

ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$ на проміжку I , якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

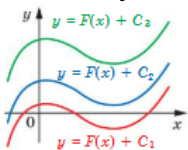
Приклад 1. Функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $I = (-\infty; +\infty)$, оскільки для будь-якого x з цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

Зауваження. Часто при розв'язуванні задач проміжок I опускають. У таких випадках вважається, що $I = (-\infty; +\infty)$.

Теорема (Основна властивість первісної). Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I та C – довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Зауваження. Таким чином, можна зробити висновок, що дві первісні однієї й тієї ж самої функції відрізняються одна від одної на сталу. А графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy .



Означення. Вираз $F(x) + C$ називається **загальним виглядом первісних** функції $f(x)$ на проміжку I .

Означення. Множина всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку I називається **невизначеним інтегралом** та позначається як

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(читається: «інтеграл від еф від ікс де ікс»). Функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**, C – **константою інтегрування**.

Приклад 2. У прикладі 1 було показано, що функція $F(x) = x^3$ – первісна функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $I = (-\infty; +\infty)$, тому

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Зауваження. Під час розв'язування задач на знаходження первісних (невизначених інтегралів) зручно користуватися таблицею первісних (інтегралів).

Приклад 3. Установити чи є функція $F(x)$ первісною функції $f(x)$:

- 1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$; 4) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $I = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
2) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$; 5) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$;
3) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$; 6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

Розв'язання. 2) Щоб перевірити, чи є функція $F(x)$ первісною функції $f(x)$, треба перевірити виконання рівності $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = (\sin x + 3)' = (\sin x)' + (3)' = \cos x + 0 = \cos x \neq f(x).$$

Тобто $F(x)$ не є первісною функції $f(x)$.

Відповідь. $F(x)$ не є первісною функції $f(x)$.

Приклад 4. Знайти загальний вигляд первісних функції $f(x)$:

- 1) $f(x) = x^5$; 4) $f(x) = 2^x$; 7) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$; 8) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
3) $f(x) = 5$; 6) $f(x) = \sqrt{x}$; 9) $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Розв'язання. 1) З того, що

$$\left(\frac{x^6}{6}\right)' = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5,$$

можна зробити висновок, що однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. З основної властивості первісної запишемо загальний вигляд первісної:

$$\frac{x^6}{6} + C \text{ або } \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Відповідь. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

2) Для всіх $x \in (0; +\infty)$ має місце рівність

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

а для $x \in (-\infty; 0)$ –

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Таким чином, на проміжку $(0; +\infty)$ первісною є функція $\ln x$, а на проміжку $(-\infty; 0)$ – $\ln(-x)$, тоді для будь-якого $x \neq 0$ загальний вигляд первісних – $\ln|x| + C$, отже,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Відповідь. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Приклад 5. Для функції $f(x)$ знайти первісну, графік якої проходить через точку M :

1) $f(x) = 2 \cos x, M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right);$ 4) $f(x) = e^x, M(0; -6);$

2) $f(x) = x^2, M(-1; 3);$ 5) $f(x) = 3^x, M\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right);$

3) $f(x) = \sin x, M(\pi; -1);$ 6) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, M\left(\frac{\pi}{3}; 3\sqrt{3}\right), I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Розв'язання. 1) Оскільки

$$(2 \sin x)' = 2(\sin x)' = 2 \cos x = f(x),$$

то функція $2 \sin x$ є однією з первісних заданої функції $f(x)$. А тоді шукана первісна

$$F(x) = 2 \sin x + C,$$

де C – довільна стала.

Знайдемо це число, використовуючи задану умову, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$:

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{6} + C = 3,$$

$$2 \sin \frac{6\pi - \pi}{6} + C = 3,$$

$$2 \sin \left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + C = 3,$$

$$2 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + C = 3,$$

$$2 \sin \frac{\pi}{6} + C = 3,$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, $F(x) = 2 \sin x + 2.$

Відповідь. $F(x) = 2 \sin x + 2.$