

Розділ І. Функції та їх властивості

§1.1. Поняття функції. Оборотні та обернені функції. Складена функція. Елементарні функції

Функція – одне з основних не лише математичних, а й загально наукових понять. Кажуть, що на множині X визначена функція $f : X \rightarrow Y$, якщо кожному дійсному числу $x \in X \subset R$ за певним законом f поставлено у відповідність дійсне число $y \in Y \subset R$. При цьому записують $y = f(x)$. Множину X називають *областю визначення*, а множину Y – *областю значень* функції. Їх відповідно позначають $D(f)$ та $E(f)$.

У загальному випадку запис $f : X \rightarrow Y$ означає, що функція f відображає всю множину X у множину Y , тобто область значень функції не обов'язково повинна співпадати з усією множиною Y .

Якщо для кожного $y \in Y = E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок $x \in X = D(f)$, то функцію $y = f(x)$ називають *оборотною*, а відповідність $f^{-1} : Y \rightarrow X$, яка кожному такому $y \in Y$ зіставляє цей єдиний розв'язок $x = f^{-1}(y)$, – функцією, *оберненою до $f(x)$* . Оборотна функція кожному своєму значенню $y \in Y$ набуває лише при одному значенні аргументу $x \in X$.

Важливий клас оборотних функцій утворюють монотонні функції. Функція $f : X \rightarrow Y$ називається *монотонно зростаючою*, якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. У випадку протилежної нерівності $f(x_1) > f(x_2)$ функцію $f(x)$ називають *монотонно спадною*.

Якщо задані функції $g : X \rightarrow U$ та $f : U \rightarrow Y$, то функцію $y : X \rightarrow Y$, визначену рівністю $y = f(g(x))$, називають *складеною функцією* або ж *композицією функцій f та g* .

Зі шкільного курсу математики відомі лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні функції та обернені до них. Надалі ми будемо розглядати лише функції, які можна отримати з них за допомогою скінченної кількості арифметичних дій чи композицій. Такі функції називають *елементарними*.

§1.2. Найпростіші функціональні співвідношення та найпростіші функціональні рівняння

Маючи область визначення та закон f , за яким побудована функція, ми однозначно можемо знайти її множину значень. Навпаки, за множиною значень і законом f можна визначити, якою могла би бути область визначення такої функції, причому для оборотної функції відповідь теж буде однозначною. Але задача про встановлення закону f лише за відомими областю визначення та множиною значень функції є не зовсім коректною. Тому, як правило, додатково задають окремі співвідношення для значень шуканої функції.

Означення. *Функціональним рівнянням* називається рівняння, в яких шукана функція пов'язана з відомими функціями з допомогою арифметичних дій та операції утворення складеної функції. При цьому під *розв'язком* такого рівняння розуміють функцію, яка на заданій множині перетворює його у тотожність.

Використовують також термін «*функційні рівняння*».

Розглянемо приклади таких співвідношень:

1). $f(x) - f(-x) = 0, x \in \mathbb{R}.$

Розв'язками цього функціонального рівняння є всі парні функції, визначені на множині дійсних чисел, і тільки вони.

2). $f(x) + f(-x) = 0, x \in \mathbb{R}.$

Відповідно отримуємо як розв'язки всі непарні функції, визначені на множині дійсних чисел.

$$3). f(x+T) = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Для кожного фіксованого $T > 0$ множину розв'язків такого рівняння утворюють всі періодичні функції з періодом T .

До найпростіших функціональних рівнянь відносять також рівняння вигляду $f(\varphi(x)) = g(x)$, де $f(x)$ – шукана функція, $g(x)$ – довільна відома функція, $\varphi(x)$ – відома оборотна функція.

Для розв'язування такого рівняння покладемо $t = \varphi(x)$. Тоді $x = \varphi^{-1}(t)$. Отже, отримуємо $f(t) = g(\varphi^{-1}(t))$. Таким чином, маємо єдиний розв'язок $f(x) = g(\varphi^{-1}(x))$, визначений для тих $x \in D(\varphi)$, для яких $\varphi^{-1}(x) \in D(g)$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = x+2, x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}.$$

Розв'язання. Покладемо $t = \frac{2x-1}{x-1}$, $x \neq 1$. Тоді

$$t(x-1) = 2x-1, (t-2)x = t-1, x = \frac{t-1}{t-2}, t \neq 2.$$

Отже,

$$f(t) = \frac{t-1}{t-2} + 2 = \frac{3t-5}{t-2}, t \neq 2; f(x) = \frac{3x-5}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}.$$

Зауважимо, що покладаючи у заданому рівнянні $x=0$, знайдемо $f(1)=2$. Це ж значення маємо і підставляючи $x=1$ у знайдений вище розв'язок $f(x)$. Але підставляти $x=1$ у саме рівняння ми не можемо.

Узагальнюючи, відзначимо, що аналогічно можуть бути розв'язані довільні рівняння вигляду

$$f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = g(x), \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, cx+d \neq 0, cx-a \neq 0.$$

§1.3. Границя та неперервність функції.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь буває доцільним шукати їхні розв'язки в класі неперервних функцій або ж використовувати властивості неперервних функцій для їх дослідження. Нагадаємо означення та властивості таких функцій.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо $f(x)$ неперервна у точці $x_0 \in X$, то $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ для довільної послідовності точок $x_n \in X$ такої, що $x_n \rightarrow x_0$. І навпаки, якщо для кожної такої послідовності $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, то $f(x)$ неперервна у точці $x_0 \in X$. Функція, неперервна у кожній точці своєї області визначення, називається *неперервною функцією*.

Зауважимо, що неперервними функціями будуть також лінійні комбінації, добутки та композиції неперервних функцій, а їх частка буде неперервною для всіх тих значень аргумента, для яких знаменник не перетворюється в нуль. Зокрема, всі елементарні функції є неперервними на своїх областях визначення.

Наведемо також основні теореми про властивості функцій, неперервних на проміжках:

Теорема 1. (*перша теорема Больцано-Коші*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків. Тоді між точками a та b існує така точка c , в якій ця функція перетворюється в нуль: $f(c) = 0$, $a < c < b$.

Зокрема, якщо на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ строго монотонна, то така точка c єдина.

Теорема 2. (*друга теорема Больцано-Коші*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває різні значення: $f(a) = A$,

$f(b) = B$. Тоді для кожного числа C , яке лежить між A та B , між точками a та b існує така точка c , що $f(c) = C$.

Якщо на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ строго монотонна, то така точка c єдина.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (замкнутому або ні, скінченному або нескінченному), то значення, які вона набуває, також суцільно заповнюють деякий проміжок.

Теорема 4. Нехай функція $y = f(x)$ визначена, монотонно зростає (спадає) і неперервна на деякому проміжку. Тоді на відповідному проміжку її значень існує однозначна обернена функція $x = g(y)$, яка також монотонно зростає (спадає) і є неперервною.

Теорема 5. (перша теорема Вейєрштраса). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$. Тоді на цьому проміжку вона обмежена зверху та знизу, тобто існують такі скінченні числа m та M , що $m \leq f(x) \leq M$ при $a \leq x \leq b$.

Теорема 6. (друга теорема Вейєрштраса). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$. Тоді на цьому проміжку вона набуває свого найменшого значення m та найбільшого значення M , тобто на проміжку $[a; b]$ існують такі точки x_1 та x_2 , що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Теорема 7. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$ та набуває на ньому найменшого значення m та найбільшого значення M . Тоді її значення суцільно заповнюють проміжок $[m; M]$.

Зокрема, у разі строгої монотонності функції $f(x)$ кожне її значення y з проміжку $[m; M]$ набувається рівно при одному значенні аргумента x з проміжку $[a; b]$.

§1.4. Похідна та її застосування.

Властивості функцій, диференційованих на відрізку

Функція $f(x)$ називається *диференційованою в точці* $x_0 \in X$, якщо границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in X$, існує та є скінченною.

Значення такої границі називають *похідною функції* $f(x)$ в точці $x_0 \in X$ і позначають $f'(x_0)$.

Якщо функція $f(x)$ диференційована в кожній точці проміжку X , то її називають *диференційованою на X* .

Зауважимо, що диференційованими функціями будуть також лінійні комбінації, добутки та композиції диференційованих функцій, а їх частка буде диференційованою в усіх тих точках $x_0 \in X$, для яких знаменник не перетворюється в нуль. Зокрема, всі елементарні функції є диференційованими на своїх областях визначення.

Відзначимо також, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1.4 про існування оберненої функції, в точці $x_0 \in X$ має скінченну і відмінну від нуля похідну $f'(x_0)$, то для оберненої функції $x = g(y)$ у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ також існує похідна, яка дорівнює $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Наведемо основні теореми про властивості функцій, диференційованих на проміжках:

Теорема 8. (теорема Ферма). Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку X і у внутрішній точці c цього проміжку набуває найбільше (найменше) значення. Якщо в цій точці існує скінченна похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема 9. (теорема Ролля). Нехай: 1) функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a; b]$; 2) існує

скінченна похідна $f'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$; 3) на кінцях проміжку функція набуває рівні значення $f(a) = f(b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c , в якій похідна перетворюється в нуль: $f'(c) = 0$, $a < c < b$.

Теорема 10. (теорема Лагранжа). Нехай: 1) функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$; 2) існує скінченна похідна $f'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c , що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b.$$

Теорема 11. (теорема Коші). Нехай: 1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені і неперервні на замкнутому проміжку $[a;b]$; 2) існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$; 3) $g'(x) \neq 0$ на проміжку $(a;b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c , що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

Теорема 12. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X і має всередині нього скінченну похідну $f'(x)$, а на кінцях цього проміжку (якщо вони належать X) зберігає неперервність. Для того, щоб $f(x)$ на проміжку X була сталою, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) = 0$ всередині X .

Теорема 13. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X і має всередині нього скінченну похідну $f'(x)$, а на кінцях цього проміжку (якщо вони належать X) зберігає неперервність. Для того, щоб $f(x)$ на проміжку X була монотонно зростаючою (спадною), достатньо, щоб всередині X виконувалася умова $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).