Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет
Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Індивідуальне завдання
з курсу «Теорія елементарних функцій в профільній школі»

«*Показникова функція*»

студента групи 7.А4.04.25
Петрова Петра Петровича

Варіант № 13

1	2	3	4	5	6	дата

Запоріжжя
2026

Індивідуальне завдання виконується в окремому зошиті. Умову потрібно виписувати повністю, зберігаючи нумерацію. Хід розв’язання повинен бути приведений докладно (повинно буди вказано, яка формула застосовується, яке перетворення виконується тощо). Обов’язково ДО початку розв’язування завдання повинна бути знайдена область допустимих значень (ОДЗ) рівняння, нерівності. Наприкінці повинна бути записана відповідь.

Варіант 1

1. Розв'язати рівняння: **а)** $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

б) $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$; **в)** $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$; **г)** $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-1}+4=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=648,\\ 3^x\cdot 2^y=432.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\geq\frac{9}{7}$; **б)** $162\cdot 3^{5-x}-2\cdot 3^{x-5}>0$; **в)** $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\leq 7\cdot 10^x$.

Варіант 2

1. Розв'язати рівняння: **а)** $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$;

б) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=\frac{17}{4}\cdot 50^{\frac{1}{x}}$; **в)** $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; **г)** $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}8^x=10y,\\ 2^x=5y.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності: **а)** $2^{x-1}+2^{x+3}>17$;

б) $54\cdot 3^{3-x}-2\cdot 3^{x-3}>0$; **в)** $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}\geq 3^{2x^2-6x+3}$.

Варіант 3

1. Розв'язати рівняння: **а)** $15^{2x-3}=3^x\cdot 5^{3x-6}$;

б) $9^x+6^x=2^{2x+1}$; **в)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}$; **г)** $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x+\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=2$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}0{,}6^{x+y}\cdot 0{,}6^x=0{,}6;\\ 10^x\cdot 10^y=(0{,}01)^{-1}.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $4^x+2^{x+3}>20$; **б)** $0{,}6^{|x-3|}\leq 0{,}6^{0{,}5}$; **в)** $16^x-2\cdot 12^x\leq 3^{2x+1}$.

Варіант 4

1. Розв'язати рівняння: **а)** $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; **б)** $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$;

в) $\left[\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right]^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}$; **г)** $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^x-2^y=77,\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}}=7.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $9^{x+1}-2\cdot 3^x<7$; **б)** $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; **в)** $2\cdot 25^x+10^x\leq 15\cdot 2^{2x}$.

Варіант 5

1. Розв'язати рівняння: **а)** $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315;$

б) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$; **в)** $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$; **г)** $\frac{1}{4^x}+2^{-x}-6=0.$

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y}=457,\\6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y}+890=0.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x}\le 7\frac{1}{9}$; **б)** $2^{x-1}+2^x\ge 2^{x+1}-4$; **в)** $2^{2x+1}-5\cdot 8^x+2\cdot 16^x<0.$

Варіант 6

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0;$

б) $5\cdot 36^x+2\cdot 81^x=3\cdot 16^x$; **в)** $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; **г)** $13^{2x+1}-13^x-12=0.$

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\3^x-2^{\frac{y}{2}}=25.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $2^{x^2+3x}>8\cdot 2^x$; **б)** $4^{-x}-12\cdot 2^{-x}+32>0$; **в)** $3\cdot 4^x-10\cdot 36^x+3\cdot 18^{2x}<0.$

Варіант 7

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^x+2^{x-3}=18$; **б)** $3\cdot 4^x+2\cdot 25^x-7\cdot 10^x=0;$

в) $3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3x-1}=27^5,\ x\in N$; **г)** $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0.$

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\x^{y^2+2}=125.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $2^{x^2}>2^{x+2}$; **б)** $\frac{1}{3^x+5}\le\frac{1}{3^{x+1}-1}$; **в)** $5\cdot 3^{2x+1}-34\cdot 15^x+3\cdot 5^{2x+1}\ge 0.$

Варіант 8

1. Розв'язати рівняння: **а)** $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$; **б)** $5\cdot 25^x-13\cdot 15^x+6\cdot 3^{2x}=0;$

в) $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}}=81$; **г)** $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0.$

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}4^{x+y}=2^{y-x},\\4^{\log_{\sqrt{2}}x}=y^4-5.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7}-7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8}\le 49$; **б)** $16^x+4^x>2$; **в)** $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}\le 0.$

Варіант 9

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

б) $3\cdot 4^x+6^x-2\cdot 9^x=0$; **в)** $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$; **г)** $9^x-3^x-6=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $0{,}3^{\frac{x}{x-2}}<0{,}3^{\frac{6}{x-1}}$; **б)** $2^{6x-10}-9\cdot 2^{3x-5}+8\le 0$; **в)** $4\cdot 9^x-7\cdot 12^x+3\cdot 16^x>0$.

Варіант 10

1. Розв'язати рівняння: **а)** $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$;

б) $2\cdot 2^{2x}-5\cdot 6^x+3\cdot 9^x=0$; **в)** $7^x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0$; **г)** $2^{x+1}+4^x-80=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}8^{\log_9(x-4y)}=1,\\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $3^{2x-1}-3^{2x-3}<\frac{8}{3}$; **б)** $5^{2x+1}-5^{x+2}\le 5^x-5$; **в)** $3^{2x+1}-4\cdot 21^x-7\cdot 49^x>0$.

Варіант 11

1. Розв'язати рівняння: **а)** $5^{x+1}-5^{x-1}=24$; **б)** $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$;

в) $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x\left(\sqrt{x}-4\right)}$; **г)** $5^{3x+1}+34\cdot 25^x-7\cdot 5^x=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=1152,\\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $2^{\frac{\sqrt{x-3}}{x-8}}>-4$; **б)** $3^{8x+6}-10\cdot 3^{4x+3}+9\ge 0$; **в)** $2^{2x+1}-3\cdot 10^x>5^{2x+1}$.

Варіант 12

1. Розв'язати рівняння: **а)** $3^{x+2}+3^{x-1}=28$; **б)** $3\cdot 16^x-36^x-2\cdot 81^x=0$;

в) $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}$; **г)** $3^x+9^{x-1}-810=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $(0{,}9)^{x^2-4x}<\left(\frac{10}{9}\right)^3$; **б)** $2\cdot 3^{2x^2}+4\le 3^{x^2+2}$; **в)** $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x<5\cdot 6^x$.

Варіант 13

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^x - 2^{x-2} = 3$; **б)** $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;

в) $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$; **г)** $9^{x^2-1} + 3 = 36 \cdot 3^{x^2-3}$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $4^{\sqrt{9-x^2}} + 8 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$; **б)** $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$; **в)** $6 \cdot \sqrt[x]{9} - 13 \cdot \sqrt[x]{6} + 6 \cdot \sqrt[x]{4} \geq 0$.

Варіант 14

1. Розв'язати рівняння: **а)** $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$;

б) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$; **в)** $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$; **г)** $4^x - 24 = 10 \cdot 2^{x-1}$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1}. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$; **б)** $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; **в)** $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x \geq 0$.

Варіант 15

1. Розв'язати рівняння: **а)** $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$;

б) $3^{2x+1} - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} = 0$; **в)** $3^{2x-1} = 7^{x+1}$; **г)** $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $0{,}36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$; **б)** $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} > 3$; **в)** $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 16

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = \frac{13}{2} + \frac{13}{4} + \frac{13}{8} + \frac{13}{16} + \ldots$;

б) $3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 49^x = 0$; **в)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2} = 81^{4x+1}$; **г)** $25^x - 600 - 5^x = 0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2^{x+3} = 0{,}5^{2y+1}; \\ 5^{y-4} = \sqrt{5}^{x+1}. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$; **б)** $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < \frac{28}{3} \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$; **в)** $81^{|x|} + 16^{|x|} > \frac{13}{6} \cdot 36^{|x|}$.

Варіант 17

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^x+3\cdot 2^{x-4}=76$; **б)** $6\cdot 4^x-6^x-12\cdot 9^x=0$;

в) $3^{x^2-7,7x+16,5}=27\sqrt{3}$; **г)** $8^{-\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x-3}{x}}+12=0$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}2^{2x+1}+2^y=40,\\ 2^{x+1}+2^{y-1}=12.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $0,6^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}}<0,6^{-2}$; **б)** $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$; **в)** $14\cdot 4^{\sqrt{x+1}}+3\cdot 14^{\sqrt{x+1}}\le 2\cdot 49^{\sqrt{x+1}}$.

Варіант 18

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^{x+3}-3^{x^2+2x-6}=3^{x^2+2x-5}-2^x$;

б) $4^x+9^x=2,5\cdot 6^x$; **в)** $(0,125)^{3-4x}=\frac{1}{32}$; **г)** $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}5^x-6^y=589,\\ 5^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{y}{2}}=31.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\frac{2^{-x}}{1-2^{1-x}}+2^x<0$; **б)** $\left(\frac{2}{7}\right)^{6x-21}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{2x+0,5}\ge 1$; **в)** $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x\ge 5\cdot 6^x$.

Варіант 19

1. Розв'язати рівняння: **а)** $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$; **б)** $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x-5\cdot 25^x=0$;

в) $(0,25)^{2-\sqrt{5x+1}}=4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$; **г)** $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}=6$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}0,5^{3x}\cdot 0,5^y=0,5;\\ 2^{3x}\cdot 2^{-y}=32.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\le 9$; **б)** $4^x-2^{x+1}\ge 3$; **в)** $2\cdot 25^x+5\cdot 4^x<31\frac{57}{100}\cdot 10^x$.

Варіант 20

1. Розв'язати рівняння: **а)** $2^{4x}-4\cdot 2^{4x-2}+2^{4x-1}=512$;

б) $5\cdot 9^x+7\cdot 15^x-6\cdot 25^x=0$; **в)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{7x-3}$; **г)** $2^{1+x}-2^{3-x}=15$.

2. Розв'язати систему: $\begin{cases}2^{x+y}=16,\\ 3^y=27^x.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

а) $\frac{2^{x+1}+1}{2-2^{x+2}}\ge 2$; **б)** $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{28}{3^{x+1}}+3<0$; **в)** $36^x-2\cdot 30^x+25^x<0$.

Розв'язання типового варіанта

Приклад. Розв'язати рівняння $3\cdot 2^{x+1}+2^{x}-5\cdot 2^{x-1}=9$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Винесемо за дужки в лівій частині заданої рівності двійку в найменшому степені, тобто 2^{x-1}:

$$2^{x-1}\cdot\left(3\cdot 2^{x+1-(x-1)}+2^{x-(x-1)}-5\right)=9,$$

$$2^{x-1}\cdot\left(3\cdot 2^{2}+2-5\right)=9\Rightarrow 2^{x-1}\cdot 9=9\Rightarrow 2^{x-1}=1.$$

Отримали найпростіше показникове рівняння, його розв'язок

$$2^{x-1}=2^{0}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1.$$

Відповідь. $x=1$.

Приклад. Розв'язати рівняння $4^{x}+3\cdot 6^{x}-4\cdot 9^{x}=0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Перепишемо задане рівняння наступним чином:

$$\left(2^{2}\right)^{x}+3\cdot(2\cdot 3)^{x}-4\cdot\left(3^{2}\right)^{x}=0\Rightarrow 2^{2x}+3\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}-4\cdot 3^{2x}=0$$

або

$$\left(2^{2}\right)^{x}+3\cdot(2\cdot 3)^{x}-4\cdot\left(3^{2}\right)^{x}=0\Rightarrow\left(2^{x}\right)^{2}+3\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}-4\cdot\left(3^{x}\right)^{2}=0$$

Отже, маємо однорідне показникове рівняння другого степеня. Для розв'язування поділимо обидві частини останнього рівняння, наприклад, на $3^{2x}>0$:

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{3^{2x}}-4\cdot 1=0\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0.$$

Заміною $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t,\ t>0$ зведемо останнє рівняння до квадратного

$$t^{2}+3t-4=0,$$

корені якого, згідно з теоремою Вієта,

$$t_1=1,\ t_2=-4\notin \text{ОДЗ}.$$

Повертаємося до заміни:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1\Rightarrow x=0.$$

Відповідь. $x=0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{2^{\sqrt{6}}}=4^{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow x\in[-1;+\infty)$.

Зведемо ліву та праву частини заданого рівняння до основи 2:

$$2^{\sqrt{x+1}}\cdot 2^{\frac{\sqrt{6}}{2}}=2^{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow 2^{\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{6}}{2}}=2^{2\sqrt{x+1}}.$$

Прирівнюючи показники степеня в лівій та правій частинах останньої рівності, приходимо до ірраціонального рівняння

$$\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow x+1=\frac{6}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $x=\frac{1}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt[2y]{\sqrt{26}-5}-\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}=10$.

Розв'язання. ОДЗ: $y \neq 0 \Rightarrow y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Спочатку покажемо, що підкореневі вирази $\sqrt{26}-5$ та $\sqrt{26}+5$ є взаємно оберненими величинами (тобто потрібно показати, що їх добуток дорівнює одиниці):

$$\left(\sqrt{26}-5\right)\cdot\left(\sqrt{26}+5\right)=\left(\sqrt{26}\right)^2-5^2=26-25=1,$$

тобто $\sqrt{26}-5=\dfrac{1}{\sqrt{26}+5}$.

Отже, вихідне рівняння запишеться у вигляді:

$$\sqrt[2y]{\frac{1}{\sqrt{26}+5}}-\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}=10\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}}-\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}=10.$$

Робимо заміну: $\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}=t, t>0$, тоді маємо:

$$\frac{1}{t}-t=10\Rightarrow\frac{1-t^2}{t}=10\Rightarrow 1-t^2=10t\Rightarrow t^2+10t-1=0.$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння:

$$D=(-10)^2-4\cdot1\cdot(-1)=104=\left(\sqrt{26\cdot4}\right)^2=\left(2\sqrt{26}\right)^2;$$

$$t_{1,2}=\frac{-10\pm2\sqrt{26}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-5-\sqrt{26}<0\notin\text{ОДЗ},\\ t_2=-5+\sqrt{26}=\sqrt{26}-5.\end{array}\right.$$

Обернена заміна:

$$\sqrt[2y]{\sqrt{26}+5}=\sqrt{26}-5\Rightarrow\left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{1}{2y}}=\frac{1}{\sqrt{26}+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{1}{2y}}=\left(\sqrt{26}+5\right)^{-1}\Rightarrow\frac{1}{2y}=-1\Rightarrow 2y=-1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $y=-\dfrac{1}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $18^x-8\cdot6^x-9\cdot2^x=0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Перетворимо рівняння, що розв'язується, наступним чином:

$$(9\cdot2)^x-8\cdot(3\cdot2)^x-9\cdot2^x=0\Rightarrow 9^x\cdot2^x-8\cdot3^x\cdot2^x-9\cdot2^x=0\Big|:2^x>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(3^x\right)^2-8\cdot3^x-9=0.$$

Робимо заміну $3^x=t, t>0$. В результаті отримуємо квадратне рівняння

$$t^2-8t-9=0,$$

корені якого, згідно з теоремою Вієта,

$$\left[\begin{array}{l}t_1=-1<0\notin\text{ОДЗ},\\ t_2=9.\end{array}\right.$$

Повертаємось до заміни:

$$3^x=9\Rightarrow3^x=3^2\Rightarrow x=2.$$

Відповідь. $x=2$.

Приклад. Розв'язати рівняння $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Використовуючи властивості степенів, запишемо задане рівняння наступним чином:

$$10\cdot 10^{x^2}-\frac{10}{10^{x^2}}=99.$$

Робимо заміну $10^{x^2}=t,\ t>0$, тоді останнє рівняння приймає вигляд:

$$10t-\frac{10}{t}=99\Rightarrow\frac{10t^2-10}{t}=99\Rightarrow 10t^2-10=99t\Rightarrow 10t^2-99t-10=0.$$

Розв'язуємо отримане квадратне рівняння:

$$D=(-99)^2-4\cdot 10\cdot(-10)=10201=101^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{99+101}{20}=10,\\ t_2=\dfrac{99-101}{20}=-\dfrac{1}{10}<0\notin \text{ОДЗ}.\end{array}\right.$$

Обернена заміна:

$$10^{x^2}=10\Rightarrow 10^{x^2}=10^1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1.$$

Відповідь. $x=\pm 1$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases}2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=16,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ:

$$\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ \sqrt{xy}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ xy\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ x\ne 0,\\ y\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(0;+\infty),\\ y\in(0;+\infty).\end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння системи, що розв'язується, та перетворимо його:

$$2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=16\Rightarrow 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=2^4\Rightarrow 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4.$$

Для другого рівняння маємо:

$$\lg\sqrt{xy}=1+\lg 3\Rightarrow\lg\sqrt{xy}=\lg 10+\lg 3\Rightarrow\lg\sqrt{xy}=\lg 30\Rightarrow\sqrt{xy}=30\Rightarrow\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=30.$$

Тобто задана система еквівалентна наступній системі

$$\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=30.\end{cases}$$

Робимо заміну $\sqrt{x}=u,\ \sqrt{y}=v,\ u,v>0$.

Зауваження. На змінні u,v потрібно було накладати обмеження $u,v\ge 0$, але оскільки, згідно з ОДЗ, $x,y\ne 0$, то нерівність стає строгою.

Після заміни приходимо до системи

$$\begin{cases}2u-v=4,\\ u\cdot v=30,\end{cases}$$

яку розв'яжемо методом підстановки. З першого рівняння системи отримуємо, що

$$v=2u-4,$$

тоді друге рівняння приймає вигляд:

$$u\cdot(2u-4)=30 \text{ або } 2u^2-4u-30\,\big|:2\Rightarrow u^2-2u-15=0.$$

Корені отриманого квадратного рівняння за теоремою Вієта

$$u_1=-3\notin \text{ОДЗ}, u_2=5.$$

Звідси $v=2\cdot 5-4=6$.

Обернена заміна:

$$\sqrt{x}=5 \qquad \text{і} \qquad \sqrt{y}=6$$

$$x=5^2=25; \qquad y=6^2=36$$

Зауваження. Розв'язок системи зазвичай записується у вигляді координат точки, де на першому місці йде значення змінної x (або будь-якої іншої, яку прийнято за «першу» змінну), а на другому – змінної y («другої» змінної).

Відповідь. $(25;\,36)$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases}3^x\cdot 4^y=36,\\ 3^y\cdot 4^x=48.\end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ: $x,\,y\in R$.

Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{3^x\cdot 4^y}{3^y\cdot 4^x}=\frac{36}{48}\Rightarrow 3^{x-y}\cdot 4^{y-x}=\frac{3}{4}\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}=\left(\frac{3}{4}\right)^1\Rightarrow x-y=1.$$

Тепер перше рівняння системи помножимо на її друге рівняння:

$$3^x\cdot 4^y\cdot 3^y\cdot 4^x=36\cdot 48\Rightarrow 3^{x+y}\cdot 4^{y+x}=1728\Rightarrow 12^{x+y}=12^3\Rightarrow x+y=3.$$

Отже, початкова система еквівалентна наступній системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3,\end{cases}$$

яку ми розв'яжемо методом додавання. До першого рівняння системи додаємо друге:

$$2x=4\Rightarrow x=2.$$

Підставляємо отримане значення, наприклад у перше рівняння системи:

$$2-y=1\Rightarrow y=2-1=1.$$

Відповідь. $(2;\,1)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $2^{x+1}>4$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

У даному випадку $a=2>1$, $b=4>0$, тоді

$$x+1>\log_2 4\ \Rightarrow\ x+1>2\ \Rightarrow\ x>1\ \Rightarrow\ x\in(1;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(1;+\infty)$.

Приклад. Знайти розв'язки нерівності $2^{\frac{x}{x^2-1}}\geq 2^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання. ОДЗ: знаменники дробів не дорівнюють нулю:

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0,\\ x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(x+1)\neq 0,\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\ x\in R\setminus\{\pm 1;\,2\}.$$

Оскільки $a=2>1$, то отримуємо рівносильну дробово-раціональну нерівність

$$\frac{x}{x^2-1}\geq\frac{1}{x-2},$$

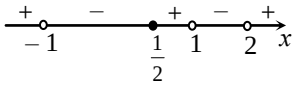
розв'язки якої знаходимо за допомогою методу інтервалів:

$$\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-2}\ge 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)(x-2)}\ge 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-x^2+1}{\left(x^2-1\right)(x-2)}\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{\left(x^2-1\right)(x-2)}\ge 0 \Rightarrow -2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2)\ge 0 \ \Big|:(-2),\ x\in \text{ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)(x-2)\le 0,\ x\in \text{ОДЗ}.$$

Наносимо на координатну пряму нулі кожного з множників та визначаємо знак нерівності на кожному з отриманих проміжків (а також враховуємо ОДЗ).



Таким чином, $x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2)$.

Відповідь. $x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $(x+1)^x<(x+1)^{2x+1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Переходимо до еквівалентної сукупності:

$$\left[\begin{cases}0<x+1<1,\\ x>2x+1,\end{cases}\right. \Rightarrow \left[\begin{cases}x+1>0,\\ x+1<1,\\ -x>1,\end{cases}\right. \Rightarrow \left[\begin{cases}x>-1,\\ x<0,\\ x<-1,\end{cases}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}x+1>1,\\ x<2x+1\end{cases}\right. \qquad \left.\begin{cases}x>0,\\ -x<1\end{cases}\right. \qquad \left.\begin{cases}x>0,\\ x>-1\end{cases}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases}x\in(-1;+\infty),\\ x\in(-\infty;0),\\ x\in(-\infty;-1),\end{cases}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x\in(0;+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow x\in(0;+\infty).$$

$$\left.\begin{cases}x\in(0;+\infty),\\ x\in(-1;+\infty)\end{cases}\right.$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $2^x-5^x<0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Поділимо ліву та праву частини заданої нерівності на $5^x>0$, тоді

$$\frac{2^x}{5^x}-1<0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x<1.$$

Оскільки $1=\left(\frac{2}{5}\right)^0$, то прийдемо до нерівності

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^0.$$

Оскільки $a=\frac{2}{5}<1$, тоді

$$x>0 \text{ або } x\in(0;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $2\cdot 5^{2x}+10^{x}-15\cdot 2^{2x}\le 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Відмітимо, що $10^{x}=(2\cdot 5)^{x}=2^{x}\cdot 5^{x}$, тоді задана нерівність прийме вигляд:

$$2\cdot 5^{2x}+2^{x}\cdot 5^{x}-15\cdot 2^{2x}\le 0.$$

Отримали однорідну показникову нерівність другого степеня. Поділимо обидві частини на $2^{2x}>0$:

$$\frac{2\cdot 5^{2x}}{2^{2x}}+\frac{2^{x}\cdot 5^{x}}{2^{2x}}-15\le 0 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-15\le 0.$$

Виконаємо заміну $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=t$, оскільки показникова функція приймає лише додатні значення, то маємо обмеження на нову змінну: $t>0$. В результаті заміни отримаємо квадратну нерівність $2t^{2}+t-15\le 0$, ОДЗ: $t\in(0;+\infty)$, розв'язки якої знайдемо методом інтервалів. Для цього ліву частину потрібно розкласти на множники:

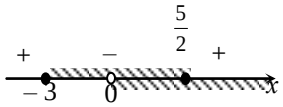
$$2t^{2}+t-15=0 \Rightarrow D=1^{2}-4\cdot 2\cdot(-15)=1+120=121=11^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm 11}{2\cdot 2}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2},\\ -3\end{bmatrix} \Rightarrow 2t^{2}+t-15=2\cdot\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3).$$

Тобто

$$2\cdot\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3)\le 0 \;\Big|:2 \Rightarrow \left(t-\frac{5}{2}\right)(t+3)\le 0.$$

Відмічаємо на координатній прямій отримані точки та визначаємо знак нерівності на одному з отриманих проміжків, наприклад, правому $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$, далі знаки чергуються, бо отримані корені непарної кратності (для відповіді обираємо проміжки зі знаком мінус – штриховка над координатною прямою).



Тоді $t\in\left[-3;\frac{5}{2}\right]$. Враховуючи ОДЗ: $t>0$ (зображено штриховкою під координатною прямою), будемо мати, що $t\in\left(0;\frac{5}{2}\right]$ або $0<t\le\frac{5}{2}$.

Зауваження. Якщо показникові нерівності розв'язується за допомогою заміни, то нерівності відносно нової змінної потрібно розв'язувати до отримання найпростіших нерівностей.

Отже, від подвійної нерівності перейдемо до системи:

$$\begin{cases} t > 0, \\ t \le \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Обернена заміна:

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x \le \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Перша нерівність має місце для будь-якого значення змінної (тобто $x \in R$), оскільки показникова функція набуває лише додатних значень:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x \le \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x \le \left(\frac{5}{2}\right)^1 \underset{\frac{5}{2}>1}{\Rightarrow} x \le 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1].$$

Таким чином, остання система $\begin{cases} x \in R, \\ x \in (-\infty; 1]. \end{cases}$ Звідки остаточно маємо, що $x \in (-\infty; 1]$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 1]$.

Приклад. Розв'язати нерівність $2^{x+3} \ge 0{,}5^x$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Приведемо праву частину заданої нерівності до основи 2: $0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, тоді

$$2^{x+3} \ge \left(2^{-1}\right)^x \Rightarrow 2^{x+3} \ge 2^{-x} \underset{2>1}{\Rightarrow} x + 3 \ge -x \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow 2x \ge -3 \Rightarrow x \ge -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Виносимо 2 у найменшому степеню за дужки:

$$2^{x-1} \cdot (8-2) > 48 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 6 > 48 \Rightarrow 2^{x-1} > 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-1} > 2^3 \underset{2>1}{\Rightarrow} x - 1 > 3 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4; +\infty).$$

Відповідь. $x \in (4; +\infty)$.