

ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається число, що дорівнює відношенню приросту функції в цій точці до відповідного приросту аргументу, коли останній прагне до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначається як $y'(x_0) = f'(x_0)$ (читається: «ігрек штрих від ікс нульового або еф штрих від ікс нульового»). Отже, можна записати за означенням:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. За означенням

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \Delta x} - \frac{1}{1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 1 - \Delta x}{1 + \Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(1 + \Delta x)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \Delta x} = - \frac{1}{1 + 0} = -1. \end{aligned}$$

Відповідь. $f'(1) = -1$.

Раніше було показано, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 обчислюється за формулою:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Згідно з означенням похідної, можна зробити висновок, що

$$k(x_0) = f'(x_0).$$

Теорема (Геометричний зміст похідної). Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , дорівнює значенню похідної функції в цій точці.

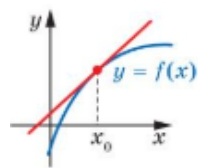
Зауваження. Похідна $f'(x_0)$ функції в точці x_0 дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , та додатним напрямом осі абсцис.

Аналогічно, з означення миттєвої швидкості маємо.

Теорема (Фізичний або механічний зміст похідної). Якщо матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0 :

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

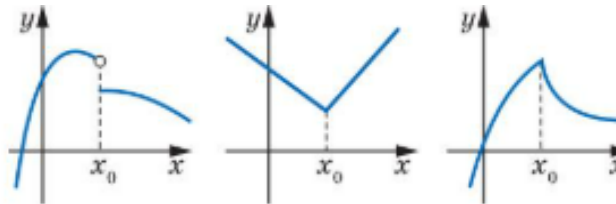
Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0 , то ця функція називається **диференційованою в точці x_0** .



Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 . З геометричного змісту похідної маємо, що у цьому випадку до графіка функції в точці x_0 можна провести неvertикальну дотичну. Має місце й зворотне твердження: *якщо до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 можна провести неvertикальну дотичну, то*

функція є диференційованою в цій точці.

На рисунках нижче зображено графіки функцій, які є розривними в точці x_0 , або мають в цій точці «злом». До цих графіків не можна провести дотичну у точці з абсцисою x_0 . А тому наведені функції не є диференційованими.



До наступних функцій у точці з абсцисою x_0 проведено вертикальні асимптоти. Отже, і ці функції не є диференційованими.



Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x_0 , то вона є неперервною в цій точці. Обернене твердження не має місця.

Означення. Нехай M – множина точок, у яких функція $y = f(x)$ є диференційованою. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Таке правило задає функцію, для якої $D(f) = M$. Цю функцію називають **похідною функції $y = f(x)$** та позначають $y'(x)$ або $f'(x)$.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці деякої множини M , то вона називається **диференційованою на множині M** .

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на всій своїй області визначення $D(f)$, то вона називається **диференційованою**.

Означення. Знаходження похідної функції $y = f(x)$ називається диференціюванням цієї функції.

Приклад 2. Продиференціювати функцію:

$$1) f(x) = kx + b; \quad 2) f(x) = x^2; \quad 3) f(x) = x^3.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо за означенням похідну функції $f(x) = kx + b$ в довільній точці $x_0 \in D(f)$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{kx_0 + k\Delta x + b - kx_0 - b}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k. \end{aligned}$$

Оскільки x_0 – довільна точка області визначення, то маємо, що для будь-якого $x \in R$ виконується рівність

$$f'(x) = (kx + b)' = k.$$

Зауваження. Якщо в останню формулу підставити $k = 1, b = 0$, то будемо мати:

$$(x)' = 1,$$

тобто *похідна незалежної змінної дорівнює одиниці*.

При $k = 0$ отримуємо:

$$(b)' = 0,$$

тобто *похідна константи дорівнює нулю*.

2) За означенням похідної в довільній точці x_0 області визначення маємо:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

Оскільки x_0 – довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in R$ маємо:

$$(x^2)' = 2x.$$

3) Для довільній точці $x_0 \in D(f)$ маємо:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

У силу довільності x_0 для будь-якого $x \in R$ маємо:

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Зауваження. Формули, отримані в останніх двох прикладах, є окремими випадками більш загальної формули

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in N.$$

Ця формула залишається справедливою для будь-якого $n \in Z$ та $x \neq 0$:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in Z.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{1}{x}$.

Розв'язання. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

Відповідь. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Зауваження. Формулу $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in Z$ можна узагальнити на випадок раціонального показника степеня:

$$(x^r)' = rx^{r-1}, r \in Q.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання. $f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Відповідь. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Зауваження. Взагалі, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in N, n > 1$, можна знаходити за формулою:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ є диференційовними, їхні похідні знаходяться за наступними формулами:

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x.$$

Доведення цих формул виходить за рамки шкільного курсу.

Приклад 5. Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x)$:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$; 3) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; 4) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

Приклад 6. Продиференціювати функцію:

1) $y = \frac{1-x}{3}$; 3) $y = x^{-2,8}$; 5) $y = x^{\frac{1}{5}}$;
2) $y = 9$; 4) $y = \frac{1}{x^8}$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

Приклад 7. Обчислити значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

1) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}, x_0 = 64$;
2) $f(x) = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}, x_0 = 16$.

Розв'язання. 2) Спочатку знайдемо похідну заданої функції в довільній точці x :

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

Тоді значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$f'(x_0) = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При спрощенні було використано непарність функції синус.

Відповідь. $f'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3) Спростимо вираз функції, скориставшись властивостями степенів:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{2-\frac{1}{6}} = x^{\frac{11}{6}}.$$

Тоді

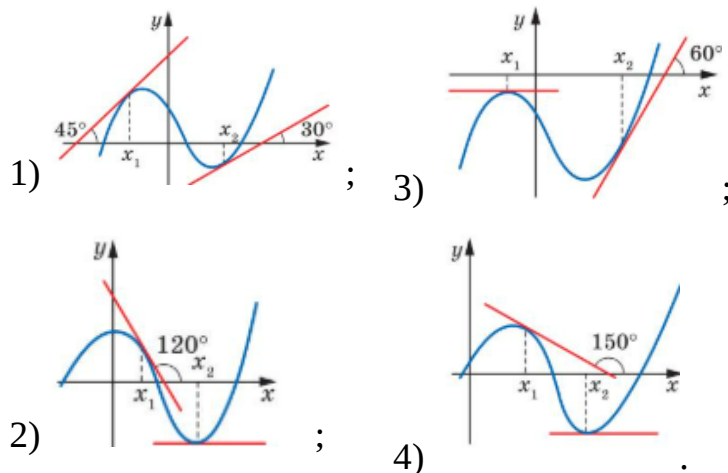
$$f'(x) = \left(x^{\frac{11}{6}}\right)' = \frac{11}{6}x^{\frac{11}{6}-1} = \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}} = \frac{11\sqrt[6]{x^5}}{6}.$$

А шукане значення

$$f'(x_0) = f'(64) = \frac{11\sqrt[6]{64^5}}{6} = \frac{11 \cdot 2^5}{6} = \frac{11 \cdot 32}{6} = \frac{176}{3}.$$

Відповідь. $f'(x_0) = \frac{176}{3}.$

Приклад 8. Знайти за допомогою графіка функції $y = f(x)$ значення похідної $f'(x_1)$, $f'(x_2)$:

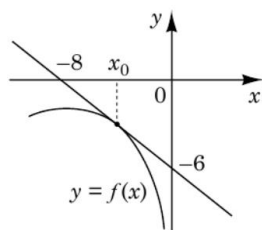


Розв'язання. 2) Згідно з геометричним змістом похідної, похідна в точці з абсцисою x_0 дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , та додатним напрямом осі Ox . Тобто

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0.$$

Відповідь. $f'(x_1) = -\sqrt{3}$, $f'(x_2) = 0.$



Приклад 9. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ та дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Обчислити похідну цієї функції в точці x_0 .

Розв'язання. Згідно з геометричним змістом похідної, кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , дорівнює значенню похідної функції в цій точці.

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної $y = kx + b$, що проведена до графіка функції $y = f(x)$, та проходить через точки $(-8; 0)$ та $(0; -6)$:

$$\begin{cases} 0 = -8k + b, \\ -6 = 0k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6, \\ 8k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6, \\ 8k = -6 \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Отже, шукане значення похідної

$$f'(x_0) = k = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Відповідь. $f'(x_0) = -0,75$.

Приклад 10. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s = s(t)$. Знайти миттєву швидкість в момент часу t_0 :

$$1) s(t) = t^2, t_0 = \frac{1}{2}; \quad 2) s(t) = t^3, t_0 = 2.$$

Розв'язання. 2) Згідно з фізичним змістом похідної,

$$v(t) = s'(t) = (t^3)' = 3t^2.$$

У заданий момент часу маємо, що

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Відповідь. $v(2) = 12$.