

ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Логарифмічною нерівністю називається нерівність, в якій невідома величина стоїть під знаком логарифма.

ОДЗ для логарифмічних нерівностей: підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, основа логарифма більша нуля та не дорівнює одиниці.

Тип 1. Найпростішою логарифмічною нерівністю називається нерівність виду

$$\log_a f(x) \{>, <, \geq, \leq\} b. \quad \text{ОДЗ: } f(x) > 0.$$

Випадок 1.1 Основа логарифма

$$0 < a < 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \log_a f(x) \{>, \geq\} b &\Leftrightarrow f(x) \{<, \leq\} a^b; \\ \log_a f(x) \{<, \leq\} b &\Leftrightarrow f(x) \{>, \geq\} a^b. \end{aligned}$$

Зауваження. Зміна знаку нерівності ґрунтується на монотонності логарифмічної функції.

Випадок 1.2 Основа логарифма

$$a > 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \log_a f(x) \{>, \geq\} b &\Leftrightarrow f(x) \{>, \geq\} a^b; \\ \log_a f(x) \{<, \leq\} b &\Leftrightarrow f(x) \{<, \leq\} a^b. \end{aligned}$$

№ 1. Розв'язати нерівність $\log_5(x+1) > 2$.

Тип 2. Нерівності виду

$$\log_a f(x) \{>, <, \geq, \leq\} \log_a g(x).$$

Випадок 2.1 Основа логарифма

$$0 < a < 1.$$

Тоді нерівності еквівалентні наступним системам:

$$\begin{aligned} \log_a f(x) \{>, \geq\} \log_a g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \{<, \leq\} g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \\ \log_a f(x) \{<, \leq\} \log_a g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \{>, \geq\} g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Випадок 2.2 Основа логарифма

$$a > 1.$$

Тоді нерівності типу 2 еквівалентні наведеним нижче системам:

$$\begin{aligned}\log_a f(x) \{>, \geq\} \log_a g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \{>, \geq\} g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \log_a f(x) \{<, \leq\} \log_a g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \{<, \leq\} g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

№ 2. Розв'язати нерівність $\log_4(x+1) < \log_4(2x+3)$.

Більш складним випадком логарифмічної нерівності є така нерівність, в якій шукана змінна знаходиться й у основі логарифма, тобто нерівності вигляду

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \{>, <, \geq, \leq\} b \text{ або } \log_{\varphi(x)} f(x) \{>, <, \geq, \leq\} \log_{\varphi(x)} g(x).$$

На такі нерівності розповсюджуються усі факти/міркування, що були наведені вище, лише потрібно розглядати два випадки, які накладаються на основу логарифма функцію $\varphi(x)$:

$$1) 0 < \varphi(x) < 1, \quad 2) \varphi(x) > 1.$$

Оскільки ці випадки не можуть виконуватися одночасно, то отримані розв'язки для кожного з них потрібно об'єднати (розглянути їх сукупність) та перетнути з ОДЗ, якщо цього не було зроблено раніше.

№ 3. Розв'язати нерівність $\log_x(x+4) < 1$.

№ 4. Розв'язати нерівність $\log_{x+1} 12 > \log_{x+1} 2$.

№ 5. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 8 \geq 0$.

№ 6. Розв'язати нерівність $3 + \log_2 x^2 - \log_2^2(-x) \geq 0$.

№ 7. Розв'язати нерівність $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$.

№ 8. Розв'язати нерівність $\log_{2x-5}(5x-1) \geq 1$.

Метод раціоналізації розв'язування логарифмічних нерівностей

Даний метод дозволяє у більшості випадків спростити логарифмічну нерівність, звівши її до раціональної, розв'язок якої можна знайти за допомогою, наприклад, методу інтервалів.

Розглянемо нерівність

$$\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x) \{<, \leq, >, \geq\} 0. \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$$

І спосіб.

Випадок 1.1 Нехай основа логарифма задовольняє подвійну нерівність $0 < \varphi(x) < 1$, у цьому випадку логарифмічна функція є спадною, тобто меншому значенню аргументу

відповідає більше значення функції:

$$0 < \varphi(x) < 1 \Rightarrow y = \log_{\varphi(x)} x \downarrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow \log_{\varphi(x)} x_1 > \log_{\varphi(x)} x_2 .$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ x_1 - x_2 < 0 & & \log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2 > 0 \end{array}$$

Отже, вирази $x_1 - x_2$ та $\log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2$ різних знаків, тому при заміні $\log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2$ на $x_1 - x_2$ знак нерівності потрібно змінити на протилежний.

Таким чином, задана нерівність з урахування вище зазначеного ОДЗ еквівалентна нерівності

$$f(x) - g(x) \{>, \geq, <, \leq\} 0.$$

Випадок 1.2 Нехай основа логарифма $\varphi(x) > 1$, тоді логарифмічна функція є зростаючою, тобто меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції:

$$\varphi(x) > 1 \Rightarrow y = \log_{\varphi(x)} x \uparrow \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow \log_{\varphi(x)} x_1 < \log_{\varphi(x)} x_2 .$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ x_1 - x_2 < 0 & & \log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2 < 0 \end{array}$$

Бачимо, що вирази $x_1 - x_2$ та $\log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2$ одного знаку, а тому при заміні $\log_{\varphi(x)} x_1 - \log_{\varphi(x)} x_2$ на $x_1 - x_2$ знак нерівності залишається без змін.

Таким чином, нерівність з урахування вище зазначеного ОДЗ у цьому випадку еквівалентна нерівності

$$f(x) - g(x) \{<, \leq, >, \geq\} 0.$$

№ 9. Розв'язати нерівність $\log_{x^2} (2 - x) \leq 1$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

Застосуємо метод раціоналізації. Перейдемо в логарифмі до сталої основи (наприклад, до основи e), щоб можна було вказати характер монотонності логарифмічної функції:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2-x)}{\ln x^2} \leq 1 &\Rightarrow \frac{\ln(2-x)}{\ln x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x) - \ln x^2}{\ln x^2} \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\ln(2-x) - \ln x^2}{\ln x^2 - 0} \leq 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x) - \ln x^2}{\ln x^2 - \ln 1} \leq 0. \end{aligned}$$

Оскільки $e > 1$, то функція $y = \ln x \uparrow$, а тоді, згідно випадку 1.2, після раціоналізації з урахуванням ОДЗ будемо мати:

$$\frac{2-x-x^2}{x^2-1} \leq 0 \text{ або } \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \geq 0.$$

Розв'язуємо останню нерівність методом інтервалів, для цього чисельник і знаменник представляємо у вигляді добутку лінійних множників:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} \geq 0, x \neq 1.$$

Розв'язок останньої нерівності: $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\cap \text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

Відповідь. $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

II спосіб. Нерівність $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x) \{<, \leq, >, \geq\} 0$ з урахуванням ОДЗ еквівалентна нерівності

$$(\varphi(x)-1)(f(x)-g(x)) \{<, \leq, >, \geq\} 0.$$

Ця еквівалентність справедлива, оскільки якщо основа логарифма $0 < \varphi(x) < 1$ ($\Rightarrow -1 < \varphi(x) - 1 < 0 \Rightarrow \varphi(x) - 1 < 0$), то логарифмічна функція $y = \log_{\varphi(x)} x$ є спадною, а тоді, аналогічно до міркувань із випадку 1.1 I способу, вирази $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $f(x) - g(x)$ різних знаків, а тому множення на $\varphi(x) - 1 < 0$ відновлює знак нерівності. Якщо ж основа логарифма $\varphi(x) > 1$ ($\Rightarrow \varphi(x) - 1 > 0$), то функція $y = \log_{\varphi(x)} x \uparrow$, а тоді вирази $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $f(x) - g(x)$ одного знаку, тому множення на $\varphi(x) - 1 > 0$ не змінює знак.

№ 10. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(2-x) \leq 1$ з попереднього прикладу без переходу до нової основи.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді:

$$\log_{x^2}(2-x) \leq 1 \Rightarrow \log_{x^2}(2-x) - 1 \leq 0 \Rightarrow \log_{x^2}(2-x) - \log_{x^2} x^2 \leq 0.$$

Переходимо до еквівалентної нерівності (1.9):

$$(x^2-1)(2-x-x^2) \leq 0$$

Розв'язуємо її методом інтервалів:

$$-(x-1)(x+1)(x-1)(x+2) \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)(x+2) \geq 0,$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [1; +\infty).$$

$\cap \text{ОДЗ} : x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$

Відповідь. $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$