

Тема. Рівняння Коші та їх застосування.

Рівняннями Коші називають чотири наступних функціональних рівняння:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R};$
2. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), x, y \in \mathbb{R};$
3. $f(x \cdot y) = f(x) + f(y), x, y \in (0, +\infty);$
4. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), x, y \in (0, +\infty).$

Рівняння 1: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Функція, яка задана на всій числовій прямій та задовольняє рівняння 1, називається адитивною.

Знайдемо *неперервні* розв'язки цього рівняння. Нехай $x = y = 0$. Тоді маємо $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, звідки знаходимо $f(0) = 0$. Підставимо тепер $y = -x$. З рівності $f(0) = f(x) + f(-x)$ отримуємо $f(x) = -f(-x)$, тобто розв'язками рівняння Коші можуть бути лише непарні функції.

Зауважимо, що з рівняння Коші випливає рівність

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$$

Покладемо $f(1) = a, x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, тоді отримаємо $f(n) = na$. А при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ будемо мати $a = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, тобто $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.

Нехай тепер $x_1 = x_2 = \dots = x_m = \frac{1}{n}$. Тоді $f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}a$.

Враховуючи непарність функції f , маємо також $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n}a$. Крім того, $f(0) = 0 \cdot a$, тому $f(x) = ax$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$.

Якщо ж $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то розглянемо довільну послідовність раціональних чисел r_n , яка збігається до x . Оскільки функція f неперервна, то

$$f(x) = f\left(\lim_n r_n\right) = \lim_n f(r_n) = \lim_n ar_n = ax.$$

Тому $f(x) = ax$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Перевірка показує, що тут a – довільне дійсне число. Отже, в класі неперервних функцій всі адитивні функції є лінійними.

Насправді існує адитивна функція, відмінна від лінійної однорідної, але вона не є неперервною. Приклад такої функції побудував в 1905 році німецький математик Гамель. Він запропонував розглядати числову множину G (зараз її називають базисом Гамеля), за допомогою якої подається будь-яке дійсне число: $x = n_1g_1 + n_2g_2 + \dots + n_kg_k, n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G, i = 1, 2, \dots, k$. Якщо в точках множини G функцію задати довільним чином, то функціями типу

$$f(x) = n_1f(g_1) + n_2f(g_2) + \dots + n_kf(g_k)$$

вичерпуються всі розв'язки рівняння 1.

Розглянемо тепер рівняння 1 в класі *монотонних* функцій. Нехай для визначеності функція $f(x)$ не спадає при всіх $x \in \mathbb{R}$. Вище для всіх раціональних x доведено, що $f(x) = ax = f(1)x$. Якщо x – ірраціональне число, тоді для будь-якого натурального числа q знайдеться таке ціле число p , що $\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}$. Оскільки функція не спадає, то

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

або

$$a \cdot \frac{p}{q} \leq f(x) \leq a \cdot \frac{p+1}{q}.$$

Оскільки $f(0) = 0$ та функція не спадає, то $a = f(1) \geq 0$. Якщо $a = 0$, то з нерівності $a \frac{p}{q} \leq f(x) \leq a \frac{p+1}{q}$ випливає, що $f(x) = 0 = 0 \cdot x$. Якщо $a > 0$, то $\frac{p}{q} \leq \frac{f(x)}{a} \leq \frac{p+1}{q}$. В порівнянні з нерівністю $\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}$ це означає, що $f(x) = ax$. Аналогічні міркування мають місце і для функції, що не зростає.

Розглянемо тепер розв'язання рівняння 1 в класі обмежених на відрізьку $[c, c+T]$ функцій. Розглянемо функцію g таку, що для всіх дійсних x

$$g(x) = f(x) - \frac{f(T)}{T}x.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{f(T)}{T}(x+y) = f(x) - \frac{f(T)}{T}x + f(y) - \frac{f(T)}{T}y = \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

то функція g також є адитивною. Крім того, як і функція f , вона обмежена на проміжку $[c, c+T]$. З адитивності функції g для всіх дійсних значень x випливає рівність $g(x+T) = g(x) + g(T) = g(x)$. тобто функція g є періодичною з періодом T , отже, обмеженою на всій числовій прямій. При цьому $g(0) = f(0) = 0$.

Доведемо, що $g(0) \equiv 0$. Нехай існує таке $x_0 \neq 0$, що $g(x_0) = y_0 \neq 0$. Внаслідок адитивності для кожного цілого значення n отримаємо $g(nx_0) = ny_0$, що суперечить обмеженості функції g . З тотожності $g(0) \equiv 0$ випливає, що $f(x) = \frac{f(T)}{T}x$, тобто кожна обмежена на $[c, c+T]$ адитивна функція є лінійною.

Зауважимо, що в класі диференційовних функцій розв'язком рівняння 1 є також лише лінійні функції (кожна диференційовна функція є неперервною, тобто клас диференційовних функцій не більше класу неперервних функцій).

Розглянемо розв'язання рівнянь 2-4, але лише в класі неперервних функцій.

Рівняння 2: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Нехай $x = y = \frac{t}{2}$, тоді $f(t) = \left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \geq 0$. Отже, значення функції f невід'ємні. Якщо існує значення аргумента y_0 , для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x+y_0) = f(x) \cdot f(y_0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто $f(x) \equiv 0$.

В іншому випадку для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Покладемо $\varphi(x) = \ln f(x)$. Тоді функція $\varphi(x)$ неперервна як композиція двох неперервних функцій, і задовольняє рівняння Коші $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Тому $\varphi(x) = ax$, $a, x \in \mathbb{R}$. Отже, $f(x) = e^{ax} = b^x$, де $b = e^a$. Тобто неперервним розв'язком другого рівняння Коші є показникова функція.

Рівняння 3: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in (0, +\infty)$. Враховуючи множину значень показникової функції, зробимо заміни $x = e^t, y = e^s, t, s \in \mathbb{R}$. В результаті для всіх $t, s \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність

$$f(e^t \cdot e^s) = f(e^t) + f(e^s).$$

Позначивши $g(t) = f(e^t)$, отримуємо перше рівняння Коші

$$g(t + s) = g(t) + g(s).$$

Оскільки функція $g(x)$ неперервна як композиція двох неперервних функцій, то $g(x) = ax$, $a, x \in \mathbb{R}$. Отже, $f(x) = f(e^t) = g(t) = at = a \ln x = \log_b x$, $x \in (0, +\infty)$, $b = e^{\frac{1}{a}}$ при $a \neq 0$ та $f(x) \equiv 0$ при $a = 0$. Тобто неперервним розв'язком третього рівняння Коші є логарифмічна функція.

Рівняння 4: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in (0, +\infty)$. Як і в попередньому прикладі, зробимо заміни $x = e^t, y = e^s, t, s \in \mathbb{R}$. В результаті для всіх $t, s \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(e^t \cdot e^s) = f(e^t) \cdot f(e^s)$. Якщо тепер $h(t) = f(e^t)$, то приходимо до другого рівняння Коші $h(t + s) = h(t) \cdot h(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$. Функція $h(x)$ є неперервною як композиція двох неперервних функцій. Тому в класі неперервних функцій розв'язками цього рівняння є функції $h(x) \equiv 0$, звідки $f(x) \equiv 0$, та $h(x) = b^x, b > 0$, звідки

$$f(x) = f(e^t) = h(t) = b^t = b^{\ln x} = b^{\log_b x^{\ln b}} = x^{\ln b} = x^\alpha,$$

де $x \in (0, +\infty), \alpha = \ln b$. Тобто неперервним розв'язком четвертого рівняння Коші є степенева функція.

Отже, ми отримали неперервні розв'язки всіх чотирьох рівнянь Коші:

1	$f(x + y) = f(x) + f(y)$	$x, y \in \mathbb{R}$	$f(x) = ax$
2	$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$	$x, y \in \mathbb{R}$	$f(x) \equiv 0 \vee f(x) = b^x$
3	$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$	$x, y \in (0, +\infty)$	$f(x) \equiv 0 \vee f(x) = a \ln x$
4	$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$	$x, y \in (0, +\infty)$	$f(x) \equiv 0 \vee f(x) = x^\alpha$

Розглянемо приклади застосування розв'язків цих рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f(x + y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}$$

у класі неперервних на своїх областях визначення функцій.

Якщо існує y_0 , для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x + y_0) = \frac{f(x)f(y_0)}{f(x) + f(y_0)} = 0$ для всіх x з області визначення функції f , тобто $f(x) \equiv 0$, але це не можливо, враховуючи вигляд рівняння. Отже, $f(x)$ набуває лише відмінних від нуля значень, тому рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Разом з функцією $f(x)$ вона неперервна на області визначення і для всіх x, y з області визначення задовольняє рівняння Коші $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Тому $g(x) = ax$. Враховуючи обмеження,

накладені на функцію $f(x)$, звідси отримуємо $f(x) = \frac{1}{ax}$, $a, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Проведемо перевірку.

Приклад 2. Знайти усі неперервні розв'язки рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y), x, y \in \mathbb{R}.$$

Запишемо це рівняння у вигляді $f(x+y) + 1 = (f(x) + 1)(f(y) + 1)$ і розглянемо функцію $g(x) = f(x) + 1$. Ця функція є неперервною на множині дійсних чисел та задовольняє рівняння $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ – друге рівняння Коші. Його неперервними розв'язками є функції $g(x) \equiv 0$ та $g(x) = b^x$, $b > 0, x \in \mathbb{R}$. Звідси $f(x) \equiv -1$ та $f(x) = b^x - 1$, $b > 0, x \in \mathbb{R}$. Перевірка.

Приклад 3. Знайти плоскі неперервні криві, які задовольняють умову: для довільних двох точок сума добутків абсциси однієї точки на ординату іншої дорівнює ординаті точки, абсциса якої дорівнює добутку абсцис даних точок.

Обмежимося лише додатними значеннями аргумента. Для знаходження таких кривих маємо функціональне рівняння: $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.
Покладемо $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ та отримаємо третє рівняння Коші: $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$, з якого при $x > 0$ маємо, що $g(x) = a \ln x$, звідки $f(x) = ax \ln x$.

Приклад 4. Знайти неперервні функції, визначені при $x > 0$, які задовольняють рівняння: $f(f(x)) = xf(x)$.

Зауважимо, що жодна ненульова константа не є розв'язком цього рівняння. Крім того, $f(x) > 0$ при $x > 0$. Нехай $y = f(x)$, тоді рівняння переписеться у вигляді $f(y) = xy$, звідки $f(f(y)) = f(xy)$. З іншого боку, з заданого рівняння $f(f(y)) = yf(y) = f(x) \cdot f(y)$. Порівнюючи останні дві рівності, отримаємо четверте рівняння Коші: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Неперервні відмінні від нуля розв'язки цього рівняння мають вигляд $f(x) = x^\alpha$. Виконаємо перевірку: $(x^\alpha)^\alpha = x^{\alpha+1}$. З цього рівняння $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Отже, розв'язками рівняння будуть функції: $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, f_3(x) = x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.