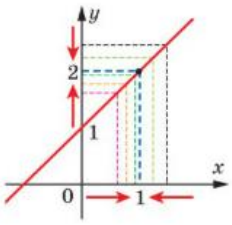
1 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІЯ, НЕПЕРЕРВНА В ТОЧЦІ

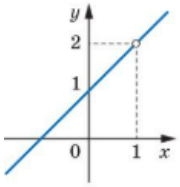


Нехай задано лінійну функцію $y = x + 1$ та точку з абсцисою $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу $x \to 1$ (читається: «x прагне до 1»), то відповідне значення функції $y \to 2$. Тобто, чим менше значення аргументу буде відрізнятися від 1 (чим все ближче й ближче його брати ближчим до 1), тим відповідні значення функції усе менше й менше будуть відрізнятися від 2.

У такому випадку говорять, що ***число 2 є границею функції*** $y = x + 1$ ***в*** $x_0 = 1$, і записують

$$\lim_{x \to 1} y(x) = 2 \text{ або } \lim_{x \to 1}(x+1) = 2, \text{ або } y(x) \to 2 \text{ при } x \to 1.$$

Розглянемо функцію $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, областю визначення якої є вся дійсна вісь, окрім точки $x_0 = 1$:



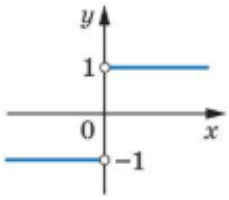
$$D(y): x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Ця функція на всій області свого визначення збігається з функцією $y = x + 1$. Проте якщо $x \neq 1 \to 1$, то відповідні значення функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \to 2$, тобто

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Отже, можна зробити висновок: *функція, може бути не визначеною в точці, але мати границю в цій точці*.

Розглянемо функцію $y(x) = \dfrac{|x|}{x}$ з областю визначення $D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$:



$$y(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, & x > 0; \\ \dfrac{-x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Якщо значення аргументу прагнуть до нуля та є від'ємними (*прагнуть до 0 зліва*), то відповідні значення функції прагнуть до (– 1):

$$\lim_{x \to 0-0} y(x) = -1;$$

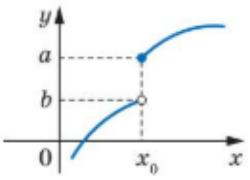
якщо значення аргументу прагнуть до нуля та є додатними (*прагнуть до 0 справа*), то відповідні значення функції прагнуть до 1:

$$\lim_{x\to 0+0} y(x)=1.$$

Отже, якщо значення аргументу $x\neq 0$ прагне до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції $y(x)=\dfrac{|x|}{x}$ прагнуть до якогось певного числа.

Таким чином, функція $y(x)=\dfrac{|x|}{x}$ у точці $x_0=0$ границі не має.

Неправильно будо б вважати, що *якщо функція визначена в деякій точці x_0, то в цій точці ця функція обов'язково має границю*.

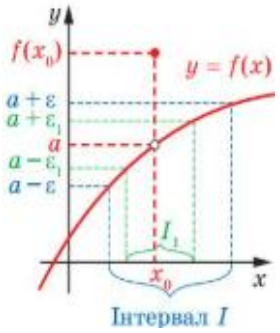


Розглянемо функцію $y=f(x)$ (на рисунку зліва), що є визначеною в точці x_0: $f(x_0)=a$. Але ця функція не має границю в цій точці, оскільки

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)=a.$$

Нехай задано функцію $y=f(x)$ та точку x_0, причому функція $f(x)$ в точці x_0 має границю:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

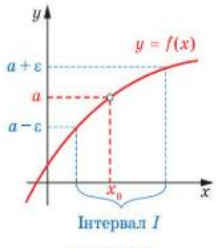


Зазначимо, що $f(x_0)\neq a$. Вважатимемо, що в будь-якому інтервалі I, який містить точку x_0, знайдуться точки $x\in D(f): x\neq x_0$.

Нехай ε – деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, якому на осі абсцис відповідає інтервал I, тобто

$$\forall x\neq x_0\in I\subset D(f): f(x)\in(a-\varepsilon; a+\varepsilon)\Leftrightarrow a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon;$$
$$-\varepsilon<f(x)-a<\varepsilon\Leftrightarrow|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Розглянемо функції, для яких функція не визначена в точці x_0, але має границю в цій точці (лівий рисунок) та функція, для якої $f(x_0)=a$ (правий



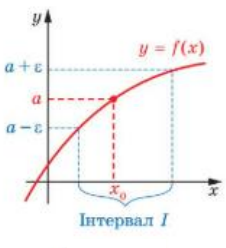


рисунок).

Для кожної з функцій для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить x_0, що для всіх $x \neq x_0 \in I \subset D(f)$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Означення. Число a називається **границею функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \subset D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Зауваження. Границя функції в точці x_0 характеризується значенням функції в околі цієї точки, тоді як поведінка функції в самій точці x_0 не впливає на значення границі.

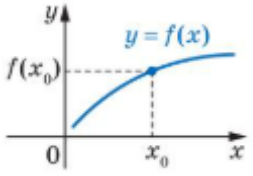
Теорема (*Арифметичні дії з границями*). Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ мають границі в точці x_0, то і функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ також мають границі в цій точці, причому

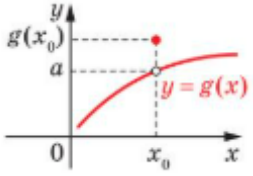
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також в точці x_0 має границю, причому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Розглянемо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, які визначені в точці x_0 та мають в цій точці границю.





Причому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0).$$

Тобто *границя функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 *дорівнює значенню цієї функції в заданій точці*.

Означення. Якщо границя функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює значенню цієї функції в точці x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функція $f(x)$

називається **неперервною в точці** x_0.

Означення. Якщо функція $y=f(x)$ є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset R$, то вона називається **неперервною на множині** M.

Означення. Якщо функція $y=f(x)$ є неперервною на $D(f)$, то вона називається **неперервною**.

Зауваження. Усі елементарні функції, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, степенева функція, раціональна функція є неперервними.

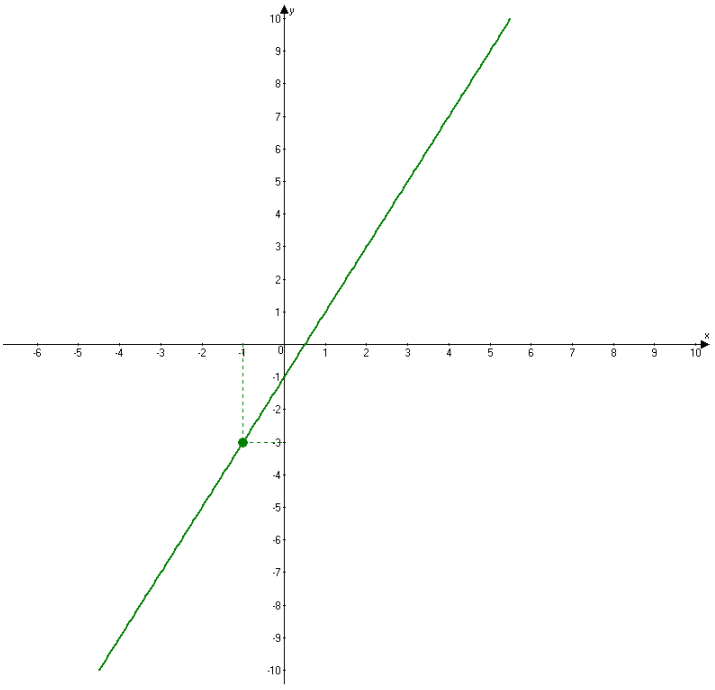
Приклад 1. Побудувавши графік функції $y=f(x)$, з'ясувати, чи має функція $f(x)$ границю в точці x_0:

1) $f(x)=2x-1,\ x_0=-1;$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=-2;$ 5) $f(x)=k\in R,\ x_0=3;$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\ x_0=2;$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0;$ 6) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{2-x},\ x_0=2.$

Розв'язання. 1) Побудуємо графік функції $f(x)=2x-1$ – лінійна функція, графік – пряма, для побудови якої потрібно знати координати двох точок:

x	0	1
y	– 1	1



З графіка можна зробити висновок, якщо значення аргументу $x\to -1$, то відповідне значення функції $f(x)\to -3$. Тобто число (– 3) є границею функції $f(x)=2x-1$ в $x_0=-1$:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x-1)=-3.$$

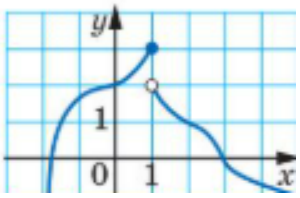
Відповідь. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3.$

Приклад 2. На рисунках I, II зображено графік функції $y=f(x)$.

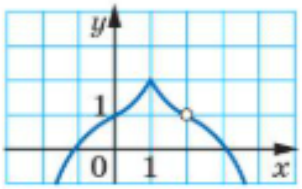
1) Чому дорівнює значення функції $f(x)$ в точці $x_0=1$?

2) Чи існує границя функції $f(x)$ в точці $x_0=1$? У разі ствердної відповіді записати з використанням відповідної символіки чому вона дорівнює.

3) Чи існує границя функції $f(x)$ в точці $x_0=2$? У разі ствердної відповіді записати з використанням відповідної символіки чому вона дорівнює.

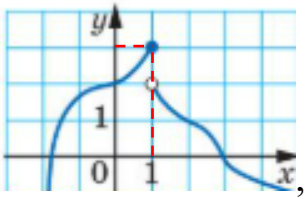


I



II

Розв'язання. Розглянемо рисунок I.

1) 

, тобто $f(1)=3$.

2) Границя в точці $x_0=1$ не існує, оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=3\neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$.

3) Границя в точці $x_0=2$ існує, причому $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

Відповідь. 1) $f(1)=3$; 2) не існує; 3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

Приклад 3. Використовуючи графік відповідної функції, перевірити справедливість рівності:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x=0$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x=0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcctg} x=0$;

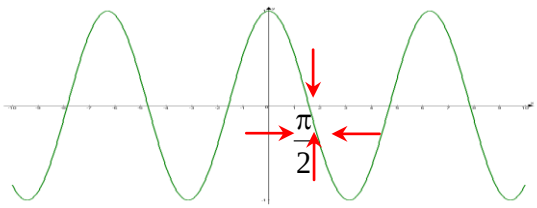
5) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x=0$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x=\frac{\pi}{2}$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg} x=1$.

Розв'язання. Покажемо за допомогою графіка функції $y=\cos x$, що $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x=0$. Побудуємо косинусоїду.



Приклад 4. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+3x-1\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin 3x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x-1\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+2x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+1}{(x-2)^{20}}$; 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x-2\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-3x^2+2x+2\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\cos^2 x$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $y(x)=2x^2+3x-1$ є неперервною на всій дійсній осі як многочлен, а тому і в точці $x_0=1$, то її границя в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+3x-1\right)=\left(2x^2+3x-1\right)\Big|_{x=1}=2\cdot 1^2+3\cdot 1-1=4.$$

Відповідь. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+3x-1\right)=4$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4^2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)$.

Лінійна функція $y(x)=x+4$ є неперервною, а тому

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=(x+4)\big|_{x=4}=4+4=8.$$

Відповідь. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=8$.

Приклад 5. Обчислити:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Розв'язання. 1) Вираз, що стоїть під знаком ліміту можна спростити, для цього розкладемо чисельник та знаменник на множники, а також скористаємося тим фактом, що якщо x_1, x_2 – корені квадратичного тричлена ax^2+bx+c, то має місце рівність: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Тоді

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3),$$
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3+1}{3-2}=\frac{4}{1}=4.$$

Відповідь. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=4$.

2) Зведемо до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Відповідь. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=1$.