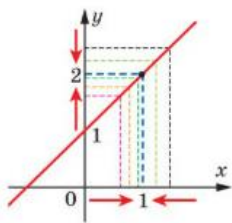


## ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІЯ, НЕПЕРЕРВНА В ТОЧЦІ



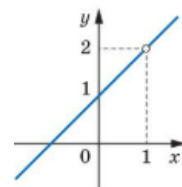
Нехай задано лінійну функцію  $y = x + 1$  та точку з абсцисою  $x_0 = 1$ . Якщо значення аргументу  $x \rightarrow 1$  (читається: « $x$  прагне до 1»), то відповідне значення функції  $y \rightarrow 2$ . Тобто, чим менше значення аргументу буде відрізнятися від 1 (чим все ближче й ближче його брати ближчим до 1), тим відповідні значення функції усе менше й менше будуть відрізнятися від 2.

У такому випадку говорять, що **число 2 є границею функції  $y = x + 1$  в  $x_0 = 1$** , і записують

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = 2 \text{ або } \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2, \text{ або } y(x) \rightarrow 2 \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Розглянемо функцію  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , областю визначення якої є вся дійсна вісь, окрім точки  $x_0 = 1$ :

$$D(y): x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$



Ця функція на всій області свого визначення збігається з функцією

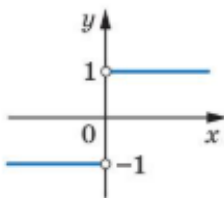
$y = x + 1$ . Проте якщо  $x \neq 1 \rightarrow 1$ , то відповідні значення функції  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Отже, можна зробити висновок: *функція, може бути не визначеною в точці, але мати границю в цій точці.*

Розглянемо функцію  $y(x) = \frac{|x|}{x}$  з областю визначення

$$D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty):$$



$$y(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0; \\ -\frac{x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Якщо значення аргументу прагнуть до нуля та є від'ємними (*прагнуть до 0 зліва*), то відповідні значення функції прагнуть до  $(-1)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = -1;$$

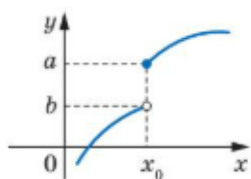
якщо значення аргументу прагнуть до нуля та є додатними (*прагнуть до 0 справа*), то відповідні значення функції прагнуть до 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = 1.$$

Отже, якщо значення аргументу  $x \neq 0$  прагне до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції  $y(x) = \frac{|x|}{x}$  прагнуть до якогось певного числа.

Таким чином, функція  $y(x) = \frac{|x|}{x}$  у точці  $x_0 = 0$  границі не має.

Неправильно було б вважати, що якщо функція визначена в деякій точці  $x_0$ , то в цій точці ця функція обов'язково має границю.



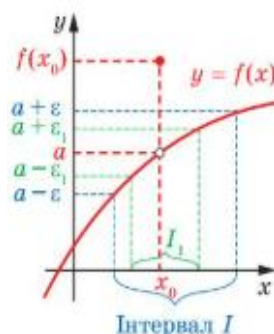
Розглянемо функцію  $y = f(x)$  (на рисунку зліва), що є визначеною в точці  $x_0$ :  $f(x_0) = a$ . Але ця функція не має границю в цій точці, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a.$$

Нехай задано функцію  $y = f(x)$  та точку  $x_0$ , причому функція  $f(x)$  в точці  $x_0$  має границю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

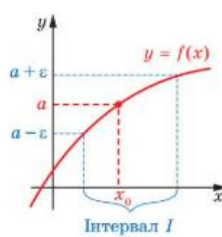
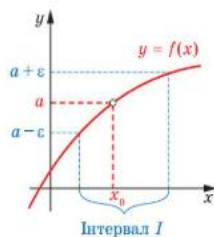
Зазначимо, що  $f(x_0) \neq a$ . Вважатимемо, що в будь-якому інтервалі  $I$ , який містить точку  $x_0$ , знайдуться точки  $x \in D(f)$ :  $x \neq x_0$ .



Нехай  $\varepsilon$  – деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , якому на осі абсцис відповідає інтервал  $I$ , тобто

$$\begin{aligned} \forall x \neq x_0 \in I \subset D(f): f(x) \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon) &\Leftrightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \\ -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon &\Leftrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Розглянемо функції, для яких функція не визначена в точці  $x_0$ , але має границю в цій точці (лівий рисунок) та функція, для якої  $f(x_0) = a$  (правий рисунок).



Для кожної з функцій для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна вказати такий інтервал  $I$ , який містить  $x_0$ , що для всіх  $x \neq x_0 \in I \subset D(f)$  виконується нерівність  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

**Означення.** Число  $a$  називається **границею функції**  $y = f(x)$  в точці  $x_0$ , якщо для будь-якого додатного числа  $\varepsilon$  існує такий інтервал  $I$ , який містить точку  $x_0$ , що для будь-якого  $x \in I \subset D(f)$  і  $x \neq x_0$  виконується нерівність  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

**Зауваження.** Границя функції в точці  $x_0$  характеризується значенням функції в околі цієї точки, тоді як поведінка функції в самій точці  $x_0$  не впливає на значення границі.

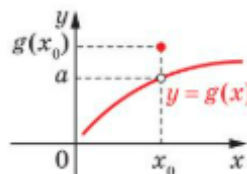
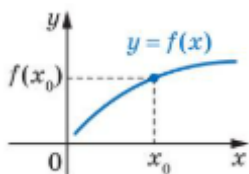
**Теорема (Арифметичні дії з границями).** Якщо функції  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$  мають границі в точці  $x_0$ , то і функції  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  також мають границі в цій точці, причому

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).\end{aligned}$$

Якщо, крім цього,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , то функція  $\frac{f(x)}{g(x)}$  також в точці  $x_0$  має границю, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Розглянемо функції  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$ , які визначені в точці  $x_0$  та мають в цій точці границю.



Причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0).$$

Тобто *границя функції*  $y = f(x)$  у точці  $x_0$  дорівнює значенню цієї функції в заданій точці.

**Означення.** Якщо границя функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  дорівнює значенню цієї функції в точці  $x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функція  $f(x)$

називається **неперервною в точці**  $x_0$ .

**Означення.** Якщо функція  $y = f(x)$  є неперервною в кожній точці деякої множини  $M \subset R$ , то вона називається **неперервною на множині  $M$** .

**Означення.** Якщо функція  $y = f(x)$  є неперервною на  $D(f)$ , то вона називається **неперервною**.

**Зауваження.** Усі елементарні функції, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, степенева функція, раціональна функція є неперервними.

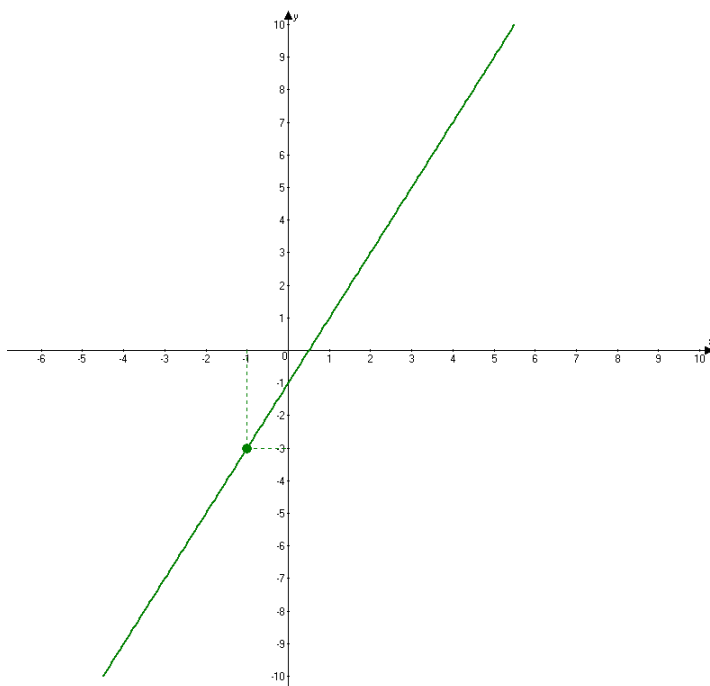
**Приклад 1.** Побудувавши графік функції  $y = f(x)$ , з'ясувати, чи має функція  $f(x)$  границю в точці  $x_0$ :

1)  $f(x) = 2x - 1, x_0 = -1$ ;    3)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$ ;    5)  $f(x) = k \in R, x_0 = 3$ ;

2)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2$ ;    4)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$ ;    6)  $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}, x_0 = 2$ .

**Розв'язання.** 1) Побудуємо графік функції  $f(x) = 2x - 1$  – лінійна функція, графік – пряма, для побудови якої потрібно знати координати двох точок:

|     |    |   |
|-----|----|---|
| $x$ | 0  | 1 |
| $y$ | -1 | 1 |



З графіка можна зробити висновок, якщо значення аргументу  $x \rightarrow -1$ , то відповідне значення функції  $f(x) \rightarrow -3$ . Тобто число  $(-3)$  є границею функції  $f(x) = 2x - 1$  в  $x_0 = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 1) = -3.$$

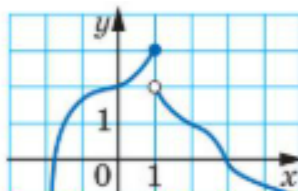
**Відповідь.**  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$ .

**Приклад 2.** На рисунках I, II зображено графік функції  $y = f(x)$ .

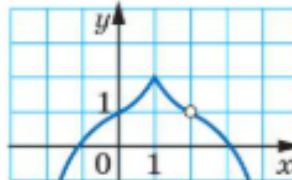
1) Чому дорівнює значення функції  $f(x)$  в точці  $x_0 = 1$ ?

2) Чи існує границя функції  $f(x)$  в точці  $x_0 = 1$ ? У разі ствердної відповіді записати з використанням відповідної символіки чому вона дорівнює.

3) Чи існує границя функції  $f(x)$  в точці  $x_0 = 2$ ? У разі ствердної відповіді записати з використанням відповідної символіки чому вона дорівнює.

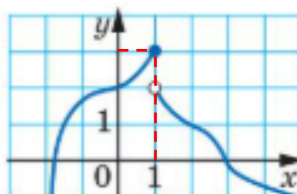


I



II

**Розв'язання.** Розглянемо рисунок I.



1)  $f(1) = 3$ , тобто  $f(1) = 3$ .

2) Границя в точці  $x_0 = 1$  не існує, оскільки  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$ .

3) Границя в точці  $x_0 = 2$  існує, причому  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .

**Відповідь.** 1)  $f(1) = 3$ ; 2) не існує; 3)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ .

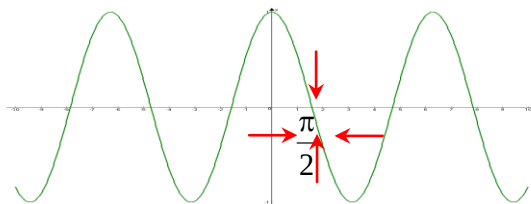
**Приклад 3.** Використовуючи графік відповідної функції, перевірити справедливості рівності:

1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ ;      3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$ ;      5)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$ ;      7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;      4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcctg} x = 0$ ;      6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg} x = 1$ .

**Розв'язання.** Покажемо за допомогою графіка функції  $y = \cos x$ , що  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ . Побудуємо косинусоїду.

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$



**Приклад 4.** Знайти наступні границі:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 1)$ ;    4)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ ;    7)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}$ ;    10)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$ ;    5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$ ;    8)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 1}{(x - 2)^{20}}$ ;    11)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x - 2)$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$ ;    9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x - 1}$ ;    12)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos^2 x$ .

**Розв'язання.** 1) Оскільки функція  $y(x) = 2x^2 + 3x - 1$  є неперервною на всій дійсній осі як многочлен, а тому і в точці  $x_0 = 1$ , то її границя в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 1) = (2x^2 + 3x - 1) \Big|_{x=1} = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4.$$

**Відповідь.**  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 1) = 4$ .

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4).$$

Лінійна функція  $y(x) = x + 4$  є неперервною, а тому

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = (x + 4) \Big|_{x=4} = 4 + 4 = 8.$$

**Відповідь.**  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$ .

**Приклад 5.** Обчислити:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ ;    4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ ;    7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} - 3x}{3\sqrt{x} - 2x}$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$ ;    5)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ ;    8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{1}{x + 3} + \frac{6}{x^2 - 9} \right)$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ ;    9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

**Розв'язання.** 1) Вираз, що стоїть під знаком ліміту можна спростити, для цього розкладемо чисельник та знаменник на множники, а також скористаємося тим фактом, що якщо  $x_1, x_2$  – корені квадратичного тричлена  $ax^2 + bx + c$ , то має місце рівність:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ . Тоді

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3),$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4.$$

**Відповідь.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = 4.$

2) Зведемо до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{3}{3} = -1. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = 1.$