

Практичне заняття 4-5

Значення математичних задач у розвитку мислення

Розвиток творчої активності учнів як засіб підвищення мотивації учнів та розвитку математичного мислення. Види творчих задач: розв'язання однієї задачі різними способами, складання власних задач, невизначені задачі, задачі з неоднозначною відповіддю, дослідницькі задачі.

Учням цікаво вивчати теорію в тому випадку, коли вони одразу застосовують її до конкретних задач. Натепер розробляються технології приучення школярів до творчої роботи в області математики, коли їм пропонуються дослідницькі задачі.

Дослідницькі задачі корисні для творчого розвитку школярів, для вчителів і навіть для самої математики. Дослідницькі задачі повинні бути, з однієї сторони, доступними для розв'язування, зрозумілими і цікавими для учнів, а з іншої сторони, бути математично змістовними. Текст дослідження повинен містити ясні формулювання і повні доведення результатів, потрібно звернути увагу на математичну грамотність і математичну мову, тобто бажано, щоб робота була орієнтована на публікацію в науково-популярному або реферованому науковому журналі (в ідеалі).

Деякі види задач, що розвивають математичні здібності:

- *задачі на виявлення помилок,*
 - *задачі з неповною умовою (невизначені, з відсутніми даними),*
 - *завдання на складання задач, обернених до даної,*
 - *задачі з неоднозначною відповіддю (відповідь залежить від мисленнєвої діяльності, здібностей, когнітивного рівня учня);*
 - *завдання на складання «своїх» прикладів, рівнянь, функцій,*
 - *завдання на складання задач, подібних до даної*
-
- **Приклад (задача на виявлення помилок).** Площа квадрата дорівнює $0,16 \text{ м}^2$. Якщо одну сторону квадрата збільшити вдвічі, а другу зменшити на $0,5 \text{ м}$, то якою стане площа отриманої фігури?

- **Приклад (невизначена задача).** Знайти сторони трикутника, якщо відомо, що вони відносяться як 5:4:3.

- **Приклад (обернені до даної).**

- 1) **Задана теорема:** У рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні між собою.

Обернена теорема:

- 2) **Задана теорема:** Якщо у трапеції провести діагоналі, то прилеглі до бічних сторін трикутники рівновеликі.

Обернена теорема: Якщо в опуклому чотирикутнику проведено діагоналі й одна пара трикутників, прилеглі до його протилежних сторін, є рівновеликими, то цей чотирикутник є трапецією.

Питання. Чи є правильною аргументація учнів?

- 1) якщо квадрат однієї зі сторін трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то теоремою Піфагора трикутник є прямокутним;
- 2) коренями квадратного рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$ за теоремою Вієта є числа -3 та 1.

- **Приклад (з неоднозначною відповіддю).**

- 1) Подати вираз $6x^2$ у вигляді добутку двох множників.
- 2) Якими можуть бути дві останні цифри числа 34121**, щоб воно ділилось на 3?
- 3) Скласти многочлен третього степеня, який би ділився на двочлен $x - 2$.

Ще деякі види задач, що розвивають математичні здібності:

- Задачі з несформульованим питанням;
- Задачі із зайвими даними;
- Задачі на здогадку, логічне міркування.

Більшість нестандартних задач не потребує матеріалу, що виходить за рамки загальноосвітньої школи. Проте ряд задач потребує застосування

відомостей, які явно не включені у шкільну програму, але наближені до неї, у зв'язку з цим деякі задачі не можуть бути розв'язані на уроці та призначені для позакласної роботи. Природно припустити, що розв'язування нестандартних задач – це творчий процес. Образно кажучи, без титанічного шліфування закономірного не можна добитися блиску випадкового. Принагідно зазначимо, що взаємозв'язок закономірного і випадкового у творчому процесі цілком узгоджується з визначенням Бр. Скіннера, згідно з яким творчість – це мистецтво знаходити одну річ, коли шукаєш іншу, та зауваженням Р. Декарта щодо мистецтва поєднання не зв'язаних речей та утримання їх протягом творчого процесу.

Зрозуміло, що деякі класи нестандартних задач не завжди розв'язуються логічним шляхом. Існує значна кількість як практичних, так і тренувальних задач, розв'язування яких вимагає певного нетрадиційного (інколи штучного) підходу. Широке застосування таких прийомів як залучення допоміжних наочних моделей, інтерпретація задачі іншою мовою, переформулювання задачі тією самою мовою, розбиття складної задачі на прості, розгляд граничних випадків, введення допоміжних елементів дає можливість одержати результат. Сказане стане ще більше актуальним, коли розв'язання задачі вимагає залучення декількох базових задач, і сягає свого апогею за умови, що зазначений процес передбачає синтез окремих частин нетрадиційних прийомів цілком оригінального методу розв'язання математичних задач.

Завдання.

На платформі «На урок» (або іншій) створити завдання, що відповідають класифікації задач на розвиток мислення

Формування навичок використання та застосування причинно-наслідкових зв'язків.
Розвиток навичок побудови аргументації при розв'язанні математичних задач.

Задачі на формування вміння застосовувати логічні методи пізнання: порівняння, аналіз, синтез, абстракція і узагальнення, конкретизація. Синтетичний та аналітичний методи розв.задач, аналіз помилок при їх застосуванні.

Розвиток навичок побудови аргументації при розв'язанні математичних задач

Remark. If appropriate, use the PJEJ formula:

- **P**—**position** ("I believe that...");
- **J**—**justification** ("Because...");
- **E**—**example** ("I can prove it with an example...");
- **J**—**judgment** ("Based on this, I conclude that...").

Знайти формулу українською, навести приклади застосування.

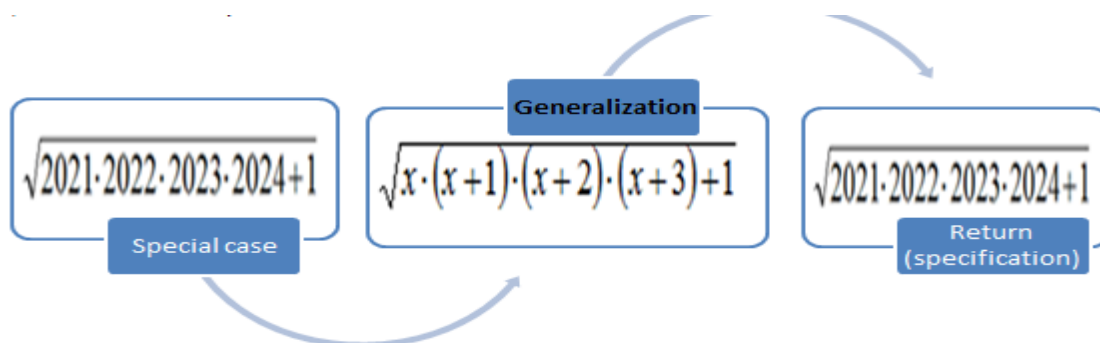
Узагальнення як потужний інструмент навчання

A)

Problem. Find the value of the expression

$$\sqrt{2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 + 1}.$$

- What type of questions will you ask students to help them “catch” the idea of solving the problem?
- How the quotation «Knowledge that does not have a generalizing work of thought behind it is formal knowledge» of the famous scientist George Pólya can help “catch” the idea of solving the problem?
- Would you suggest that your students compose similar problems? (G.Pólya has another statement “A student's mathematical experience cannot be considered complete if he or she has not had a chance to solve a problem invented by himself or herself”).



Тут можна наголосити на узагальненні як способі пошуку ідеї розв'язання задачі

Завдання. Знайти або сконструювати ще приклад узагальнення як способу пошуку розв'язання задачі.

Б)

Generalization can be considered as the technique of the obtaining the new problems, including research ones.

The problem "Find the last digit of the sum $1 + 2! + 3! + 4! + \dots + 2012$ " can be generalized as follows:

- Find the last digit of the sum $1 + 2! + 3! + 4! + \dots + n!$ (technique of the parameter input);
- Solve the equation $1 + 2! + 3! + 4! + \dots + x! = y^2$ in natural numbers (the technique of the rephrasing the condition).

Завдання. Знайти або сконструювати ще приклад узагальнення як способу формулювання дослідницької задачі

В)

Задачі з 111 етапу Всеукраїнської олімпіади 2 тур 26 січня 2025

Задача для 7 класу. Додатні дійсні числа a, b, c є попарно різними. Знайти найменшу кількість попарно різних серед чисел $a+b, b+c, c+a, ab, bc, ca$.
Відповідь. 4

Задача для 8 класу. Дійсні числа a, b, c є попарно різними. Знайти найменшу кількість попарно різних серед чисел $a+b, b+c, c+a, ab, bc, ca$. **Відповідь.** 3

Завдання. Знайти й проаналізувати розв'язання цих задач. Відповісти на Питання: *Чи завжди узагальнення є ускладненням? Яка із задач є більш «складною» і за якими ознаками?*

Г)

Завдання. Проаналізуйте запропоновані задачі в контексті формування вміння застосовувати логічні методи пізнання.

Imagine the next educational situation: one student writes out an equality $2+2*3=7$, other student insists that equality must have form $2+2*3=12$. Class exclaims “second variant is also wrong”. The teacher suggests converting the second equality into a correct one (but without changing the numbers and symbols of arithmetic operations) or explaining in which case it is correct.

What can you help your students to cope with this situation?

Think outside the box

Find the volume of a triangular pyramid with a right trigonal angle at the top and side edges 3,4,5.

Can this task cause difficulties for students?

How do you think they will start to solve it?

What can you help your students to solve this problem?

Синтетичний та аналітичний методи розв.задач, аналіз помилок при їх застосуванні

Завдання. Проаналізуйте запропоновану статтю, наведіть власний приклад «помилкового доведення» нерівності.

Синтетичний та аналітичний методи доведення нерівностей

*Ткаченко А.Г., студент; Стеганцева П.Г., к.ф.-м.н., професор
Запорізький національний університет*

В шкільному курсі математики найбільше проблем виникає при вивченні нерівностей. Засвоєння навичок їх доведення вимагає від здобувачів середньої освіти, крім знань теоретичного матеріалу, більшої творчості, уміння систематизації, логічного мислення та інтуїції. Часто для доведення нерівностей потрібно не просто застосувати відомі та раніше доведені теореми, формули та відношення, а й опрацювати алгоритм доведення та врахувати можливі варіанти дій у залежності від значень змінних та ОДЗ. Крім того, доведення і розв’язання нерівностей є чудовим інструментом для розвитку критичного мислення та отримання предметної й ключових компетентностей, які є головним завданням освіти.

Розглянемо таке завдання: «Доведіть нерівність $\sqrt{a^2 + b^2} \leq -(a + b)$, де a, b – довільні невід’ємні числа».

Учні можуть запропонувати піднести обидві частини до квадрату: $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2$; скоротити й отримати нерівність: $2ab \geq 0$. Звісно, за вказаних в умові обмежень, вона є вірною.

Отже, учні будуть вважати задану нерівність доведеною. **Чи можемо ми погодитись з таким «доведенням»?**

Розглянуте завдання є типовим прикладом помилки, яку допускають учні. Спробуємо проаналізувати причини помилок учнів. Перш за все, зауважимо, що універсального алгоритму доведення нерівностей не існує. Саме тому проблеми й помилки пов'язані не з розрахунками, а є системними, учні не враховують суттєві моменти, властиві нерівностям, наприклад, не слідкують за логічними зв'язками під час перетворень нерівностей.

У математичній науці виділяють такі методи доведення нерівностей:

- синтетичний;
- аналітичний;
- метод мажорювання (посилення або послаблення нерівності);
- доведення від супротивного;
- математичної індукції та інші.

Нерідко застосовується кілька методів одночасно.

Синтетичний та аналітичний методи є найбільш універсальними. Саме в них найбільш яскраво розкривається логічна структура доведення нерівностей, розвиваються дедуктивні здібності, пам'ять, творчий підхід.

Синтетичний метод полягає в перетвореннях раніше доведених, опорних або очевидних нерівностей до вигляду нерівності, яка даводиться. Схема доведення має вигляд: $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow 3H$, де H_1 – деяка початкова (очевидна, опорна або раніше доведена) нерівність, $H_2, \dots, H_n$ – вірні нерівності, отримані з початкової, $3H$ – нерівність, яку потрібно довести.

В ролі опорних часто використовують, наприклад, нерівності:

- $(a - b)^2 \geq 0$ або $a^2 + b^2 \geq 2ab$,
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ при $a \cdot b > 0$,
- $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ при $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$,
- $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$ при $a > 0, b > 0$,
- $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.

Основний **недолік** цього алгоритму (одного з найефективніших) – часто не відразу можна зрозуміти, з якої початкової нерівності доцільно розпочати процес доведення.

Допомогти з подоланням вказаного недоліку може застосування **аналітичного методу**, суть якого полягає у перетворенні заданої нерівності $3H$ до очевидної, опорної або раніше доведеної нерівності H_n за схемою: $3H \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_n$, де $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ – отримані з початкової вірні нерівності (алгоритм міркувань має назву аналіз Евкліда). **Недоліком** аналізу є те, що знаходження нерівності H_n не є завершенням доведення заданої нерівності, оскільки схема може спрацювати й у випадку, коли **задане твердження хибне**. Саме така ситуація й виникла в прикладі на початку статті, оскільки початкова нерівність була невірною при заданих умовах. Ця помилка є однією з розповсюджених. Щоб її уникнути, необхідно перевірити

правильність «зворотних міркувань», тобто обґрунтувати істинність схеми $H_n \rightarrow H_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow 3H$, яка отримала назву аналізу Паппа.

Отже, у результаті ми реалізуємо алгоритм синтетичного методу, але в цьому випадку початкова вірна нерівність відома.

Типові помилки при доведенні нерівностей пов'язані також з такими перетвореннями:

1. Множення лівої та правої частин нерівності на одне й те саме число.
2. Піднесення лівої та правої частин нерівності до парного степеня.

3. Добування кореня парного степеня: наприклад, $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$, а не просто $f(x)$ та іншими.

Все вищевикладене свідчить про те, що при вивченні нерівностей в курсі середньої школи потрібно більше уваги приділяти правилам їх перетворення, так як нерівності «більш чутливі» до арифметичних та інших дій, ніж рівняння, що частіше призводить до помилок. Типові помилки учнів слід опрацьовувати на контрприкладках.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. Н. Доведення нерівностей. Київ : Вища школа, 1979. 250 с.
2. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2014. 100 с.
3. Павлюк І. Ю., Сапіліді Т. М. Використання класичних нерівностей при розв'язуванні шкільних олімпіадних задач : кваліфікаційна робота магістерського рівня. Рівне : Рівненський державний гуманітарний університет, 2021. 72 с.
4. Війчук Г.В., Дукас О.Я. Формування у майбутніх вчителів умінь і навичок доведень нерівностей. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск V. Том I*. Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2005. С. 44-48.
5. Черних Л.О., Армаш Т.С. Навчання учнів доведенню при вивченні нерівностей в курсі алгебри середньої школи. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск VI. Том I*. Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2006. С. 192-197.