрібно дослідити на істинність висловлювання $(\forall x\in M)B^*(x)\vee(\forall x\in M)A^*(x)\Rightarrow(\forall x\in M)(B^*(x)\vee A^*(x))$. З означення імплікації випливає, що достатньо розглянути випадок $(\forall x\in M)B^*(x)\vee(\forall x\in M)A^*(x)=1$. Перейдемо до диз'юнкції $(\forall x\in M)B^*(x)=1\vee(\forall x\in M)A^*(x)=1$. За означенням квантора загальності для кожного $x_0\in M$ маємо $B^*(x_0)=1\vee A^*(x_0)=1$, звідки за означенням диз'юнкції $B^*(x_0)\vee A^*(x_0)=1$ і знову за означенням квантора загальності отримаємо $(\forall x\in M)(B^*(x)\vee A^*(x))=1$.

Зауважимо, що обернена імплікація, тобто формула

$$(\forall x)(B(x)\vee A(x))\Rightarrow(\forall x)B(x)\vee(\forall x)A(x)$$

не є загальнозначущою.

Сутність проблеми розв'язуваності в логіці предикатів – чи існує алгоритм, який дає можливість для будь-якої формули встановити, чи є вона загальнозначущою. В 30-х роках XX ст. американський математик Чьорч довів, що в загальному випадку такого алгоритму не існує. Але для певних класів формул алгоритми існують. Такими, наприклад, є:

- клас формул, які є виконуваними на деякій скінченній множині;
- клас формул типу $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)B(x_1,\ldots x_n)$;

- клас формул типу $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)B(x_1,\ldots x_n)$

та інші.

Означення 3.9 Формула B логіки предикатів (в частинному випадку, просто предикат) називається *логічним наслідком* з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (гіпотез), якщо на довільній непорожній множині M будь-яка інтерпретація над M є істинним висловлюванням при умові, що інтерпретації всіх $A_i, i = \overline{1, n}$ є істинними висловлюваннями.

Зауваження.

1) Іноді зручно говорити про те, що деяка формула є логічним наслідком гіпотез на конкретній заданій множині. При цьому на іншій множині цей факт може не мати місця.

2) Означення 3.9 рівносильне наступному означенню, яке іноді виявляється більш зручним.

Означення 3.10 Формула B логіки предикатів називається *логічним наслідком* з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, якщо формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ є загальнозначущою. Позначають $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B$ або $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$.

Приклад 3.10 Нехай множиною визначення наступних предикатів є множина дійсних чисел. Тоді

Предикат $|x| = 0$ є логічним наслідком предиката $3x^3 - 2x = 0$ (або з предиката $|x| = 0$ випливає предикат $3x^3 - 2x = 0$).

З предиката $|x| < 0$ випливає будь-який предикат.

З предиката $|x-1| = 0$ не випливає предикат $3x^3 - 2x = 0$.

Можна дати інше **означення** рівносильних формул: формули A та B логіки предикатів називаються рівносильними, якщо формула $A \Leftrightarrow B$ є загальнозначущою.

Приклад 3.11 Яка з формул $G = (\exists x)(\forall y)\, A(x, y)$ і $H = (\forall y)(\exists x) A(x, y)$ є логічним наслідком іншої?

Розглянемо інтерпретації G^* та H^* цих формул. Нехай X – множина учнів, У – множина задач, $A(x,y)$:"*учень х розв*"*язав задачу у*". Тоді задані формули мають відповідно наступні словесні вирази: «принаймні один учень розв'язав усі задачі», «кожну задачу розв'язав принаймні один учень». Достатньо розглянути $G^* = 1$.

$G^* = (\exists x \in X)(\forall y \in Y)A^*(x,y) = 1$, звідки, за означенням кванторів, для деякого $x_0 \in X$ і будь-якого $y_0 \in Y$ отримаємо $A^*(x_0, y_0) = 1$. Далі, за означенням квантора існування $(\exists x \in X)A^*(x, y_0) = 1$ для будь-якого $y_0 \in Y$. Отже, за означенням квантора загальності отримаємо $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)A^*(x,y) = 1$, тобто $H^* = 1$. Це означає, що H є логічним наслідком G.

Формула G не є логічним наслідком формули H. Дійсно, в зауваженні перед означенням 3.8 були побудовані інтерпретації цих формул на множині $M = \{2,3\}$. Оскільки $H^* = 1$ і $G^* = 0$, то імплікація $H \to G$ хибна.

Деякі загальнозначущі формули з кванторами.

Нижче приводяться деякі загальнозначимі формули, що містять квантори:

$$\overline{(\forall x)\, P(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\, \overline{P(x)}; \tag{3.1}$$

$$\overline{(\exists x)\, P(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\, \overline{P(x)}; \tag{3.2}$$

$$(\forall x)\, P(x) \Leftrightarrow \overline{(\exists x)\, \overline{P(x)}}; \tag{3.3}$$

$$(\exists x)\, P(x) \Leftrightarrow \overline{(\forall x)\, \overline{P(x)}}; \tag{3.4}$$

$$(\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)\,[P(x) \wedge Q(x)]; \tag{3.5}$$

$$(\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)\,[P(x) \vee Q(x)]; \tag{3.6}$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y); \tag{3.7}$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y); \tag{3.8}$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y); \tag{3.9}$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]; \tag{3.10}$$

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x); \tag{3.11}$$

$$(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]; \tag{3.12}$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y); \tag{3.13}$$

$$P(y) \Rightarrow (\exists x)P(x). \tag{3.14}$$

Зауважимо, що формули (3.1)-(3.12) не містять вільних предметних змінних, тобто виражають логічні функції предикатних змінних, причому, оскільки вони загальнозначущі, то при будь-яких значеннях цих змінних приймають тільки істинні значення.

Формули (3.13) і (3.14) виражають логічні функції предикатної змінної P та вільної предметної змінної y.

3.4 Аналіз міркувань в логіці предикатів

На початку розділу 3 було показано, що не всі міркування навіть шкільної математики можна проаналізувати в логіці висловлювань. Формалізація більшості таких міркувань неможлива без введення кванторів. Приклади символічного запису тверджень з використанням кванторів існування і загальності вже були наведені вище і в цьому параграфі вони знову з'являться. Зараз зупинимось на способах символічного запису тверджень, в яких зустрічаються вирази типу «принаймні один (або принаймні два, …, n)», «не більше ніж один (або не більше ніж два, …, n)», рівно один (або рівно два, …, n). Вони доволі часто зустрічаються. Ці вирази іноді називають *чисельними кванторами*. Покажемо, якими рівносильними виразами їх можна замінити і як буде виглядати символічний запис.

Чисельний квантор	**Рівносильний вираз**	**Символічний запис**
Принаймні один об'єкт має властивість *A*.	Існує об'єкт, що має властивість *A*	$(\exists x)\ A(x)$
Не більше, ніж один об'єкт має властивість *A*.	Якщо є два об'єкти, що мають властивість *A*, то вони співпадають	$(\forall x)\ (\forall y)(A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)$
Один і тільки один об'єкт має властивість *A*.	Існує об'єкт, що має властивість *A*. Якщо є два об'єкти, що мають властивість *A*, то вони співпадають	$(\exists x)\ A(x) \wedge$ $\wedge (\forall x)\ (\forall y)(A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)$
Принаймні два об'єкти мають властивість *A*.	Існують неспівпадаючі об'єкти, що мають властивість *A*.	$(\exists x)\ (\exists y)(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$
Не більше, ніж два об'єкти мають властивість *A*.	Які б не були три об'єкти, якщо вони всі мають властивість А, то принаймні два з них співпадають.	$(\forall x)\ (\forall y)(\forall z)(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$
Два і тільки два об'єкти мають властивість *A*.	Існують неспівпадаючі об'єкти, що мають властивість *A*. Які б не були три об'єкти, якщо вони всі мають	$(\exists x)\ (\exists y)(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y) \wedge$ $\wedge (\forall x)\ (\forall y)(\forall z)(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$

	властивість A, то принаймні два з них співпадають.	

Переходимо до аналізу міркувань в логіці предикатів. Розглянемо міркування: «Будь-який квадрат є прямокутником. Відомо, що $ABCD$ є квадратом. Значить, $ABCD$ – прямокутник».

Введемо одномісні предикати $K(x)$ – «x є квадратом» і $P(x)$ – «x є прямокутником». Тоді перша посилка запишеться у вигляді $(\forall x)\ (K(x) \Rightarrow P(x))$ і вона є істинним висловлюванням. Перша посилка при $x = ABCD$ має вигляд $K(ABCD) \Rightarrow P(ABCD)$.

Другою посилкою є $K(ABCD)$, а висновком є $P(ABCD)$. За правилом modus ponens з посилок $K(ABCD) \Rightarrow P(ABCD)$ і $K(ABCD)$ випливає висновок $P(ABCD)$. Таким чином, ми змогли в рамках логіки предикатів проаналізувати наведене міркування і показати, що воно є правильним.

Будь-яке міркування з посилками $(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, $A(c)$ і висновком $B(c)$ є правильним, що можна виразити у вигляді наступного правила виводу:

$$\frac{(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow B(x)), A(c)}{B(c)}.$$

Але, щоб застосовувати це правило, треба мати на увазі, що з формули $(\forall x)\ A(x)$ логіки предикатів випливає формула $A(c)$ логіки висловлювань, де c – елемент з області визначення предиката $A(x)$. Тому маємо правило

$$\frac{(\forall x)\ A(x)}{A(c)},$$

яке називають *правилом зняття квантора загальності* .

Іноді елемент c не обов’язково окремо взятий елемент з області визначення предиката, а будь-який елемент y з певними властивостями. Тоді попереднє правило виводу набуває вигляду

$$\frac{(\forall x)\ A(x)}{A(y)}$$

і обґрунтовується тим, що формула $(\forall x)\,A(x) \to A(y)$ є загальнозначущою, що було показано вище. Це правило застосовується, наприклад, для аналізу міркування: «кожне просте число має лише два дільники. Число *у* має лише два дільники. Значить число *у* є простим».

Правило *зняття квантора існування*

$$\frac{(\exists x)\ A(x)}{A(c)}.$$

Правило *введення квантора загальності*

$$\frac{A(c)\ \text{для довільного}\ \ c \in M}{(\forall x)\ A(x)}.$$

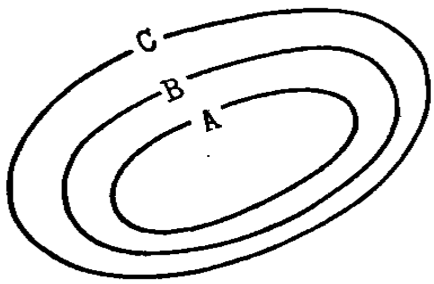
Правило *введення квантора існування*

$$\frac{A(c)\ \text{для деякого}\ \ c \in M}{(\exists x)\ A(x)}$$

Розглянемо кілька правил виводу в логіці предикатів, які називають *правилами силогізмів*:

а) $\dfrac{(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow B(x)), (\forall x)(\ B(x) \Rightarrow C(x))}{(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow C(x))}.$

Правильність такого міркування можна проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера наступним чином



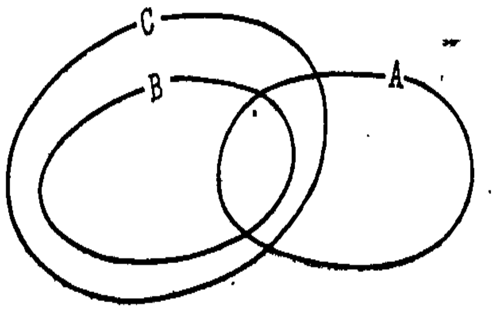
Приклад міркування за цією схемою: «Кожне ціле число є раціональним. Кожне раціональне число є дійсним. Отже, кожне ціле число є дійсним» (*A, B, C* – множини відповідно цілих, раціональних, дійсних чисел).

б) $\dfrac{(\forall x)\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right), (\forall x)\left(B(x) \Rightarrow \overline{C}(x)\right)}{(\forall x)\ \left(A(x) \Rightarrow \overline{C}(x)\right)}$.

Це правило зводиться до попереднього заміною $\overline{C}$ на С.

Приклад міркування за цією схемою: «Будь-яке раціональне число (*A*) є дійсним (*B*). Жодне дійсне число не є уявним (*C*). Отже, жодне раціональне число не є уявним».

в) $\dfrac{(\forall x)\ \left(B(x) \Rightarrow C(x)\right), (\exists x)\ \left(A(x) \wedge B(x)\right)}{(\exists x)\ \left(A(x) \wedge C(x)\right)}$



Приклад міркування за цією схемою: «Будь-яке ціле число (*B*) є раціональним (*C*). Деякі дійсні числа (*A*) є цілими. Отже, деякі дійсні числа є раціональними».

3.5 Поняття про числення предикатів

Формальна аксіоматична теорія логіки предикатів називаєтся численням предикатів. В ній вивідними формулами є загальнозначущі формули. Доведення загальнозначущості формул і є завданням числення предикатів.

Схеми аксіом числення предикатів:

$A_1: A \to (B \to A)$;

$A_2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

$A_3: (\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;

A_4: $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow A(y)$;

A_5: $A(y) \Rightarrow (\exists x)\ A(x)$.

Зауваження. Перші три аксіоми мають такий самий вигляд як і у численні висловлювань, але в них A,B,C –формули логіки предикатів. В аксіомах A_4 і A_5 $A(x)$ – формула логіки предикатів із вільною змінною *x*, яка не знаходиться під дією квантора по *y*, $A(y)$ отримана з $A(x)$ підстановкою *y* замість всіх вільних входжень *x*. Наприклад, формула $A(x) = (\forall y)F(x, y)$ не припустима, оскільки *x* знаходиться під дією квантора по *y*.

Правила виводу в численні предикатів:

1) modus ponens;

2) правило зв'язування квантором загальності: якщо $B \to A(x)$, то $B \to (\forall x)A(x)$ при умові, що *B* не містить змінну *x*;

3) правило зв'язування квантором існування: якщо $A(x) \to B$, то $(\exists x)A(x) \to B$ при умові, що *B* не містить змінну *x*;

4) правило перейменування зв'язаної змінної:

$(\exists x)A(x) = (\exists y)A(y)$,

$(\forall x)A(x) = (\forall y)A(y)$.

Означення 3.11 *Виводом* в численні предикатів називається скінченна послідовність формул, кожна з яких є або аксіомою, або отримана з попередніх по одному з правил виводу. Формула числення предикатів називається вивідною, якщо існує вивід, в якому вона є останньою.

Теорема. Кожна вивідна в численні предикатів формула є загальнозначущою.

Теорема Геделя (про повноту) Будь-яка загальнозначуща формула логіки предикатів є вивідною в численні предикатів.

Гедель довів існування таких несуперечливих аксіоматичних теорій, в яких існує принаймні одна формула, що ні вона сама, ні її заперечення не є вивідними (**теорема Геделя про неповноту**).

Питання для самоконтролю

1. *Означення предиката. Тотожно істинні та тотожно хибні предикати.*
2. *Навести два приклади двомісного предиката – з квантором і без.*
3. *Як з n-містного предиката без кванторів отримати (n-1)-містний предикат? Вказати два варіанти.*
4. *Як з n-містного предиката з кванторами отримати (n-1)-містний предикат? Вказати два варіанти.*
5. *Чи може область істинності предиката бути порожньою множиною?*
6. *Як знайти область істинності предиката, який є диз'юнкцією двох предикатів? кон'юнкцією двох предикатів?*
7. *Як знаходиться заперечення предикату з кванторами?*
8. *Назвіть типи формул в логіці предикатів.*
9. *Яка формула називається виконуваною на заданій множині?*
10. *В чому полягає сутність проблеми розв'язуваності в логіці предикатів?*

Приклади розв’язування задач до теми 3

Задача 1. Знайти значення істинності висловлювання $(\exists x)(\forall y)(x \le y)$, якщо предикат $x \le y$ задано 1) на множині N, 2) на множині Z.

Розв’язання. 1) істинне, *x=1*. 2) хибне.

Задача 2. Записати за допомогою кванторів висловлювання: «Не існує найбільшого дійсного числа», «Добуток двох чисел дорівнює 0 тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює 0».

Розв'язання. Перше висловлювання: $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\, y > x$. Друге висловлювання: $(\forall x, y \in R)(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Задача 3. Записати символічно твердження «для будь-яких двох натуральних чисел існує не більше одного натурального числа, що дорівнює їх сумі».

Розв’язання. Введемо тримісний предикат $S(x, y, z): x + y = z$. Тоді запис твердження має вигляд

$$(\forall x, y, z, t \in N)\big(S(x, y, z) \wedge S(x, y, t) \Rightarrow z = t\big),$$

або

$$(\forall x, y, z, t \in N)(x + y = z \wedge x + y = t \Rightarrow z = t).$$

Задача 4. Знайти область істинності предикатів:

1) $P(x):"27 \vdots x"$;

2) $P(x, y):"\ y = \sqrt{x}"$, заданих на множині N.

Розв'язання. 1) $I(P(x)) = \{1,3,9,27\}$, 2) $I(P(x, y)) = \{(x, y) \in N^2 : y = \sqrt{x}\}$, тобто область істинності предиката $P(x, y)$ є множина всіх точок графіка функції $y = \sqrt{x}$, обидві координати яких є натуральними числами.

Задача 5. У наступних формулах підкреслити зв’язані входження змінної *x*:

1) $(\forall x)\, P(x, y)$,

2) $(\forall x)\, P(x,y) \Rightarrow (\exists y)\, Q(x,y)$,

3) $(\forall x)\left(P(x,y) \Rightarrow (\exists y)\, Q(x,y)\right)$.

Розв'язання. 1) $(\forall \underline{x})\, P(\underline{x}, y)$,

2) $(\forall \underline{x})\, P(\underline{x}, y) \Rightarrow (\exists y)\, Q(x,y)$,

3) $(\forall \underline{x})\left(P(\underline{x}, y) \Rightarrow (\exists y)\, Q(\underline{x}, y)\right)$.

Задача 6. Звести до нормальної форми формулу $(\forall x)\,\overline{(\exists y)P(x) \Rightarrow Q(y)}$.

Розв'язання. $(\forall x)\,\overline{(\exists y)P(x) \Rightarrow Q(y)} = (\forall x)(\forall y)\overline{P(x) \Rightarrow Q(y)} = (\forall x)(\forall y)\left(P(x) \wedge \overline{Q(y)}\right)$

Задача 7. Довести загальнозначущість формули
$(\exists x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \left((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, Q(x)\right)$.

Розв'язання.

$$(\exists x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \left((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, Q(x)\right) = \overline{(\exists x)\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)} \vee \left(\overline{(\forall x)\, P(x)} \vee (\exists x)\, Q(x)\right) =$$
$$= (\forall x)\,\overline{\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)} \vee \left(\overline{(\forall x)\, P(x)} \vee (\exists x)\, Q(x)\right) = (\forall x)\left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\overline{(\forall x)\, P(x)} \vee (\exists x)\, Q(x)\right) =$$
$$= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)\overline{Q(x)} \vee \left(\overline{(\forall x)\, P(x)} \vee (\exists x)\, Q(x)\right) = \left((\forall x)P(x) \vee \overline{(\forall x)\, P(x)}\right) \wedge \left((\forall x)\overline{Q(x)} \vee \overline{(\forall x)\, P(x)}\right) \vee (\exists x)\, Q(x) =$$
$$= 1 \wedge \left((\forall x)\overline{Q(x)} \vee \overline{(\forall x)\, P(x)}\right) \vee (\exists x)\, Q(x) = \overline{(\exists x)Q(x)} \vee (\exists x)\, Q(x) \vee \overline{(\forall x)\, P(x)} = 1 \vee \vee \overline{(\forall x)\, P(x)} = 1.$$

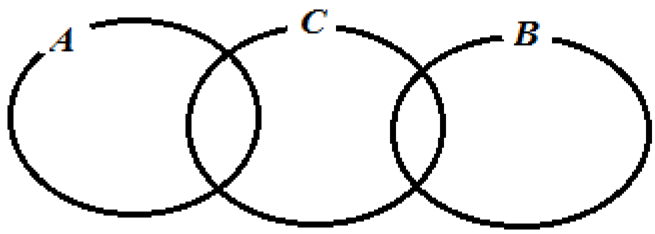
Задача 8. Довести, що формула $(\exists x)\left(P(x) \vee Q(x)\right) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)$ є загальнозначущою.

Розв'язання.

$$(\exists x)\left(P(x) \vee Q(x)\right) \Rightarrow \left((\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)\right) = \overline{(\exists x)\left(P(x) \vee Q(x)\right)} \vee \left((\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)\right) =$$
$$= (\forall x)\,\overline{\left(P(x) \vee Q(x)\right)} \vee (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) = (\forall x)\left(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) =$$
$$= (\forall x)\overline{P(x)} \wedge (\forall x)\overline{Q(x)} \vee (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) = \overline{(\exists x)\, P(x)} \wedge \overline{(\exists x)\, Q(x)} \vee (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) =$$
$$= \left(\overline{(\exists x)\, P(x)} \vee (\exists x)\, P(x)\right) \wedge \left(\overline{(\exists x)\, Q(x)} \vee (\exists x)\, P(x)\right) \vee (\exists x)\, Q(x) = \left(\overline{(\exists x)\, Q(x)} \vee (\exists x)\, P(x)\right) \vee (\exists x)\, Q(x) = 1.$$

Задача 9. Довести правильність міркування, побудувавши вивід, та проілюструвати за допомогою діаграм Венна: «Жодне дійсне число не є уявним. Деякі комплексні числа є дійсними. Отже, деякі комплексні числа не є уявними».

Розв'язання. Введемо позначення: A – множина дійсних чисел, B – множина уявних чисел, C – множина комплексних чисел. Діаграма Венна має вигляд



Напишемо міркування символічно. Для цього введемо предикати $A(x)$: x – дійсне число, $B(x)$: x – уявне число, $C(x)$: x – комплексне число. Тоді посилки міркування запишуться формулами $(\forall x)\left(A(x) \Rightarrow \overline{B}(x)\right)$ - перша посилка, $(\exists x)(C(x) \wedge A(x))$ – друга посилка. Висновок має вигляд $(\exists x)\left(C(x) \wedge \overline{B}(x)\right)$.

Побудуємо вивід висновку з даних посилок:

1) $(\exists x)(C(x) \wedge A(x))$ – посилка,

2) $C(y) \wedge A(y)$ для деякого y – правило зняття квантора існування,

3) $(\forall x)\left(A(x) \Rightarrow \overline{B}(x)\right)$ - посилка,

4) $A(y) \Rightarrow \overline{B}(y)$ - правило зняття квантора загальності,

5) $A(y)$ - правило видалення кон'юнкції,

6) $\overline{B}(y)$ - МП для 4) і 5),

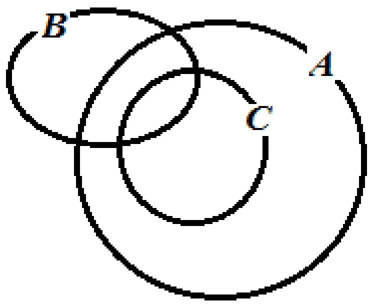
7) $C(y)$ - правило видалення кон'юнкції,

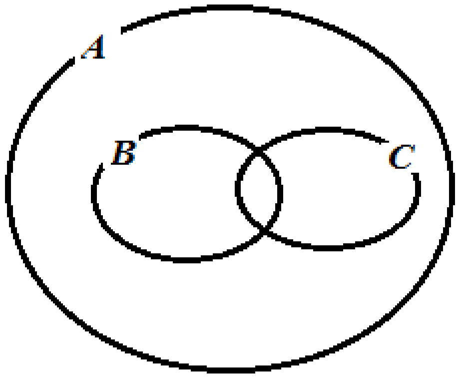
8) $C(y) \wedge \overline{B}(y)$ - правило введення кон'юнкції,

9) $(\exists x)\left(C(x) \wedge \overline{B}(x)\right)$ - правило введення квантора існування.

Задача 10. Довести неправильність міркування за допомогою діаграм Венна: «Всі цілі числа є раціональними. Деякі дроби не є цілими. Отже, деякі дроби не є раціональними».

Розв’язання. Введемо позначення: *A* – множина раціональних чисел, *B* – множина дробів, *C* – множина цілих чисел. Можливі два варіанта для діаграми Венна





Отже, міркування невірне.

Задачі для практичних занять та самостійної роботи до теми 3

Задача 1.

А) Предикат $P(x,y,z):''\,x+y+2z=4''$ задано на множині N. Знайти його область істинності. Отримати з нього двомісний предикат з непорожньою областю істинності. Побудувати заперечення отриманого предиката.

Б) Предикат $P(x):''\,x\,\vdots\,3''$ задано на множині Z. Побудувати з нього висловлювання двома способами та побудувати заперечення цих висловлювань.

В) З даних предикатів $P(x):''\,x\,\vdots\,3''$ і $Q(x):''\,x<3''$ отримати складні предикати та знайти їх області істинності.

Задача 2. Знайдіть множину істинності таких предикатів:

а) x ділиться на 3, $M_x=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

б) x ділиться на 3, $M_x=\{3;6;9;12\}$;

в) x ділиться на 3, $M_x=\{2;5;7\}$;

г) $y^2+3y+2=0$, $M_y=R$;

д) $y^2+1\geq 0$, $M_y=R$;

е) $\sin y>2$, $M_y=R$;

є) $x^2+y^2=0$, $M_x=M_y=R$;

ж) $x^2+y^2<0$, $M_x=M_y=R$;

з) $x<y$, $M_x=\{1;2;3;4\}$, $M_y=\{3;4;5\}$;

і) y_1 ділить y_2, $M_1=M_2=\{2;3;4;6\}$.

Задача 3. Зобразити на координатній площині множини істинності таких предикатів (змінні приймають значення з множини R): а) $x=y$; б) $x=2y$; в) $x^2+y^2=1$; г) $y=|x|$; д) $y\geq x^2$; е) $y=\frac{1}{x}$; є) $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$.

Задача 4. Задати множину значень змінних так, щоб предикати мали одну і ту ж множину істинності: а) «x ділиться на 2», «x ділиться на 3»; б) $x^2+5x+6=0$, $x=-2$; в) $y=x,\sqrt{y}=\sqrt{x}$; г) $y=x,|y|=|x|$; д) «x – ромб», «діагоналі в x взаємно перпендикулярні».

Задача 5. Задати множину значень змінної так, щоб на цій множині задані предикати були рівносильними: а) «x ділиться на 3», «x ділиться на 5»; б) «y – парне число», «y – просте число»; в) $x^3-1=0$, $x^2+2x-3=0$; г) «z – ромб», «діагоналі в z взаємно перпендикулярні».

Задача 6. Визначити, чи будуть рівносильними на множині M такі предикати: а) $\overline{x=2}, x\neq 2$, $M=R$; б) $\overline{x\geq 2}, x\leq 2$, $M=R$; в) $\overline{f-\textit{парна функція}}, f-\textit{непарна функція}$, M – множина всіх можливих числових функцій числового аргументу; г) $\overline{|x|<1}, x^2-1\geq 0$, $M=R$; д) $\overline{x^2+y^2\geq 0}, \sin x=2$, $M=R$.

Задача 7. Знайти таку множину M, щоб на ній виконувались рівносильності: а) $\overline{x\vdots 2}\Leftrightarrow x\vdots 3$; б) $x\parallel y\Leftrightarrow x\perp y$.

Задача 8. Зобразити на координатній площині множини істинності предикатів, що задані на множині R:

а) $\begin{cases}x+y=3,\\ x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2\leq 4,\\ x^2+y^2>1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x>0,\\ x+y>0.\end{cases}$

Задача 9. Замінити предикати рівносильними їм диз'юнкціями:

а) $|x+3|>3$; б) $x^2+y^2\neq 0$.

Задача 10. Зобразити на координатній прямій множини істинності предикатів, що задані на R: а) $(x<5)\Rightarrow(x>1)$; б) $(x>5)\Rightarrow(x>1)$; в) $(x>1)\Rightarrow(x<5)$.

Задача 11. Довести, що на множині R з нерівності $\frac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0$ випливає, що $\sin x$ та $\cos x$ мають різні знаки.

Задача 12. Зв'язати змінну предикатом так, щоб вийшло істинне висловлювання: а) «$4x+5$ - просте число»; б) $\cos y\neq 2$; в) «У чотирикутнику *z* всі кути прямі»; г) «Просте число *p* – натуральне»; д) «Просте число *p* – парне »; е) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; є) $|x|=-|x|$; ж) $\lg x^2=2\lg x$; з) $x/x=1$.

Задача 13. Записати речення за допомогою символів, додавши вказівку про множину значень змінної в запис квантора: а) «Рівняння $f(x)=g(x)$ має додатний корінь», б) «Існує раціональне число, квадрат якого дорівнює *a*», в) «Будь-яке натуральне число або парне, або непарне», г) «Будь-яке раціональне число можна представити у вигляді дробу p/q, де p – ціле число, а q – натуральне», д) «Деякі натуральні числа кратні 7».

Задача 14. Висловлювання з задачі 12 записати за допомогою символів в іншій формі, використовуючи імплікацію або кон'юнкцію.

Задача 15. Сформулювати висловлювання та записати їх у вигляді кон'юнкцій або диз'юнкцій: а) «Кожний доданок суми *a*+*b*+*c* парний», б) «існує натуральний корінь рівняння $2x=p$, що не перевищує 4», в) «Серед чисел, більших 1758 та менших 1963, знайдеться просте», г) «Множині *M* належать всі літери слова «цирк».

Задача 16. Предикати задано на множині дійсних чисел. Задати значення вільних змінних так, щоб отримати істинні висловлювання: а) $(\forall x)(xy=x)$, б) $(\forall y)(x+y=y)$, в) $(\exists x)(xy=0)$, г) $(\exists x)(xy=1)$, д) $(\forall x)(\exists y)(xy=z)$.

Задача 17. Побудуйте два висловлювання виду $(\forall x)(\exists y)\,\Phi(x, y)$ та $(\exists y)\,(\forall x)\Phi(x, y)$ так, щоб: а) обидва були істинними; б) обидва були хибними; в) перше було хибним, а друге – істинним.

Задача 18. Запишіть речення в формі, яка не містить чисельників: а) «Рівняння $ax = b$ має хоча б один корінь», б) «Рівняння $ax = b$ має не більш ніж один корінь», а) «Рівняння $ax = b$ має один і тільки один корінь».

Задача 19. Заповніть пропуски чисельними кванторами так, щоб вийшли істинні висловлювання: а) «Кожній прямій належать … дві різні точки»; б) «Кожна площина містить … три точки, що не належать одній прямій»; в) «Через кожні три точки, що не належать одній прямій, проходить … площина»; г) «Дві площини, які мають спільну точку, мають … спільну пряму, що проходить через цю точку»; д) «Дві різні прямі перетинаються в … точці»; е) «Через дві данні прямі, що перетинаються, проходить … площина»; є) «Просте число має … різних дільників».

Задача 20. Серед даних формул вкажіть ті, які при будь-якій інтерпретації істинні; хибні:

а) $P(x) \wedge \overline{P}(x)$; б) $Q(x) \vee \overline{Q}(x)$; в) $(P(x) \wedge \overline{P}(x)) \to Q(x)$;

г) $P(x) \to (Q(x) \vee \overline{Q}(x))$; д) $(\exists x \forall y P(x, y)) \to \forall y \exists x P(x, y)$;

е) $(\forall x \forall y P(x, y)) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$; є) $(\exists x \exists y P(x, y)) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$;

ж) $(P(x) \vee \overline{P}(x)) \to (Q(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

Задача 21. Довести, що формули є загальнозначущими:

а) $P(y) \to \exists x P(x)$; б) $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$.

Задача 22. Побудувати виводи формул:

а) $\forall u\ A(u) \Rightarrow \forall u\ A(u)$

б) $\exists u\ A(u) \Rightarrow \exists u\ A(u)$

в) $\forall u\ A(u) \Rightarrow \exists u\ A(u)$

(Вказівка: вивести тавтологію логіки висловлювань $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ та в ній зробити заміни так, щоб перша та друга імплікації стали аксіомами A_4 і A_5 відповідно)

Задача 23. Перетворити так, щоб всі квантори стояли перед предикатом:

а) $(\exists x)(\forall y)\,A(x,y) \vee \overline{(\forall x)(\exists y)Q(x,y)}$, б) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)\big(Q(x) \Rightarrow \overline{(\forall z)R(y,z)}\big)\big)$.

Задача 24. Довести правильність міркувань, побудувавши виводи. Проілюструвати за допомогою діаграм Венна:

а) «усі квадрати – ромби. Деякі прямокутники не є ромбами. Отже, деякі прямокутники не є квадратами»;

б) «усі квадрати- правильні многокутники. Жоден різносторонній прямокутник не є правильним многокутником. Отже, жоден різносторонній прямокутник не є квадратом»;

в) «жодне уявне число не є дійсним. Всі раціональні числа дійсні. Отже, жодне раціональне число не є уявним».

Задача 25. Довести неправильність міркувань за допомогою діаграм Венна:

а) «всі ромби є паралелограмами. Всі прямокутники є паралелограмами. Отже, всі прямокутники є ромбами»;

б) жодна трапеція не є правильним многокутником. Жоден трикутник не є трапецією. Отже, жоден трикутник не є правильним.

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Булеву функцію задано набором значень. Записати її ДДНФ і ДКНФ. Знайти двома способами її поліном Жегалкіна.

1) (11010000),

2) (00001110),

3) (10101011),

4) (01111000),

5) (10000101),

6) (01000101).

7) (11011000),

8) (01001110),

9) (00101011),

10) (01011000).

Завдання 2. Визначити булеву функцію, яку реалізує дана формула (складіть таблицю). Знайти її порядковий номер.

1) $f = ((x_1 x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$,

2) $f = (x_1 x_2) \vee (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)$,

3) $f = ((x\bar{y}) \rightarrow (\bar{x} \vee xy))x$,

4) $f = (xy\bar{y}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow x \vee y)$,

5) $f = (x \vee y) \rightarrow (\bar{x}y \vee y)$,

6) $f = (x \rightarrow x \vee y)(\bar{y} \rightarrow \bar{x} \vee \bar{y})$,

7) $f = xy \rightarrow (\bar{y} \vee \bar{x}y)$,

8) $f = x \rightarrow y \rightarrow (y \vee \bar{x}y)$,

9) $f = x \vee \bar{y} \rightarrow (\bar{y} \vee \bar{x}y)$,

10) $f = y \rightarrow x(\bar{y} \vee \bar{x}y)$.

Завдання 3. Побудувати ДДНФ та ДКНФ за допомогою логічних законів та зробити перевірку за допомогою таблиць

1) $x \vee y \wedge \bar{z} \oplus y$,

2) $(x \oplus y) \wedge z \vee \bar{x}$,

3) $(x \to \bar{y}) \oplus (z \vee y)$,

4) $(x \vee y) \oplus (z \to y)$,

5) $x \wedge y \oplus (z \to \bar{x})$,

6) $\overline{x \to y} \wedge (x \vee \bar{z} \oplus y)$,

7) $f = xy \to (\bar{y} \oplus \bar{x}y)$

8) $f = x \to y \to (y \oplus \bar{x}y)$

9) $f = x \vee \bar{y} \to (\bar{y} \oplus \bar{x}y)$

10) $f = y \to x(\bar{y} \oplus \bar{x}y)$

Завдання 4. Дано дві булеві функції. Дослідити, чи будуть вони рівносильними. Знайти істотні та фіктивні змінні першої функції:

1) $f = (\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow (\bar{x} \wedge y \Leftrightarrow (x \oplus y)),\quad g = (\overline{x \wedge y} \Rightarrow x) \Rightarrow y$;

2) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge z) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \vee z) \Rightarrow \bar{x})),\quad g = (x \Rightarrow y) \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow \bar{x})$;

3) $f = (x \oplus y \wedge z) \Rightarrow (\bar{x} \Rightarrow (y \Rightarrow z)),\quad g = x \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow x)$;

4) $f = x \vee (y \Leftrightarrow z),\quad g = (x \vee y) \Leftrightarrow (x \vee z)$;

5) $f = x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z),\quad g = (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)$;

6) $f = x \wedge (y \Leftrightarrow z),\quad g = ((x \wedge y) \Leftrightarrow (x \wedge z)) \Leftrightarrow x$;

7) $f = x \vee (y \Rightarrow z),\quad g = (x \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$;

8) $f = x \wedge (y \Rightarrow z),\quad g = (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \wedge z)$;

9) $f = x \Rightarrow (y \vee z),\quad g = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$;

10) $f = x \Rightarrow (y \wedge z),\quad g = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Завдання 5. Перевірити задану систему булевих функцій на повноту:

1) $\Sigma = \{xy,\, x \vee y,\, x \oplus y,\, xy \vee yz \vee zx\}$;

2) $\Sigma = \{\bar{x},\, x(y \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow yz,\, x \oplus y \oplus z\}$;

3) $\Sigma = \{xy,\, x \vee y,\, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

4) $\Sigma = \{x \oplus y \oplus z,\, x \vee y, 0, 1\}$;

5) $\Sigma = \{1, \bar{x}, x(y \Leftrightarrow z) \oplus \bar{x}(y \oplus z),\, x \Leftrightarrow y\}$;

6) $\Sigma = \{0, x \Rightarrow y, x \oplus y,\, xy \Leftrightarrow xz\}$;

7) $\Sigma = \{0,\, \bar{x},\, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

8) $\Sigma = \{xy \vee \bar{x}z,\, \bar{x},\, x \Rightarrow y,\, 0,\, x \oplus yz\}$;

9) $\Sigma = \{xy \oplus z,\, x \oplus y \oplus 1,\, x\bar{y},\, \bar{x}\}$;

10) $\Sigma = \{\bar{x},\, x(y \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow (y \vee z),\, x \oplus y \oplus z\}$.

Завдання 6. Довести, що друга формула є логічним наслідком першої формули. Знайти всі логічні наслідки з першої формули:

1) $\neg(A \vee B)$; $\neg(A \wedge B)$.

2) A; $B \to A$.

3) $(A \to B)(B \to C)$; $A \to C$.

4) $A \to B$; $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$.

5) $A \to C$; $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$.

6) A; $\neg\neg A$.

7) $\neg A$; $A \to B$.

8) $(A \to B)A$; B.

9) $(A \to B)\bar{B}$; $\bar{A}$.

10) $(\bar{A} \to B)(\bar{C} \vee \bar{B})C$; A.

Завдання 7. Записати міркування формулою та з'ясувати його правильність:

1) Якщо десятковий запис числа *X* закінчується двома нулями, то воно ділиться на 4. Число *X* ділиться на 4. Значить, його десятковий запис закінчується двома нулями.

2) Якщо курс цінних паперів зростає або відсоткова ставка знижується, то або падає курс акцій, або податки не підвищуються. Курс акцій знижується тоді і тільки тоді, коли зростає курс цінних паперів та зростають податки. Якщо відсоткова ставка знижується, то або курс акцій не знижується, або курс цінних паперів не зростає. Отже, або підвищуються податки, або курс акцій знижується та знижується відсоткова ставка.

3) Якщо не було дощів або були заморозки, то врожай поганий. Відомо, що врожай добрий, а заморозків не було. Отже, були дощі.

4) Відомо, що або податки зменшуються та ціни зростають, або рівень безробіття залишається постійним. Якщо податки зменшуються, то інфляція зростає. Інфляція не зростає. Отже, рівень безробіття залишається постійним.

5) Якщо ліс дешевий або транспорт в дефіциті, то або зростають вирубки, або зменшуються посадки. Якщо збільшуються вирубки та зменшують посадки, то транспорт в дефіциті. Відомо, що ліс дешевий і транспорт не в дефициті. Отже, вирубки збільшуються тоді і тільки тоді, коли посадки не зменшуються.

6) Число або ділиться і на 2 і на 3 або закінчується на 0. Якщо число закінчується на 0, то воно ділиться на 5. Якщо число ділиться на 5, то воно не ділиться на 3. Відомо, що число ділиться на 3. Значить, воно ділиться на 2.

7) Число має або властивості *A* і *B* одночасно, або властивість *C*. Якщо число має властивість *C*, то воно має і властивість *D*. Якщо виконується властивість *D*, то властивість *B* не виконується. Відомо, що властивість *B* виконується. Тоді виконується і властивість *A*.

8) Число має властивість *C*, а також властивість *A* або властивість *B*. З виконання властивості *C* випливає виконання властивості *D*. Властивості *D* і *B*. не виконуються одночасно. Отже, число має властивість *A*.

9) Якщо натуральне число парне, то воно або просте, або складене. Дане парне натуральне число є складеним. Значить, воно не просте.

10) Якщо натуральне число має тільки два дільники, то воно є простим. Дане число має більше двох дільників. Отже, воно не є простим.

Завдання 8. Перевірити, чи є схема міркування правильною. У разі позитивної відповіді знайти приклад міркування за такою схемою.

1) $\dfrac{A \Rightarrow B}{A \wedge \overline{B} \Rightarrow \left(C \wedge \overline{C}\right)}$;

2) $\dfrac{A \Rightarrow B}{A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$;

3) $\dfrac{A \Rightarrow B}{\overline{A \Rightarrow B} \Rightarrow \left(C \wedge \overline{C}\right)}$;

4) $\dfrac{A \Rightarrow B, A \Rightarrow C}{A \Rightarrow BC}$;

5) $\dfrac{AB \Rightarrow C}{A\overline{C} \Rightarrow \overline{B}}$;

6) $\dfrac{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, \overline{B}\overline{D}}{\overline{A}\overline{C}}$;

7) $\dfrac{(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)}{(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q}$;

8) $\dfrac{(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q}{(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)}$;

9) $\dfrac{A\overline{C} \Rightarrow \overline{B}}{AB \Rightarrow C}$;

10) $\dfrac{A \Rightarrow BC}{A \Rightarrow C}$.

Завдання 9. На множині дійсних чисел задано два предикати. З'ясувати, чи є один з них наслідком іншого.

1) $|x| < 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$;

2) $x^4 = 16$, $x^2 = -2$;

3) $x-1>0, \quad (x-2)(x-5)=0$;

4) $\sin x = 3, \quad x^2+5=0$;

5) $x^2+5x-6>0, \quad x+1=1+x$;

6) $x^2 \le 0, \quad x=\sin\pi$;

7) $-5<x, \quad x<5$;

8) $\lg x \le 1, \quad 1 \le x \le 10$;

9) $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2 \le 1$;

10) $x^2<y, \quad y \ge 0$.

Завдання 10. Запишіть словами задане висловлювання та знайдіть його значення істинності. Всі змінні набувають дійсних значень.

1) $(\forall x)(\exists y)\ (x+y=7)$;

2) $(\forall y)(\exists x)\ (x+y=7)$;

3) $(\exists x)(\forall y)\ (x+y=7)$;

4) $(\forall x)(\forall y)\ (x+y=7)$;

5) $((\forall x)(\forall y)\ (x+y=3)) \to (3=4)$;

6) $(\forall x)\ ((x^2>x) \leftrightarrow ((x>1)\vee(x<0)))$;

7) $(\forall a\ )(((\exists x)(ax=6)) \leftrightarrow (a \ne 0))$;

8) $(\forall b)(\exists a)((\forall x)(x^2+ax+b>0))$;

9) $(\forall x)(((x>1)\vee(x<2)) \leftrightarrow (x=x))$;

10) $(\exists b)(\forall a)\ ((\exists x)(x^2+ax+b=0))$.

Завдання 11. На множині дійсних чисел (для 1-5 варіантів), цілих чисел (для 6-10 варіантів) побудувати предикати:

1) $R(x,y,z)$ і $(\forall y\ )R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно істинним;

2) $Q(x,y,z)$ і $(\forall y)Q(x,y,z)$ так, щоб перший був виконуваним, а другий тотожно хибним;

3) $R(x,y,z)$ і $(\exists y)R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно хибним;

4) $S(x,y,z)$ і $(\exists y)S(x,y,z)$ так, щоб перший був виконуваним, а другий тотожно-істинним;

5) $R(x,y,z)$ і $(\forall x)(\forall y)R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно істинним;

6) $R(x,y,z)$ і $(\forall y)R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно істинним;

7) $Q(x,y,z)$ і $(\forall y)Q(x,y,z)$ так, щоб перший був виконуваним, а другий тотожно хибним;

8) $R(x,y,z)$ і $(\exists y)R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно хибним;

9) $S(x,y,z)$ і $(\exists y)S(x,y,z)$ так, щоб перший був виконуваним, а другий тотожно-істинним;

10) $R(x,y,z)$ і $(\forall x)(\forall y)R(x,y,z)$ так, щоб другий був тотожно істинним.

Завдання 12. Знайдіть множину істинності предиката:

1) «x кратне 3», заданого на множині $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

2) «x кратне 3», заданого на множині $M=\{3;6;9;12\}$;

3) «x кратне 3», заданого на множині $M=\{2;5;7\}$;

4) «$y^2+3y+2=0$», заданого на множині дійсних чисел;

5) «$y^2+1\geq 0$», заданого на множині дійсних чисел;

6) «$\sin y>2$», заданого на множині дійсних чисел;

7) «$x^2+y^2=0$», заданого на множині дійсних чисел;

8) «$x^2+y^2<0$», заданого на множині дійсних чисел;

9) «$x<y$», заданого на множинах $M_x=\{1;2;3;4\}$, $M_y=\{3;4;5\}$;

10) «y_1 ділить y_2», заданого на множині $M=\{2;3;4;6\}$.

Завдання 13. Зобразити на координатній прямій множину істинності предиката, заданого на множині R:

1) $x > 2$;

2) $|x| = 1$;

3) $|x| < 1$;

4) $|x| > 1$;

5) $|x - 2| > 1$;

6) $|x + 3| \le 1$;

7) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

8) $x^2 + 6x + 9 > 0$;

9) $x^2 + 6x - 16 \le 0$;

10) $x^2/x = x$.

Завдання 14. Зобразити на координатній площині множину істинності предикату, заданого на множині R:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y < -(1/2)x + 2, \\ y < -(1/2)x + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge (1/3)x + 1, \\ y \le 2x - 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y > 2x - 4, \\ y < (1/3)x + 2, \\ y > -(1/2)x + 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x > 0, \\ x + y > 0; \end{cases}$

7) $(x^2 - y^2)/(x - y) = x + y$;

8) $|x + 3| > 3$;

9) $(x - 5)/(x - 2) > 0$;

10) $x \sin x < 0$.

Завдання 15. Наведіть по два приклади тотожно істинних і тотожно хибних предикатів.

Завдання 16. Знайдіть множину так, щоб наступні предикати були рівносильними на цій множині (мали одну і ту саму множину істинності):

1) $x^2 = 1$ та $x = 1$;

2) $x^2 = x$ та $x = 1$;

3) $x - 1 = y$ та $(x^2 - 1)/(x + 1) = y$;

4) «x - число дільників простого числа» та» «x - просте парне число»;

5) «x ділиться на 2» та «x ділиться на 3»;

6) $x^2 + 5x + 6 = 0$ та $x = -2$;

7) $y = x$ та $\sqrt{y} = \sqrt{x}$;

8) $y = x$ та $|y| = |x|$;

9) «x - ромб» та «діагоналі x взаємно перпендикулярні»;

10) «z - ромб» та «діагоналі в z взаємно перпендикулярні».

Завдання 17. Знайдіть множину так, щоб наступні предикати були нерівносильними на цій множині

1) $(x^2 - 2):(x + \sqrt{2}) = x - \sqrt{2}$ та $\sin x \le 1$;

2) $|x| \le 0$ та $x^2 = 0$;

3) $\sqrt{xy} = 6$ та $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 6$;

4) $x = y$ та $|x| = |y|$;

5) $x > 1$ та $y > 1$;

6) $x = 2$ та $x + y/y = 3$;

7) «x кратно 3» та «x кратно 5»;

8) «y - парне число» та «y - просте число»;

9) $x^3 - 1 = 0$ та $x^2 + 2x - 3 = 0$;

10) $x^2 = 1$ та $\left(x - \sqrt{2}\right)(x + 0{,}5)(x - 1)(x + 1) = 0$.

Завдання 18. Визначити, чи мають місце рівносильності для будь-яких предикатів $P(x, y)$, $Q(x)$, $S(x)$. Якщо ні, то наведіть приклади предикатів, що підтверджують це.

1) $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y)$;

2) $\forall x(Q(x) \vee S(x)) \equiv \forall x(Q(x) \vee \forall x S(x))$;

3) $\exists x(Q(x) \vee S(x)) \equiv \exists x(Q(x) \vee \exists x S(x))$;

4) $\forall x \forall y(Q(x) \vee S(y)) \equiv \forall x(Q(x) \vee \forall y S(y))$;

5) $\forall x Q(x) \Rightarrow \exists x S(x)) \equiv \exists x(Q(x) \Rightarrow S(x))$;

6) $\exists x Q(x) \vee \forall x S(x)) \equiv \exists x(Q(x) \Rightarrow S(x))$;

7) $\forall x(Q(x) \Rightarrow S(x)) \equiv \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x S(x)$;

8) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$;

9) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

10) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

~~СПИСОК~~ ВИКОРИСТАНИХ ~~ДЖЕРЕЛ~~ література

1. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп`ютерна дискретна математика : підручник для студ. вузів рек. МОНУ. Харків : Компанія СМІТ, 2004. 480с.
2. Капітонова Ю.В. Кривий С.Л., О.А. Летичевський О.А. та ін.. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 579 с.
3. Кузнецов О.П. Дискретная математика для інженера. Москва : Энергоатомиздат, 2000. 450 с.
4. Никольская И.Л. Математическая логика. Москва : Высшая школа, 1971. 127с.
5. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва : Просвещение, 1978. 232с.
6. Столяр А.А. Логическое введение в математику. Минск : Вісшейшая школа, 1971. 224с.
7. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. Петербург : БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика: підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. затвердж. МОНУ. Київ : Вища школа, 2007. 548с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп`ютерна дискретна математика: підручник для студ. вузів рек. МОНУ. Харків : Компанія СМІТ, 2004. 480с.
3. Гиндинкин С.Г. Алгебра логики в задачах. Москва : Наука, 1972. 288 с.
4. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. 3-изд. Учебное пособие для ВУЗов. Москва : Изд-во Физматлит, 2006. 347 с.
5. Капітонова Ю.В. Кривий С.Л., О.А. Летичевський О.А. та ін. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 579 с.
6. Клини С. К. Математическая логика. Москва : Мир, 1973. 240с.
7. Кузнецов О.П. Дискретная математика для інженера. Москва : Энергоатомиздат, 2000. 450 с.
8. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. Київ : Вища школа, 1971, 326с.
9. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики. Москва : Изд-во МАИ, 1992. 264 с.
10. Никольская И.Л. Математическая логика. Москва : Высшая школа, 1971. 127с.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Санкт-Петербург : Питер, 2001. 304 с.
12. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва : Просвещение, 1978. 232с.
13. Столяр А.А. Логическое введение в математику. Минск : Вісшейшая школа, 1971. 224с.
14. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. Петербург : БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

Додаткова

1. Будько А.Н. Заверач О.В. Дискретная математика и математическая логика. Брест, 2003.
2. Гочаров С.С. Лекции по математической логике. Новосибирск : 2015. 175с.
3. Риордан Д. Введение в комбинаторный аналіз. Москва : Изд-во ин.лит., 1963. 289 с.
4. Рузавин Г.И. Логика и аргументация. Москва : Культура и спорт, ЮНИТИ, 1997. 351с.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов. Москва : Наука, 1986.784 с.

Навчальне видання

(українською мовою)

Стєганцева Поліна Георгіївна
Гречнєва Марина Олександрівна
Стєганцев Євгеній Вікторович

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика»

Рецензент *С.В. Курапов*
Відповідальний за випуск *І.В. Зіновєєв*
Коректор *Я.О. Коваленко*