

ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНОЇ

Теорема. Якщо функції $F(x)$ та $G(x)$ є первісними функцій $f(x)$ та $g(x)$ на деякому проміжку I відповідно, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Зауваження. Тобто маємо, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C.$$

Зауваження. Аналогічно можна показати, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема. Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I , а k – деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$, тобто

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C.$$

Теорема. Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I , а $k \neq 0$ – деяке число, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$:

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C.$$

Приклад 1. Знайти загальний вигляд первісних:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $y(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}, I = (0; +\infty)$; | 4) $y(x) = 3x^2 - x + 5$; | 7) $y(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$; |
| 2) $y(x) = \cos(2x + 1)$; | 5) $y(x) = \frac{6}{x} - x^3, I = (-\infty; 0)$; | 8) $y(x) = \frac{e^x}{2} + 2^x \ln 2$; |
| 3) $y(x) = \frac{1}{(5x - 1)^3}, I = \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; | 6) $y(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}, I = (0; +\infty)$; | 9) $y(x) \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$. |

Розв'язання. 1) Функція $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ є однією з первісних функції $f(x) = x^{\alpha}$ на проміжку $I = (0; +\infty)$. На даному проміжку мають місце рівності:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

Тоді первісною для функції $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $I = (0; +\infty)$ є функція

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3},$$

а для функції $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$ на цьому проміжку:

$$G_1(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Отже, в силу наведеної вище теореми, функція $G(x) = 2G_1(x) = -\frac{2}{x}$ – первісна функції $g(x) = \frac{2}{x^2}$ на проміжку $I = (0; +\infty)$.

За теоремою про суму первісних остаточно маємо, що загальний вигляд первісних для заданої функції

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C.$$

Зауваження. Розв'язання даного прикладу можна було б записати й наступним чином:

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx &= \int \sqrt{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C.$

2) Оскільки функція $F(x) = \sin x$ – одна з первісних функції $f(x) = \cos x$, то функція $\frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$ – загальний вигляд первісних функції $y(x) = \cos(2x+1)$.

Також розв'язання можна було записати наступним чином:

$$\int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$$

Відповідь. $\int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$

3) Первісною функції $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ є функція $\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$, тоді

для заданої функції $y(x) = \frac{1}{(5x-1)^3}$ маємо, що загальний вигляд первісних

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2(5x-3)^2} \right) + C = -\frac{1}{10(5x-3)^2} + C, \text{ тобто}$$

$$\int \frac{1}{(5x-1)^3} dx = \int \frac{dx}{(5x-1)^3} = \int (5x-1)^{-3} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-1)^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{10(5x-3)^2} + C.$$

Відповідь. $\int \frac{1}{(5x-1)^3} dx = -\frac{1}{10(5x-3)^2} + C.$

Приклад 2. Для функції $f(x)$ на проміжку I (якщо проміжок не вказано, то $I = (-\infty; +\infty)$) знайти первісну, графік якої проходить через точку M :

- 1) $f(x) = \frac{1}{4x-3}, I = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right), M\left(\frac{1}{2}; 2\right);$
- 4) $f(x) = \frac{7}{x-4} + \sqrt{x+4}, I = (4; +\infty), M(5; 6);$
- 2) $f(x) = 1-2x, M(3; 2);$
- 5) $f(x) = e^{3x}, M(0; 1);$
- 3) $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, M(\pi; 7);$
- 6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{8}}, I = (0; 8\pi), M(2\pi; -3).$

Розв'язання. 1) Знайдемо загальний вигляд первісних заданої функції:

$$F(x) = \int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4} \ln|4x-3| + C.$$

Для усіх $x \in I = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ шукана первісна має вигляд $F(x) = \frac{1}{4} \ln(3-4x) + C.$

Константу інтегрування C знайдемо з умови, що первісна проходить через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, тобто $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2$:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(3-4 \cdot \frac{1}{2}\right) + C = 2,$$

$$\frac{1}{4} \ln(3-2) + C = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} \ln 1 + C = 2 \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, шукана первісна $F(x) = \frac{1}{4} \ln(3-4x) + 2.$

Відповідь. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(3-4x) + 2.$