ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Логарифмічною нерівністю називається нерівність, в якій невідома величина стоїть під знаком логарифма.

ОДЗ для логарифмічних нерівностей – підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, основа логарифма більша за нуль та не дорівнювати одиниці.

Тип 1. ***Найпростішою логарифмічною нерівністю*** називається нерівність виду

$$\boxed{\log_a f(x)\{>,<,\geq,\leq\}b} \qquad \text{ОДЗ: } f(x)>0.$$

Випадок 1.1 Основа логарифма $0<a<1$.

Тоді

$$\log_a f(x)\{>,\geq\}b \Leftrightarrow f(x)\{<,\leq\}a^b;$$

$$\log_a f(x)\{<,\leq\}b \Leftrightarrow f(x)\{>,\geq\}a^b.$$

Зауваження. Зміна знаку нерівності ґрунтується на монотонності логарифмічної функції.

Випадок 1.2 Основа логарифма $a>1$.

Тоді

$$\log_a f(x)\{>,\geq\}b \Leftrightarrow f(x)\{>,\geq\}a^b;$$

$$\log_a f(x)\{<,\leq\}b \Leftrightarrow f(x)\{<,\leq\}a^b.$$

№ 1. Розв'язати нерівність $\log_5(x+1)>2$.

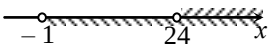
Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічний вираз додатній, тобто

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in(-1;+\infty).$$

Задана нерівність відноситься до найпростіших логарифмічних нерівностей (оскільки основа логарифма $a=5>1$, то маємо випадок 1.2, тобто знак нерівності зберігається). Тоді її розв'язок

$$x+1>5^2 \Rightarrow x+1>25 \Rightarrow x>24 \Rightarrow x\in(24;+\infty).$$

Знаходимо перетин з ОДЗ.



Тоді остаточно маємо, що $x\in(24;+\infty)$.

Відповідь. $x\in(24;+\infty)$.

Тип 2. ***Нерівності виду***

$$\boxed{\log_a f(x)\{>,<,\geq,\leq\}\log_a g(x)}.$$

Випадок 2.1 Основа логарифма $0<a<1$.

Тоді нерівності еквівалентні наступним системам:

$$\log_a f(x)\{>,\geq\}\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\{<,\leq\}g(x), \\ f(x)>0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x)\{<,\leq\}\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\{>,\geq\}g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Випадок 2.2 Основа логарифма $a>1$.

Тоді нерівності типу 2 еквівалентні наведеним нижче системам:

$$\log_a f(x)\{>,\geq\}\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\{>,\geq\}g(x), \\ g(x)>0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x)\{<,\le\}\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\{<,\le\} g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

№ 2. Розв'язати нерівність $\log_4(x+1) < \log_4(2x+3)$.

Розв'язання. Маємо нерівність типу 2.2 (основа логарифма $a = 4 > 1$), вона еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+1 < 2x+3, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in (-1; +\infty).$$

Відповідь. $x \in (-1; +\infty)$.

Більш складним випадком логарифмічної нерівності є така нерівність, в якій шукана змінна знаходиться й у основі логарифма, тобто нерівності вигляду

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)\{>, <, \ge, \le\} b} \text{ або } \boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)\{>, <, \ge, \le\} \log_{\varphi(x)} g(x)}.$$

На такі нерівності розповсюджуються усі факти/міркування, що були наведені вище, лише потрібно розглядати два випадки, які накладаються на основу логарифма функцію $\varphi(x)$:

$$1)\ 0 < \varphi(x) < 1,\ 2)\ \varphi(x) > 1.$$

Оскільки ці випадки не можуть виконуватися одночасно, то отримані розв'язки для кожного з них потрібно об'єднати (розглянути їх сукупність) та перетнути з ОДЗ, якщо цього не було зроблено раніше.

№ 3. Розв'язати нерівність $\log_x(x+4) < 1$.

Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, а основа логарифма – більшою нуля та не дорівнювати одиниці:

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x > 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1; +\infty).$$

Розглянемо два випадки щодо основи логарифма.

I. $x \in (0;1) \Rightarrow \cap$ОДЗ: $x \in (0;1)$.

У цьому випадку маємо логарифмічну нерівність типу 1, випадок 1.1:

$$\log_x(x+4) < 1 \Rightarrow x+4 > x^1 \Rightarrow \cancel{x}+4 > \cancel{x} \Rightarrow 4 > 0.$$

У результаті перетворень отримали правильну числову нерівність, отже, вона має розв'язки $\forall x \in R$. Перетинаємо з проміжком, на якому розглядаємо: $x \in (0;1)$.

II. $x \in (1; +\infty) \Rightarrow \cap$ОДЗ: $x \in (1; +\infty)$.

У цьому випадку маємо також логарифмічну нерівність типу 1, але випадок 1.2:

$$\log_x(x+4) < 1 \Rightarrow x+4 < x^1 \Rightarrow \cancel{x}+4 < \cancel{x} \Rightarrow 4 < 0.$$

Отримали неправильну числову нерівність, отже, розв'язків немає. Перетин з проміжком дає $x \in \varnothing$.

Розв'язок заданої нерівності:

$$\begin{cases} x \in (0;1), \\ x \in \varnothing \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1).$$

Відповідь. $x \in (0;1)$.

№ 4. Розв'язати нерівність $\log_{x+1} 12 > \log_{x+1} 2$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Для розв'язування заданої нерівності розглянемо два випадки щодо основи логарифма.

I. $x+1\in(0;1)$ або $x\in(-1;0) \Rightarrow \cap$ОДЗ: $x\in(-1;0)$.

У цьому випадку приходимо до нерівності:

$$12<2.$$

Отримали неправильну числову нерівність, отже, $x\in\varnothing$. Перетинаємо з проміжком $x\in(-1;0)$, на якому розглядаємо: $x\in\varnothing$.

II. $x+1\in(1;+\infty)\Rightarrow x\in(0;+\infty) \Rightarrow \cap$ОДЗ: $x\in(0;+\infty)$.

Задану нерівність можна привести до нерівності

$$12>2 -$$

правильна числова нерівність, а отже, $x\in R$.

Перетинаємо з проміжком II: $x\in(0;+\infty)$.

Випадки I, II не виконуються одночасно, а тому розв'язок вихідної нерівності є їх об'єднанням:

$$\begin{bmatrix} x\in\varnothing, \\ x\in(0;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow x\in(0;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

№ 5. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x-2\log_3 x-8\geq 0$.

Розв'язання. Задана нерівність є квадратною відносно $\log_3 x$. Розв'яжемо її спочатку відносно цього логарифма (оскільки знак нерівності $\geq$, то розв'язки лежать поза коренями). За теоремою Вієта маємо, що $\log_3 x_1=-2, \log_3 x_2=4$, тоді

ОДЗ: $x>0\Rightarrow x\in(0;+\infty)$

$$\log_3 x\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$$

або у вигляді сукупності

$$\begin{bmatrix} \log_3 x\in(-\infty;-2] \\ \log_3 x\in[4;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \log_3 x\leq -2 \\ \log_3 x\geq 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x\leq 3^{-2} \\ x\geq 3^4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x\leq \frac{1}{9} \\ x\geq 81 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x\in\left(-\infty;\frac{1}{9}\right] \\ x\in[81;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty).$$

$\cap$ОДЗ: $x\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty)$.

Відповідь. $x\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty)$.

№ 6. Розв'язати нерівність $3+\log_2 x^2-\log_2^2(-x)\geq 0$.

Розв'язання. До другого доданку лівої частини застосуємо властивість логарифмів:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0, \\ -x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;0)$

$$3+2\log_2|x|-\log_2^2(-x)\geq 0.$$

Оскільки, згідно з ОДЗ, $x<0$, то $|x|=-x$, тоді нерівність приймає вигляд:

$$3+2\log_2(-x)-\log_2^2(-x)\ge 0.$$

Отримуємо квадратну нерівність відносно $\log_2(-x)$:

$$-\log_2^2(-x)+2\log_2(-x)+3\ge 0,\Big|:(-1)$$

$$\log_2^2(-x)-2\log_2(-x)-3\le 0.$$

Розв'язки лежать між коренями $\log_2(-x)_1=-1$ та $\log_2(-x)_2=3$, тобто

$$\log_2(-x)\in[-1;3]\Rightarrow\begin{cases}\log_2(-x)\ge -1,\\ \log_2(-x)\le 3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x\ge 2^{-1},\\ -x\le 2^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x\ge \frac{1}{2},\\ -x\le 8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le -\frac{1}{2},\\ x\ge -8\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-8;-\frac{1}{2}\right].$$

$\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left[-8;-\frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $x\in\left[-8;-\frac{1}{2}\right]$.

№ 7. Розв'язати нерівність $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_5 x>0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ x>5^0,\\ \log_5 x<\left(\frac{1}{3}\right)^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ x>1,\\ \log_5 x<1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ x<5^1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1,\\ x<5\end{cases}\Rightarrow x\in(1;5).$$

Переходимо до розв'язування нерівності:

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>2^0 \text{ або } \log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>1,$$

$$\log_5 x<\left(\frac{1}{3}\right)^1\Rightarrow\log_5 x<\frac{1}{3},$$

$$x<5^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x<\sqrt[3]{5}\Rightarrow x\in\left(-\infty;\sqrt[3]{5}\right).$$

$\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$.

Відповідь. $x\in\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$.

№ 8. Розв'язати нерівність $\log_{2x-5}(5x-1)\ge 1$.

Розв'язання. Для розв'язування нерівності розглянемо два випадки

ОДЗ: $\begin{cases}5x-1>0,\\ 2x-5>0,\\ 2x-5\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0{,}2,\\ x>\frac{5}{2},\\ x\ne 3\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(2{,}5;3)\bigcup(3;+\infty)$

стосовно основи логарифма.

I. $0<2x-5<1 \Rightarrow 2{,}5<x<3 \Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x\in(2{,}5;\,3)$.

У цьому випадку вихідна нерівність приймає вигляд:

$$5x-1\le(2x-5)^1 \text{ або } 5x-1\le 2x-5,$$
$$3x\le -4,\ |:3$$
$$x\le -\frac{4}{3}\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right].$$

$\bigcap$ I: $x\in\varnothing$.

II. $2x-5>1\Rightarrow x>3\Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x\in(3;+\infty)$.

Задана нерівність приймає вигляд:

$$5x-1\ge(2x-5)^1 \text{ або } 5x-1\ge 2x-5,$$
$$3x\ge -4,\ |:3$$
$$x\ge -\frac{4}{3}\Rightarrow x\in\left[-\frac{4}{3};+\infty\right).$$

$\bigcap$ II: $x\in(3;+\infty)$.

Таким чином, розв'язок заданої нерівності задається сукупністю

$$\begin{bmatrix} x\in\varnothing, \\ x\in(3;+\infty) \end{bmatrix}\Rightarrow x\in(3;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(3;+\infty)$.

Метод раціоналізації розв'язування логарифмічних нерівностей

Даний метод дозволяє у більшості випадків спростити логарифмічну нерівність, звівши її до раціональної, розв'язок якої можна знайти за допомогою, наприклад, методу інтервалів.

Розглянемо нерівність

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)-\log_{\varphi(x)} g(x)\{<,\le,>,\ge\}0} \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ \varphi(x)\ne 1. \end{cases}$$

I спосіб. *Випадок 1.1* Нехай основа логарифма задовольняє подвійну нерівність $0<\varphi(x)<1$, у цьому випадку логарифмічна функція є спадною, тобто меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції:

$$0<\varphi(x)<1 \ \Rightarrow\ y=\log_{\varphi(x)} x\downarrow \ \Leftrightarrow\ \underset{\Downarrow}{x_1<x_2} \ \Rightarrow\ \underset{\Downarrow}{\log_{\varphi(x)} x_1>\log_{\varphi(x)} x_2}.$$
$$x_1-x_2<0 \qquad\qquad \log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2>0$$

Отже, вирази x_1-x_2 та $\log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2$ різних знаків, тому при заміні $\log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2$ на x_1-x_2 знак нерівності потрібно змінити на протилежний.

Таким чином, задана нерівність з урахування вище зазначеного ОДЗ еквівалентна нерівності

$$f(x)-g(x)\{>,\ge,<,\le\}0.$$

Випадок 1.2 Нехай основа логарифма $\varphi(x)>1$, тоді логарифмічна функція є зростаючою, тобто меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції:

$$\varphi(x)>1 \Rightarrow y=\log_{\varphi(x)} x\uparrow \Leftrightarrow \underset{\Downarrow}{x_1<x_2} \Rightarrow \underset{\Downarrow}{\log_{\varphi(x)} x_1<\log_{\varphi(x)} x_2}.$$
$$x_1-x_2<0 \qquad \log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2<0$$

Бачимо, що вирази x_1-x_2 та $\log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2$ одного знаку, а тому при заміні $\log_{\varphi(x)} x_1-\log_{\varphi(x)} x_2$ на x_1-x_2 знак нерівності залишається без змін.

Таким чином, нерівність з урахування вище зазначеного ОДЗ у цьому випадку еквівалентна нерівності

$$f(x)-g(x)\{<,\le,>,\ge\}0.$$

№ 9. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(2-x)\le 1$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases}2-x>0,\\ x^2>0,\\ x^2\ne 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<2,\\ x\ne 0,\\ x\ne\pm 1\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2).$$

Застосуємо метод раціоналізації. Перейдемо в логарифмі до сталої основи (наприклад, до основи e), щоб можна було вказати характер монотонності логарифмічної функції:

$$\frac{\ln(2-x)}{\ln x^2}\le 1 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)}{\ln x^2}-1\le 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2}\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2-0}\le 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2-\ln 1}\le 0.$$

Оскільки $e>1$, то функція $y=\ln x\uparrow$, а тоді, згідно випадку 1.2, після раціоналізації з урахуванням ОДЗ будемо мати:

$$\frac{2-x-x^2}{x^2-1}\le 0 \text{ або } \frac{x^2+x-2}{x^2-1}\ge 0.$$

Розв'язуємо останню нерівність методом інтервалів, для цього чисельник і знаменник представляємо у вигляді добутку лінійних множників:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\ge 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+1}\ge 0,\ x\ne 1.$$

Розв'язок останньої нерівності: $x\in(-\infty;-2]\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

$\cap$ОДЗ: $x\in(-\infty;-2]\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

II спосіб. Нерівність $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x) \{<, \le, >, \ge\} 0$ з урахуванням ОДЗ еквівалентна нерівності

$$(\varphi(x) - 1)(f(x) - g(x)) \{<, \le, >, \ge\} 0.$$

Ця еквівалентність справедлива, оскільки якщо основа логарифма $0 < \varphi(x) < 1$ ($\Rightarrow -1 < \varphi(x) - 1 < 0 \Rightarrow \varphi(x) - 1 < 0$), то логарифмічна функція $y = \log_{\varphi(x)} x$ є спадною, а тоді, аналогічно до міркувань із випадку 1.1 I способу, вирази $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $f(x) - g(x)$ різних знаків, а тому множення на $\varphi(x) - 1 < 0$ відновлює знак нерівності. Якщо ж основа логарифма $\varphi(x) > 1 (\Rightarrow \varphi(x) - 1 > 0)$, то функція $y = \log_{\varphi(x)} x \uparrow$, а тоді вирази $\log_{\varphi(x)} f(x) - \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $f(x) - g(x)$ одного знаку, тому множення на $\varphi(x) - 1 > 0$ не змінює знак.

№ 10. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(2 - x) \le 1$ з попереднього прикладу без переходу до нової основи.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді:

$$\log_{x^2}(2 - x) \le 1 \Rightarrow \log_{x^2}(2 - x) - 1 \le 0 \Rightarrow \log_{x^2}(2 - x) - \log_{x^2} x^2 \le 0.$$

Переходимо до еквівалентної нерівності:

$$(x^2 - 1)(2 - x - x^2) \le 0$$

Розв'язуємо її методом інтервалів:

$$-(x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 2) \le 0 \Rightarrow (x - 1)^2 (x + 1)(x + 2) \ge 0,$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [1; +\infty).$$

$\cap$ ОДЗ : $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.