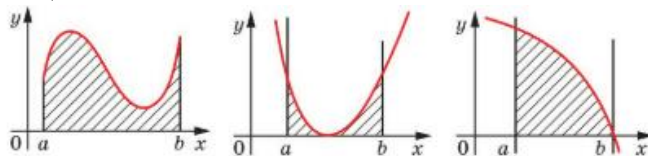


ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Означення. Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$, що є неперервною на відрізку $[a; b]$ та набуває на цьому відрізку невід'ємних значень. Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$) та віссю абсцис (горизонтальна пряма $y = 0$), називається **криволінійною трапецією**.



Теорема. Площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$) обчислюється за формулою:

$$S = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Означення. Нехай функція $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку I , числа $a < b$ належать цьому проміжку. Різниця $F(b) - F(a)$ називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ та

позначається $\int_a^b f(x)dx$ (читається: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

Тобто, згідно з означенням

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Записана рівність називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Зауваження. Різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору первісної функції $f(x)$ на проміжку I .

Зауваження. Під час обчислення визначених інтегралів формулу Ньютона-Лейбніца більш компактно позначають наступним чином:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b,$$

запис $F(x) \Big|_a^b$ читається як «еф велике від ікс з підстановкою меж від a до b ».

Теорема (Властивості визначеного інтеграла).

- 1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in (a; b);$
- 2) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$
- 3) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

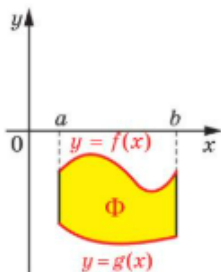
З теореми про площу криволінійної трапеції та означення визначеного інтеграла можна зробити висновок, що

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Ця рівність виражає *геометричний зміст визначеного інтеграла*.

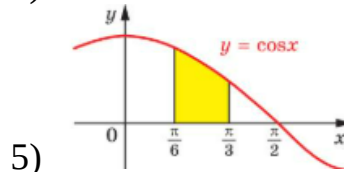
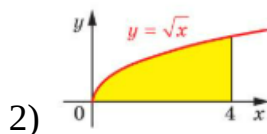
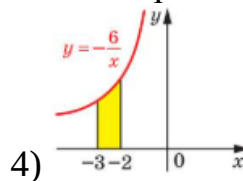
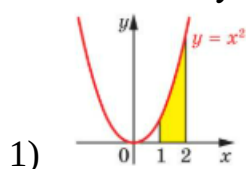
Зауваження. Наведена формула використовується лише у випадку, коли криволінійна трапеція обмежена неперервною функцією $y = f(x)$, яка на відрізку $[a; b]$ набуває лише невід'ємних значень. Для площ більш складних фігур застосовується інша формула.

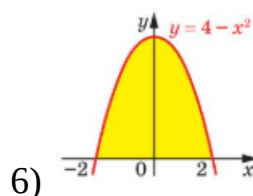
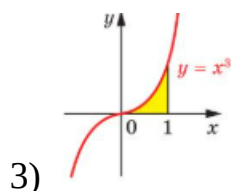
Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ є неперервними на відрізку $[a; b]$ та для всіх $x \in [a; b]$ має місце нерівність $f(x) \geq g(x)$, то площа S фігури, що обмежена графіками функцій $f(x)$ та $g(x)$, а також вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ обчислюється за формулою:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Приклад 1. Знайти площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку:





Розв'язання. 6) Шукана площа

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \int_{-2}^2 4 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = 4 \int_{-2}^2 dx - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 4 \cdot x \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{3} (2^3 - (-2)^3) =$$

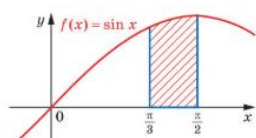
$$= 4 \cdot (2 - (-2)) - \frac{16}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $S = \frac{32}{3}$ (кв. од.).

Приклад 2. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої:

- 1) графіком функції $y = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
- 2) графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ та прямою $y = 0$;
- 3) параболою $y = x^2 + 1$ та прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
- 4) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;
- 5) синусоїдою $y = \sin 2x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
- 6) графіком функції $y = \sqrt{5 - x}$ та прямими $y = 0$, $x = -4$.

Розв'язання. 1) Зобразимо фігуру, площу якої потрібно знайти.



Проведемо горизонтальну пряму $y = 0$ та вертикальні $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$. В результаті отримаємо криволінійну трапецію (на рисунку заштрихована область). Її площа

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = -\left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $S = \frac{1}{2}$ (кв. од.).

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл:

- $$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^2 (x^4 + x^2 + 3) dx; & 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x + 2 \cos x) dx; & 11) \int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}; \\
 2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} & 7) \int_8^{27} \sqrt[3]{x} dx; & 12) \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{x}{6} + \cos 5x \right) dx; \\
 3) \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}; & 8) \int_{-1}^1 (1-5x^4) dx; & 13) \int_{-6}^0 e^{-\frac{x}{6}} dx; \\
 4) \int_{-2}^3 5^x dx; & 9) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} dx; & 14) \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}; \\
 5) \int_{-2}^{-4} (2x+4) dx; & 10) \int_{\frac{1}{5}}^1 (5x-3)^5 dx; & 15) \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}.
 \end{array}$$

Розв'язання. 3) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{e^2}^{e^3} = \ln|e^3| - \ln|e^2| = 3\ln e - 2\ln e = 3 - 2 = 1.$

Відповідь. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x} = 1.$

$$\begin{aligned}
 9) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} dx &= \frac{1}{\frac{1}{3}} \sin \frac{x}{3} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 3 \left(\sin \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} - \sin \frac{\frac{\pi}{2}}{3} \right) = \\
 &= 3 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.
 \end{aligned}$$

Відповідь. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} dx = 1,5.$