

МИТТЄВА ШВИДКІСТЬ. ДОТИЧНА ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Якщо функція описує деякий математичний процес, тобто є його математичною моделлю, то дуже часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках.

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$ та нехай $x_0 \in D(f)$ – фіксована точка.

Означення. Якщо $x \neq x_0$ – довільна точка з області визначення функції $f(x)$, то різниця $x - x_0$ називається **приростом аргументу функції $f(x)$ у точці x_0** та позначається Δx (читається: «дельта x »):

$$\Delta x = x - x_0.$$

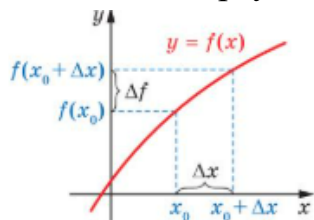
Зауваження. З останньої рівності легко отримати, що

$$x = x_0 + \Delta x,$$

говорять, що *аргумент x отримав приріст Δx у точці x_0* .

Зауваження. Приріст аргументу може бути як додатним, якщо $x > x_0$; так і від'ємним у випадку, коли $x < x_0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx , то значення функції $y = f(x)$ змінилося на величину



$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення. Різниця $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається **приростом функції $f(x)$ у точці x_0** та позначається Δf (читається: «дельта ef »):

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Зауваження. Також прийнято позначення

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або } \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Зауваження. Для фіксованої точки x_0 приріст функції $y = f(x)$ в цій точці є функцією з аргументом Δx .

Приклад 1. Знайти приріст функції $y = x^2$ в точці x_0 , який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Згідно з формулою, маємо:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

Відповідь. $\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Приклад 2. Знайти приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

- 1) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$; 3) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;
 2) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1,2$, $\Delta x = -0,3$; 4) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$.

Розв'язання. 1) За формулою маємо, що шуканий приріст

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) - (3x_0^2 - 2x_0) = \\ &= 3(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - 2x_0 - 2\Delta x - 3x_0^2 + 2x_0 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x.\end{aligned}$$

Підставляємо в отриманий вираз задані значення $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$; будемо мати:

$$\Delta f = 6 \cdot 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1^2 - 2 \cdot 0,1 = 1,2 + 0,03 - 0,2 = 1,03.$$

Відповідь. $\Delta f = 1,03$.

Приклад 3. Для функції $y = f(x)$ виразити приріст Δf у точці x_0 через x_0 і x . Знайти Δf за заданими значеннями x_0 та x .

- 1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x_0 = -2$, $x = -1$; 2) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0,5$; $x = 0,4$.

Розв'язання. 1) Згідно з формулою, шуканий приріст

$$\Delta f = f(x) - f(x_0),$$

тоді для заданої функції маємо:

$$\Delta f = x^2 - 3x - (x_0^2 - 3x_0) = x^2 - 3x - x_0^2 + 3x_0.$$

Для заданих значень $x_0 = -2$, $x = -1$

$$\Delta f = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 1 + 3 - 4 - 6 = -6.$$

Відповідь. $\Delta f = x^2 - 3x - x_0^2 + 3x_0 = -6$.

Приклад 4. Для функції $y = f(x)$ та точки x_0 знайти $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ та $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

- 1) $f(x) = x^2 - x$; 2) $f(x) = 5x + 1$.

Розв'язання. 1) Знайдемо спочатку приріст функції Δf :

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) - (x_0^2 - x_0) = \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0 - \Delta x - x_0^2 + x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x.\end{aligned}$$

Тоді відношення

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x - 1)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 1.$$

А шукана границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 1) = 2x_0 - 1.$$

Відповідь. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 1$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 - 1.$

Миттєва швидкість

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху точки**.

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$

$$v_{\text{сер}}(\Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Якщо матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її *миттєва швидкість* у момент часу t_0 визначається за формулою

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сер}}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Приклад 5. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$ (переміщення вимірюються у метрах, час – у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент t_0 :

$$1) s(t) = 2t^2 + 3, t_0 = 2 \text{ с.}; \quad 2) s(t) = 5t^2, t_0 = 1 \text{ с.}$$

Розв'язання. Згідно з формулою

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 + 3 - (2t_0^2 + 3)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) + 3 - 2t_0^2 - 3}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t_0^2 + 4t_0\Delta t + 2\Delta t^2 - 2t_0^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4t_0\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(4t_0 + 2\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4t_0 + 2\Delta t) = 4t_0 + 2 \cdot 0 = 4t_0. \end{aligned}$$

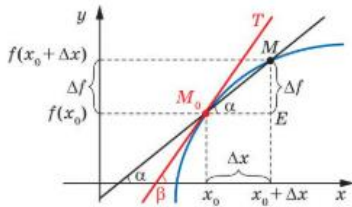
Тоді

$$v(2) = 4t_0 \big|_{t_0=2} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь. $v(2) = 8 \text{ (м/с)}$.

Дотична до графіка функції

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ та точку $M_0(x_0; f(x_0))$, що їй належить.



У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку $M(x; f(x))$ таку, що $x = x_0 + \Delta x$. Зрозуміло, чим менше стає Δx , то точка M , рухаючись по графіку, наближається до

точки M_0 . Якщо при $\Delta x \rightarrow 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої – пряма M_0T , то таку пряму називають *дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0* .

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ й утворює з додатнім напрямом осі Ox кут α , тоді

$$k_{\text{січ}} = \operatorname{tg} \alpha.$$

З прямокутного $\triangle MEM_0$ маємо, що

$$k_{\text{січ}}(\Delta x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\beta \neq 90^\circ$, тоді її кутовий коефіцієнт

$$k(x_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

Зрозуміло, що чим менше Δx , то тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Тобто

$$k_{\text{січ}}(\Delta x) \rightarrow k(x_0) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

а, отже,

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приклад 6. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

$$1) y(x) = x^2, x_0 = 1; \quad 2) y(x) = x^3, x_0 = 1.$$

Розв'язання. Шуканий кутовий коефіцієнт знаходиться за формулою:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

для заданої функції маємо:

$$\begin{aligned} k(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

У заданій точці

$$k(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Відповідь. $k(1) = 2$.