Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Індивідуальне завдання
з курсу «Теорія елементарних функцій в профільній школі»

«*Логарифми*»

студента групи 7.А4.04.25
Петрова Петра Петровича

Варіант № 13

1		2		3		4	5			дата
а	б	а	б				а	б	в	

Запоріжжя
2026

Індивідуальне завдання виконується в окремому зошиті. Умову прикладів потрібно виписувати повністю, зберігаючи нумерацію завдань. Хід розв’язання наводиться повністю, докладно (повинно буди вказано, яка формула застосовується, яке перетворення виконується). Обов’язково ДО початку розв’язування завдання повинна бути знайдена область допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Наприкінці повинна бути записана відповідь.

Варіант 1

1. Спростити вираз: **а)** $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$; **б)** $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

2. Знайти:

а) $\log_{12} 16$, якщо відомо, що $\log_{12} 3 = n$; **б)** $\lg 15$, якщо $\lg 2 = a, \lg 3 = b$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\lg\left(64 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right) = 0$; **б)** $\log_a\left\{1 + \log_b\left[1 + \log_c\left(1 + \log_p x\right)\right]\right\} = 0$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases} xy = a, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \dfrac{5}{2}\lg^2 a; \end{cases} a > 1.$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(16 + 4x - x^2\right) \le -4$; **б)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-3x} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2-x^2}$; **в)** $\log_x \dfrac{x-3}{x-2} > -1$.

Варіант 2

1. Спростити вираз: **а)** $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$; **б)** $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

2. Знайти: **а)** $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ при умові, що $\log_a 27 = b$;

б) $\log_{abcd} x$, якщо $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $2(\lg x - \lg 6) = \lg x - 2\lg\left(\sqrt{x} - 1\right)$; **б)** $\log_{0,5} \sqrt{1+x} + 3\log_{\frac{1}{4}}(1-x) = \log_{\frac{1}{16}}\left(1-x^2\right)^2 + 2$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases} xy^2 = 32, \\ 2\left(\log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y\right) = -5. \end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{3,1}(2x-8) - \log_{3,1} 6 < 0$; **б)** $\log_{x-2}(x+2) < 1$; **в)** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-1}{x+2} > 1$.

Варіант 3

1. Спростити вираз:

а) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$; **б)** $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$.

2. Знайти: **а)** залежність a від c, якщо $b = 10^{\frac{1}{1-\lg a}}$, а $c = 10^{\frac{1}{1-\lg b}}$;

б) $\log_{30} 8$, якщо відомо, що $\lg 5 = a; \lg 3 = b$.

3. Розв'язати рівняння: **а)** $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$; **б)** $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1,\\ x^2-y^2=2.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-5x+31\right)>-2$; **б)** $\log_{x+1}(x+3)<2$; **в)** $\log_x\log_3\left(9^x-7\right)\geq 1$.

Варіант 4

1. Спростити вираз:

а) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$; **б)** $2^{\log_2 7}+\log_5 75-\log_5 3$.

2. Знайти: **а)** $\lg 56$, якщо відомо, що $\log_2 7=a$, $\lg 2=b$;

б) значення виразу $3\cdot\log_{\sqrt[3]{ab}}\frac{\sqrt[3]{b}}{a}+2\cdot\log_{\sqrt{ab}}a^3+\log_{\frac{a}{b}}b^3$, якщо $\log_a b=2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $20\cdot\log_{4x}\sqrt{x}+7\cdot\log_{16x}x^3-3\cdot\log_{\frac{x}{2}}x^2=0$; **б)** $\lg x^2=0{,}25\cdot\lg(4x+3)^4$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1)+\log_2(x-1)>-2$; **б)** $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$; **в)** $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

Варіант 5

1. Спростити вираз:

а) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$; **б)** $\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{409}\cdot\left(\sqrt{7}^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)$.

2. Знайти: **а)** $\log_3 30$, якщо відомо, що $\log_2 3=a$, $\log_3 5=c$;

б) значення виразу $3\cdot\log_{a^3/b}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\log_{b/a^3}b$, якщо $\log_b a=4$.

3. Розв'язати рівняння: **а)** $\log_x\left(2x^2-4x+3\right)=2$; **б)** $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}\left(2x^2+1\right)}$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}x^p=y^q,\\ \log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\lg 5^{4x}-\lg 25>\lg 5^{3x+1}+\lg 5$; **б)** $\log_{0,2}(5x+1)-\log_{0,2}19<0$; **в)** $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0{,}3>0$.

Варіант 6

1. Спростити вираз:

а) $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a}-3^{\log_{27}\left(a^2+1\right)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-5^{0{,}5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$;

б) $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\cdot\log_2 7}$.

2. Знайти: **а)** $\log_{\frac{\sqrt{y}}{x^2}}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}+\dfrac{1}{4}\cdot\log_{\frac{\sqrt{y}}{x^2}}\left(y\sqrt{x}\right)$, якщо відомо, що $\log_x y=14$;

б) значення виразу $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9$.

3. Розв'язати рівняння: **а)** $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$; **б)** $\log_x\left(9x^2\right)\cdot\log_3^2 x=4$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2\log_2(x+1)<2$;

б) $\log_{x-2}(2x-2)>\log_{x-2}(12-2x)$; **в)** $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1}9>0$.

Варіант 7

1. Спростити вираз:

а) $m^{\frac{2}{\log_n m}+1}\cdot n-2m^{\log_m n+1}n^{\log_n m+1}+m\cdot n^{\frac{2}{\log_m n}+1}$; **б)** $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}}+25^{\frac{1}{2\log_3 5}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Знайти: **а)** значення виразу $\log_5 9\cdot\log_9 13\cdot\log_{13}17\cdot\log_{17}21\cdot\log_{21}25$;

б) значення $\log_{\sqrt[4]{ab}}\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\log_{\sqrt[4]{ab}}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}-\log_{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\dfrac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt{a}}+3\cdot\log_{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\sqrt{ab}$, якщо $\log_a b=3$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $1+\dfrac{\log_8(10-4x)}{\log_8(4x)}=\dfrac{2}{1+\log_4 x}$; **б)** $\log_{\sqrt{x}}4\cdot\log_2\sqrt[4]{\dfrac{16}{8-x}}=1$; **в)** $2^x+2^{x-3}=18$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}x+y=10,\\ 2\left(3\log_{y^2} x-\log_{1/x} y\right)=7.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{3}}\log_3(x-1)>0$; **б)** $\log_{x-3}\left(x^2-4x+3\right)<0$; **в)** $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}\left(x^2+4\right)}<0$.

Варіант 8

1. Спростити вираз:

а) $\dfrac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$; **б)** $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}}-5^{\frac{1}{\log_5 3}}+7^{\log_7 49}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Знайти: **а)** $\log_{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\dfrac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt{a}}+3\log_{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\sqrt{ab}$, якщо $\log_b a=2$;

б) значення $6^{\frac{\lg 4+\lg 5}{\lg 2+\lg 3}}+4^{\frac{2+\lg 4}{2\lg 2}}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $2x^2=(2x+5)\log_x 4\cdot\log_8 x$; **б)** $\log_{\frac{x}{4}} 2x-\log_{4x}\dfrac{x}{\sqrt{2}}=-\dfrac{13}{4}\log_8 4$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^{\lg(x-y)}=0{,}1;\\ (x+y)^{2\lg\left(x^2-y^2\right)}=10^4.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{4}}\log_2(x-5)>0$; **б)** $\log_{2x-5}(5x-2)\ge 1$; **в)** $\log_x\log_2\left(4^x-3\right)\le 1$.

Варіант 9

1. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{-\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$;

б) $\left(b^{\frac{\log_{100}a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100}b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

2. Знайти: **а)** значення виразу $\dfrac{3\log_5 15\cdot\log_5 9-2\log_5^2 15-\log_5^2 9}{\log_5 9-\log_5 15}$;

б) $\log_{ab}\dfrac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}} b+\log_a\sqrt[3]{b}$, якщо $\log_a b=2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\log_{9x}27-\log_{3x}3+\log_9 243=0$; **б)** $\log_{2x-7}\left(x^2-4x+20\right)\cdot\log_x(2x-7)=2$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\log_x y-4\log_y x=3,\\ xy=2.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2$;

б) $\log_2\dfrac{3x-2}{x-1}+3\log_8\dfrac{(x-1)^3}{3x-2}<2$; **в)** $0{,}4^{\log_2^2 x+1}<6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

Варіант 10

1. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\log_2^2 9-2\log_2 9+2\log_2^2 18-3\log_2 9\cdot\log_2 18+4\log_2 18}{\log_2 9-2\log_2 18}$;

б) $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$.

2. Знайти: **а)** значення виразу $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}}+4\cdot 5^{\log_5^2 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16$;

б) $\log_{\sqrt{a}} b\sqrt[4]{a}+\log_{\sqrt{b}} a+\log_a\sqrt{ab}$, якщо $\log_a b=2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\log_{25}^2 x^2=\log_5 x\cdot\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{x+5}-1\right)$; **б)** $\log_3 8^{x-1}\cdot\log_4 27=x+3$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}2-\log_2 y=2\log_2(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2\left(x^2-xy+y^2\right)=1.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)>\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x-2\right)$; **в)** $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\le -4$.

Варіант 11

1. Спростити вираз:

а) $\log_{\sqrt[3]{b}}\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}-\dfrac{3}{\log_{\sqrt[3]{ab}}\left(a\sqrt{b}\right)}+2\log_a\sqrt{b}$, якщо $\log_b a=2$;

б) $\dfrac{\log_{35}^2 5-2\log_{35}5\cdot\log_{35}7-3\log_{35}^2 7}{2\left(\log_{35}5-3\log_{35}7\right)}$.

2. Знайти: **а)** значення виразу $2^{\frac{1}{2\log_5 2}}\cdot 5^{\log_5^2 2}-\sqrt{5}\cdot 2^{\log_5 2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 25}$;

б) значення $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-\sqrt[x]{3}\right)$; **б)** $\log_{1/2}^2(4x)+\log_2\dfrac{x^3}{8}=8$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0,\\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{|x-1|}0{,}5>0{,}5$; **б)** $\log_2(2-x)-\log_2(x-1)>2\log_2 3$; **в)** $\lg 10^{\lg\left(x^2+21\right)}>1+\lg x$.

Варіант 12

1. Спростити вираз: **а)** $\dfrac{1-\log_a^3 b}{\left(\log_a b+\log_b a+1\right)\cdot\log_a\dfrac{a}{b}}$;

б) $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}$.

2. Знайти: **а)** значення $(\log_3 2+\log_2 81+4)(\log_3 2-2\log_{18} 2)\log_2 3-\log_3 2$;

б) значення $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}\cdot 7^{\log_7^2 2}+3^{\log_9 4}-9\cdot 2^{\log_7 2}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}=-1$; **б)** $\lg\lg x=-\lg(\lg x^3-2)$; **в)** $3^{x+2}+3^{x-1}=28$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_2^2(x-x^2+2)+3\log_{\frac{1}{2}}(x-x^2+2)\le -2$;

б) $\log_3(2x-4)-\log_3(14-x)>0$; **в)** $\log_{x^2}(x^2-4x+3)>1$.

Варіант 13

1. Спростити вираз:

а) $\log_{a\sqrt{b}}\frac{\sqrt{b}}{a^2}+\log_{b\sqrt{a}}(a\sqrt{b})+\frac{1}{4}\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[5]{a}$, якщо $\log_a b=\frac{1}{2}$;

б) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}$.

2. Знайти: **а)** $\log_{\sqrt{3}} 50$, якщо $\log_3 15=a$, $\lg 3=\frac{1}{b}$;

б) значення $(\log_5 2+\log_2 5+2)(\log_5 2-\lg 2)\log_2 5-\log_5 2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\log_5(5^x-2)\cdot\log_5(5^{x+1}-10)=6$; **б)** $\log_2(\lg x+2\sqrt{\lg x}+1)-2\log_4(\sqrt{\lg x}+1)=1$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y),\\ \frac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{5x-3}{x+2}\ge 1$; **б)** $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x)>\log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)$; **в)** $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

Варіант 14

1. Спростити вираз:

а) $\frac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12})$; **б)** $\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_{1/a}^2\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

2. Знайти: **а)** $\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{b}{a}+\log_{\sqrt{b}} a\sqrt[3]{b}$, якщо $\log_b a=9$;

б) значення $\dfrac{\log_4^2 12+3\log_4^2\dfrac{1}{3}+4\log_4 12\cdot\log_4\dfrac{1}{3}}{\log_4 12+3\log_4\dfrac{1}{3}}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\sqrt{\log_x(3x)}\cdot\log_3 x+\sqrt{2}=0$; **б)** $\lg\left(3^x-4\right)+\lg 2=\dfrac{x}{2}\lg\dfrac{1}{9}+\lg 2{,}5$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\log_8 x>0$; **б)** $\log_{9x}(3x)+\log_{3x^2}\left(9x^2\right)\le\dfrac{5}{2}$; **в)** $\log_{0,3}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}<0$.

Варіант 15

1. Спростити вираз: **а)** $7^{\frac{2}{\log_2 7}}\cdot 4^{\log_4^2 6}-4\cdot 6^{\log_4 6}+\sqrt[3]{5}^{\log_3 27}$;

б) $\left(\log_2 5+16\log_5 2+8\right)\left(\log_2 5-4\log_{80} 5\right)\log_5 2-\log_2 5$.

2. Знайти:

а) x, якщо $\log_4 x=\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\log_{16}\left(\dfrac{\log_2 112}{\log_{14} 2}-\dfrac{\log_2 224}{\log_7 2}\right)$;

б) $3\log_{\sqrt[3]{ab}}\dfrac{\sqrt{b}}{a}+2\log_{\sqrt[3]{ab}} a^3$, якщо $\log_a b=2$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\log_x 5\sqrt{5}-\dfrac{5}{4}=\log_x^2\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\log_2\left(x^2+6x-9\right)-\log_2 y=1,\\ 5x-y=2.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_3(x+7)<\log_3(5-x)-\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$; **б)** $\log_{|x|-2}|x-3|\le 0$; **в)** $\log_{\frac{1}{5}} x+\log_4 x>1$.

Варіант 16

1. Спростити вираз: **а)** $\dfrac{1}{\frac{1}{\log_2\sqrt{210}}+\frac{1}{\log_3\sqrt{210}}+\frac{1}{\log_5\sqrt{210}}+\frac{1}{\log_7\sqrt{210}}}$;

б) $\dfrac{\log_{\frac{4}{5}} x\cdot\log_{\frac{4}{3}} x}{\log_4^2 x}-\dfrac{\log_{\frac{5}{3}} x\cdot\log_{\frac{4}{5}} x}{\log_5^2 x}-\dfrac{\log_{\frac{4}{3}} x\cdot\log_{\frac{3}{5}} x}{\log_3^2 x}-\log_{\frac{4}{5}}\dfrac{125}{64}$.

2. Знайти: **а)** значення виразу $3^{\frac{1}{\log_5 3}}\cdot 3^{\log_3^2 4}-5\cdot 4^{\log_3 4}+\lg 0{,}1$;

б) $\left(\log_2 7+\log_7 16+4\right)\left(\log_2 7-2\log_{28} 7\right)\log_7 2-\log_2 7$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}=2\cdot 3^{\lg x^2+2}$; **б)** $\log_2 3+2\log_4 x=\sqrt[\log_3 x]{x^{\log_9 16}}$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right)<0$; **б)** $\log_{x+1}\left(10+3x-x^2\right)\le 0$; **в)** $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

Варіант 17

1. Спростити вираз: **а)** $\dfrac{\lg\left(7-4\sqrt{3}\right)}{\lg\left(2-\sqrt{3}\right)}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{7+2\sqrt{10}}+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{1}{\frac{1}{\log_2 770}+\frac{1}{\log_5 770}+\frac{1}{\log_7 770}+\frac{1}{\log_{11} 770}}$.

2. Знайти:

а) $\log_3 x$, якщо $\log_9 x-\log_{\frac{1}{9}} x=2$; **б)** $\log_{15} 49$, якщо $\log_9 7=a$, а $\log_7 45=b$.

3. Розв'язати рівняння: **а)** $9^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=27$; **б)** $x^{\lg\sqrt{x}}=\sqrt[100]{10^{10\cdot\log_{\sqrt{10}} x}}$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\ x+y-20=0.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{x+1}\dfrac{3x}{5x-8}>1$; **б)** $\lg x+\lg(45-x)<2+\lg 2$; **в)** $\left[\log_{0,2}(x-1)\right]^2>4$.

Варіант 18

1. Спростити вираз: **а)** $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a+\log_a^4 b+2}+2}-\log_b a-\log_a b$;

б) $\dfrac{\lg n}{\lg m}+\dfrac{2}{\log_n m}-\log_m n^3+m^{2\log_m n}-\log_m^2 m^n$.

2. Знайти: **а)** $\log_{140} 63$, якщо $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$, $\log_7 2=c$;

б) значення виразу $3^{\frac{1}{2\log_7 3}}\cdot 3^{\log_3^2 8}+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25}-\sqrt{7}\cdot 8^{\log_3 8}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\log_x\log_2\left(4^x-1\right)=1$; **б)** $\lg\sqrt{5x+8}+\dfrac{1}{2}\lg(2x+3)=\lg 15$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\log_{x^2-2x+1}(3-x)\le 1$; **б)** $\log_2^2 x^2-5\log_2 x+1\le 0$; **в)** $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$.

Варіант 19

1. Спростити вираз:

а) $(\log_5 7+9\log_7 5+6)(\log_5 7-3\log_{875} 7)\log_7 5-\log_5 7$;

б) $\dfrac{\log_a b^{0,5\log_b a^2}\cdot \lg a\cdot \log_a^{-0,5} 100}{\left(\lg a\cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{0,5}\cdot \lg^{-0.5} a^2}$.

2. Знайти:

а) $\dfrac{\log_5^2 7\sqrt{5}+2\log_5^2 7-3\log_5 7\sqrt{5}\cdot\log_5 7}{\log_5 7\sqrt{5}-\log_5 49}$; **б)** $\log_{49} 16$, якщо $\log_{14} 28=a$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $x^{3-\lg\frac{200}{x}}=400$; **б)** $\log_x m\cdot\log_{\sqrt{m}}\dfrac{m}{\sqrt{2m-1}}=1$; **в)** $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^3+x^2-4x+2\right)\ge\log_{\frac{1}{3}}\left(x^3-1\right)$;

б) $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\ge 2$; **в)** $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$.

Варіант 20

1. Спростити вираз:

а) $\dfrac{1}{\log_a b}+\dfrac{1}{\log_{a^2} b}+\dfrac{1}{\log_{a^3} b}+\dfrac{1}{\log_{a^4} b}$; **б)** $\dfrac{\log_7^2 14+\log_7 14\cdot\log_7 2-2\log_7^2 2}{\log_7 14+2\log_7 2}$.

2. Знайти: **а)** вираз $\log_8 a$ через $\log_8 c$, якщо $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$, а $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$;

б) $(\log_3 5+\log_5 3+2)(\log_3 5-\log_{15} 5)\log_5 3-\log_3 5$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $\dfrac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3}=\dfrac{x^{3\lg x}}{10}$; **б)** $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$.

4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=1+\lg 8,\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3.\end{cases}$

5. Розв'язати нерівності: **а)** $\log_{x+1}12>\log_{x+1}2$;

б) $7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right)\le 8+\log_{12}\dfrac{(x-7)^7}{x-6}$; **в)** $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17$.

Розв'язання типового варіанта

Приклад. Спростити вираз $2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5}-7^{\log_{343}(7,25)^3}-3^{4\log_9 2,5}$.

Розв'язання. Будемо перетворювати заданий вираз, використовуючи властивості логарифма:

$$2^{\log_{\sqrt{2}} 2,5} - 7^{\log_{343}(7,25)^3} - 3^{4\log_9 2,5} = 2^{\log_{2^{1/2}} 2,5} - 7^{\log_{7^3}(7,25)^3} - 3^{4\log_{3^2} 2,5} =$$

$$= 2^{2\log_2 2,5} - 7^{\log_7 7,25} - 3^{4\cdot\frac{1}{2}\log_3 2,5} = 2^{\log_2 (2,5)^2} - 7,25 - 3^{2\log_3 2,5} =$$

$$= 6,25 - 7,25 - 3^{\log_3 (2,5)^2} = -1 - 6,25 = -7,25.$$

Відповідь. $-7,25.$

Приклад. Знайти $\log_{\frac{a^2}{b^2}} b - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} + \log_b a^2$, якщо $\log_b a = 5$.

Розв'язання. Потрібно всі логарифми за властивостями звести до логарифма $\log_b a$. Перетворимо заданий вираз:

$$\log_{\frac{a^2}{b^2}} b - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} + \log_b a^2 = \frac{1}{\log_b \frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_b a =$$

$$= \frac{1}{\log_b a^2 - \log_b b^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_a \frac{a}{b}} + 2\cdot 5 =$$

$$= \frac{1}{2\log_b a - 2\log_b b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_a a - \log_a b} + 10 = \frac{1}{2\cdot 5 - 2\cdot 1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{\log_b a}} + 10 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + 10 = \frac{81}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{81}{8} - \frac{5}{8} = \frac{76}{8} = \frac{19}{2}.$$

Відповідь. $\frac{19}{2}$.

Приклад. Знайти $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

Розв'язання. Наша задача – виразити $\log_{175} 56$ через $\log_{14} 7$ та $\log_{14} 5$. Перетворимо $\log_{175} 56$ за властивостями логарифмів:

$$\log_{175} 56 = \log_{175}(4\cdot 14) = \log_{175} 4 + \log_{175} 14 = \log_{175} 2^2 + \frac{1}{\log_{14} 175} =$$

$$= 2\log_{175} 2 + \frac{1}{\log_{14}(25\cdot 7)} = \frac{2}{\log_2 175} + \frac{1}{\log_{14} 25 + \log_{14} 7} = \frac{2}{\log_2(25\cdot 7)} + \frac{1}{\log_{14} 5^2 + a} =$$

$$= \frac{2}{\log_2 25 + \log_2 7} + \frac{1}{2\cdot\log_{14} 5 + a} = \frac{2}{\log_2 5^2 + \log_2 7} + \frac{1}{2b + a} =$$

$$= \frac{2}{2\log_2 5 + \log_2 7} + \frac{1}{2b + a}.$$

Знайдемо вираз для $\log_2 5$ та $\log_2 7$ через відомі логарифми $\log_{14} 7$ та $\log_{14} 5$:

$$\log_{14} 5 = b \Rightarrow \frac{1}{\log_5 14} = b \Rightarrow \frac{1}{\log_5(2\cdot 7)} = b \Rightarrow \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 7} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2 + \log_5 7 = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{b} - \log_5 7 = \frac{1}{b} - \frac{\log_{14} 7}{\log_{14} 5} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1-a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 5 = \frac{b}{1-a}.$$

Аналогічно

$$\log_{14} 7 = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 14} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 (2\cdot 7)} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 2 + \log_7 7} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_2 7}+1} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_2 7} + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{\log_2 7} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_2 7 = \frac{a}{1-a}.$$

Отже,

$$\log_{175} 56 = \frac{2}{2\log_2 5 + \log_2 7} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2}{2\cdot\frac{b}{1-a} + \frac{a}{1-a}} + \frac{1}{2b+a} =$$

$$= \frac{2}{\frac{2b+a}{1-a}} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2(1-a)}{2b+a} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2-2a+1}{a+2b} = \frac{3-2a}{a+2b}.$$

Відповідь. $\frac{3-2a}{a+2b}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)} = \log_4 x^3$.

Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічні функції повинні бути додатними:

$$\begin{cases} 2x^2 > 0, \\ 16x > 0, \\ x^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty).$$

Задане рівняння є ірраціональним, рівносильна йому система

$$\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)} = \log_4 x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x^3 \geq 0, \\ \log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x) = \left(\log_4 x^3\right)^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Розв'яжемо нерівність та рівняння окремо. Для нерівності маємо:

$$\log_4 x^3 \geq 0 \Rightarrow 3\log_4 x \geq 0 \Rightarrow \log_4 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 4^0 = 1 \Rightarrow x \in [1; +\infty).$$

В рівнянні всі логарифми зведемо до однієї основи 2 та перетворимо логарифми згідно з властивостями:

$$\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_{2^2}(16x) = \left(3\log_{2^2} x\right)^2,$$

$$\left(\log_2 2 + \log_2 x^2\right)\cdot\frac{1}{2}\log_2(16x) = \left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2,$$

$$(1+2\log_2 x)\cdot\frac{1}{2}(\log_2 16 + \log_2 x) = \frac{9}{4}\log_2^2 x, \Big| \times\frac{1}{4}$$

$$2(1+2\log_2 x)\cdot(4+\log_2 x) = 9\log_2^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 2\log_2 x + 16\log_2 x + 4\log_2^2 x = 9\log_2^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\log_2^2 x - 18\log_2 x - 8 = 0.$$

Таким чином, прийшли до квадратного рівняння відносно $\log_2 x$. Для його розв'язання зробимо заміну $\log_2 x = t$, тоді останнє рівняння прийме вигляд

$$5t^2-18t-8=0.$$

Його дискримінант

$$D=(-18)^2-4\cdot5\cdot(-8)=484=22^2$$

та корені

$$t_{1,2}=\frac{18\pm22}{10}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=4,\\ t_2=-\dfrac{2}{5}.\end{array}\right.$$

Робимо обернену заміну й повертаємось до початкової змінної x:

$$\log_2 x=4,\quad x=2^4,\quad x=16;$$

$$\log_2 x=-\frac{2}{5},\quad x=2^{-\frac{2}{5}}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

Отже, система (1.8) набуває вигляду

$$\left\{\begin{array}{l}x\ge1,\\ \left[\begin{array}{l}x=16,\\ x=\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow x=16.$$

Відповідь. $x=16$.

Приклад. Розв’язати рівняння $\log_{2x+1}\left(2x^2-8x+15\right)=2$.

Розв’язання. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l}2x^2-8x+15>0,\\ 2x+1>0,\\ 2x+1\ne1.\end{array}\right.$

Для розв’язання першої нерівності застосуємо метод інтервалів. Для цього її ліву частину потрібно розкласти на множники:

$$2x^2-8x+15=0;$$

дискримінант

$$D=(-8)^2-4\cdot2\cdot15=-56<0.$$

Оскільки старший коефіцієнт $a=2>0$, а дискримінант від’ємний, то вираз $2x^2-8x+15>0$ для будь-якого $x\in R$.

Розв’язком другої нерівності $2x+1>0$ є всі такі значення x, що $x>-\frac{1}{2}$, тобто $x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Третя умова рівносильна тому, що $x\ne0$ або $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Отже, система приймає вигляд

$$\left\{\begin{array}{l}x\in(-\infty;+\infty),\\ x\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right),\\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty);\end{array}\right.$$

тобто

$$\text{ОДЗ: } x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Задане рівняння, згідно з означенням логарифма, рівносильне рівнянню

$$2x^2 - 8x + 15 = (2x+1)^2,$$

після спрощення будемо мати:

$$2x^2 - 8x + 15 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 14 = 0 \,\big|: 2 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Корені отриманого квадратного рівняння знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$x_1 = -7 \notin \text{ОДЗ};\ x_2 = 1.$$

Відповідь. $x = 1$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 16, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ \sqrt{xy} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ xy \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x \ne 0, \\ y \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty), \\ y \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння системи, що розв'язується, та перетворимо його:

$$2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 16 \Rightarrow 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2^4 \Rightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4.$$

Для другого рівняння маємо:

$$\lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3 \Rightarrow \lg\sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 3 \Rightarrow \lg\sqrt{xy} = \lg 30 \Rightarrow \sqrt{xy} = 30 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30.$$

Тобто задана система еквівалентна наступній системі

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30. \end{cases}$$

Робимо заміну $\sqrt{x} = u,\ \sqrt{y} = v,\ u, v > 0$.

Зауваження. На змінні u, v потрібно було накладати обмеження $u, v \ge 0$, але оскільки, згідно з ОДЗ, $x, y \ne 0$, то нерівність стає строгою.

Після заміни приходимо до системи

$$\begin{cases} 2u - v = 4, \\ u \cdot v = 30, \end{cases}$$

яку розв'яжемо методом підстановки. З першого рівняння системи отримуємо, що

$$v = 2u - 4,$$

тоді друге рівняння приймає вигляд:

$$u \cdot (2u - 4) = 30 \text{ або } 2u^2 - 4u - 30 \,\big|: 2 \Rightarrow u^2 - 2u - 15 = 0.$$

Корені отриманого квадратного рівняння за теоремою Вієта

$$u_1 = -3 \notin \text{ОДЗ},\ u_2 = 5.$$

Звідси $v = 2 \cdot 5 - 4 = 6$.

Обернена заміна:

$$\sqrt{x} = 5, \qquad \sqrt{y} = 6,$$

$$x = 5^2 = 25; \qquad y = 6^2 = 36.$$

Зауваження. Розв'язок системи зазвичай записується у вигляді координат точки, де на першому місці йде значення змінної x (або будь-якої іншої, яку прийнято за «першу» змінну), а на другому – змінної y («другої» змінної).

Відповідь. $(25;\,36)$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36, \\ 3^y \cdot 4^x = 48. \end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ: $x,\, y \in R$.

Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{3^x \cdot 4^y}{3^y \cdot 4^x} = \frac{36}{48} \Rightarrow 3^{x-y} \cdot 4^{y-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Rightarrow x - y = 1.$$

Тепер перше рівняння системи помножимо на її друге рівняння:

$$3^x \cdot 4^y \cdot 3^y \cdot 4^x = 36 \cdot 48 \Rightarrow 3^{x+y} \cdot 4^{y+x} = 1728 \Rightarrow 12^{x+y} = 12^3 \Rightarrow x + y = 3.$$

Отже, початкова система еквівалентна наступній системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

яку ми розв'яжемо методом додавання. До першого рівняння системи додаємо друге:

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Підставляємо отримане значення, наприклад у перше рівняння системи:

$$2 - y = 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1.$$

Відповідь. $(2;\,1)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_x(x+4) < 1$.

Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, а основа логарифма – більшою нуля та не дорівнювати одиниці:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow\ x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$$

Розглянемо два випадки щодо основи логарифма.

I. $x \in (0;1) \Rightarrow \bigcap$ОДЗ: $x \in (0;1)$.

У цьому випадку маємо логарифмічну нерівність типу 1, випадок 1.1:

$$\log_x(x+4) < 1 \Rightarrow\ x + 4 > x^1 \Rightarrow\ \cancel{x} + 4 > \cancel{x} \Rightarrow\ 4 > 0.$$

У результаті перетворень отримали правильну числову нерівність, отже, вона має розв'язки $\forall x \in R$. Перетинаємо з проміжком, на якому розглядаємо: $x \in (0;1)$.

II. $x \in (1;+\infty) \Rightarrow \bigcap$ОДЗ: $x \in (1;+\infty)$.

У цьому випадку маємо також логарифмічну нерівність типу 1, але випадок 1.2:

$$\log_x(x+4) < 1 \Rightarrow\ x + 4 < x^1 \Rightarrow\ \cancel{x} + 4 < \cancel{x} \Rightarrow\ 4 < 0.$$

Отримали неправильну числову нерівність, отже, розв'язків немає. Перетин з проміжком дає $x \in \varnothing$.

Розв'язок заданої нерівності:

$$\begin{bmatrix} x \in (0;1), \\ x \in \varnothing \end{bmatrix} \Rightarrow\ x \in (0;1).$$

Відповідь. $x \in (0;1)$.