

Розділ VII. Функціональні рівняння математичних олімпіад та турнірів

§7.1. Функціональні рівняння обласних етапів Всеукраїнських математичних олімпіад та турнірів

Задачі на розв'язування функціональних рівнянь часто зустрічаються на різноманітних математичних змаганнях. Деякі з них, не акцентуючи на цьому увагу, ми вже проаналізували в попередніх розділах. Наведемо приклади інших задач такого роду.

Приклад 91. Знайдіть усі многочлени $P(x)$, які для кожного $x \in \mathbb{R}$ задовольняють рівність $P(x + x^2) = P(x) + P(x^2)$.

(Обласний турнір юних математиків, 2008 рік).

Розв'язання. Нехай $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, де $a_n \neq 0$, $n \geq 2$. Тоді $P(x + x^2)$ містить доданок na_nx^{2n-1} , а в сумі $P(x) + P(x^2)$ коефіцієнт біля x^{2n-1} дорівнює нулю. Отже, $n \leq 1$. Якщо $x = 0$, то маємо $P(0) = P(0) + P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. Тому $P(x) = ax$. Перевірка показує, що такий многочлен є розв'язком при кожному дійсному значенні a .

Приклад 92. Дослідіть, чи існують такі многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a та b і для всіх дійсних чисел x виконуються рівності:

а) $P(x + x^2) = x + x^2 + \dots + x^{2013} + x^{2014}$;

б) $Q(x + x^2 + x^3) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010} + ax^{2011} + bx^{2012} + x^{2013}$.

(Обласний турнір юних математиків, 2013 рік).

Розв'язання. а). Не існує. Підставивши $x = 1$, отримуємо $P(2) = 2014$. А, підставивши $x = -2$, будемо мати

$$P(2) = (-2 + 4) + (-8 + 16) + \dots + (-2^{2013} + 2^{2014}) = 2 + 8 + \dots + 2^{2013} \neq 2014.$$

б). Підставляючи $x = -1$ та $x = i$, відповідно отримуємо $Q(-1) = -a + b - 1$ та $Q(-1) = b - 1 + (2 - a)i$. Прирівнюючи дійсні та уявні частини цих значень, приходимо до системи рівнянь $-a + b - 1 = b - 1$ та $2 - a = 0$, яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена $Q(x)$ також не існує.

Приклад 93. Знайдіть усі неперервні функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких для всіх дійсних x, y виконується рівність $f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy$. Чи існують розривні функції, які також задовольняють цю рівність для всіх дійсних x, y ?

(Обласний турнір юних математиків, 2007 рік).

Розв'язання. Підставивши у задане рівняння $y = x$, отримаємо $f^2(x) = x^2$, звідки $|f(x)| = |x|$. Припустимо, що існують такі дійсні аргументи t та z , що $f(t) = t$, $f(z) = -z$. Поклавши $x = t$, $y = z$, отримаємо $-tz = tz$. Тому принаймні один з цих аргументів дорівнює нулю. Отже, рівняння має лише розв'язки: $f(x) = x$ та $f(x) = -x$. Обидва вони є неперервними функціями.

Приклад 94. Знайдіть усі функції f , які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 11 клас).

Розв'язання. Покладемо в цьому рівнянні послідовно $y = -f(x)$ та $y = x^2$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуватимуться рівності: $f(x^2 + f(x)) = 4(f(x))^2$ та $f(x^2 + f(x)) = 4x^2 f(x)$. Прирівнявши для $x = 0$ праві частини цих рівностей, одержимо $f(0) = 0$. Оскільки $f(x)$ не може дорівнювати нулю для інших x ,

то з рівності правих частин маємо $f(x) = x^2$ для $x \neq 0$. Перевірка показує, що функція $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняє дане рівняння.

Приклад 95. Про функцію f , яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = 0,5$ має принаймні один дійсний корінь, та $f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x \neq 0$, $y \neq 0$. Знайдіть $f(-1)$.

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1998 рік, 11 клас).

Розв'язання. Позначимо $f(-1) = a$. Тоді для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f(x) - a = af(x) - af\left(\frac{1}{x}\right)$. Замінивши в ній x на $\frac{1}{x}$, отримаємо $f\left(\frac{1}{x}\right) - a = af\left(\frac{1}{x}\right) - af(x)$.

Додавши дві останні рівності, одержимо співвідношення $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - 2a = 0$. Отже, $f(x) - a = af(x) - a(2a - f(x))$, тобто $f(x)(1 - 2a) = a(1 - 2a)$. Звідси знаходимо $a = \frac{1}{2}$, бо при інших a ми отримали би, що $f(x) \equiv a \neq \frac{1}{2}$, і рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ не мало би жодного кореня, що суперечить умові задачі.

Зауважимо, що принаймні одна така функція, яка задовольняє умови задачі, існує. Наприклад, $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, $x \neq 0$.

Приклад 96. Дослідіть, чи існують такі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, відмінні від $f(x) \equiv x$, для яких для всіх дійсних значеннях x, y виконується рівність $f(f(f(x)) + y) = x + y$.

(Обласний турнір юних математиків, 2011 рік).

Розв'язання. Підставивши в задане рівняння $x=t, y=0$, отримаємо $f(f(f(t)))=t, t \in \mathbb{R}$. Нехай тепер $x=t, y=-f(f(t))$. Звідси випливає, що $f(0)=t-f(f(t))$ та $f(f(t))=t-c$, де $c=f(0)$. При $t=0$ будемо мати $f(c)=-c$. Крім того, звідси випливає ще й рівність $f(f(f(t)))=f(t-c), t \in \mathbb{R}$. Отже, $f(t-c)=t, t \in \mathbb{R}$.

Покладаючи $t=2c$, знайдемо $f(c)=2c$. Тому $-c=2c$, тобто $c=0$. Отже, $f(t)=t$. Тому розв'язків, відмінних від $f(x) \equiv x$, задане рівняння не має.

Приклад 97. Знайдіть усі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x$.

(III етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2013 рік, 11 клас).

Розв'язання. З умови задачі маємо:

$$x=y=0 \Rightarrow f(0) + f(f(0)) - f(0) = 0 \Rightarrow f(f(0)) = 0;$$

$$x=y=1 \Rightarrow f(f(1)) + f(1 + f(1)) - f(1 + f(1)) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 1;$$

$$\begin{aligned} x=1, y=0 \Rightarrow f(f(0)) + f(f(1)) - f(1) &= 1 \Rightarrow 0 + 1 - f(1) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = f(f(1)) = 1. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер значення $f(1)=0$ та $f(0)=1$, отримаємо:

$$x=1, y=t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(f(t)) + f(t) = 1 \Rightarrow f(f(t)) \equiv 1 - f(t);$$

$$x=t, t \in \mathbb{R}, y=0 \Rightarrow f(t) + f(f(t)) - f(t) = t \Rightarrow f(f(t)) \equiv t.$$

Звідси випливає, що $1 - f(t) = t$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Як показує перевірка, функція $f(x) = 1 - x, x \in \mathbb{R}$, є розв'язком рівняння.

Приклад 98. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$ для всіх $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

(III етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2017 рік, 10 клас).

Розв'язання. Запишемо задане рівняння таким чином:

$$f(y + f(f(x))) = x + f(f(y)).$$

Подіємо на обидві його частини функцією f . Враховуючи умову задачі, будемо мати

$$f(f(y + f(f(x)))) = f(x + f(f(y))) = y + f(f(x)).$$

Оскільки при фіксованому x значення $t = y + f(f(x))$ пробігає множину всіх дійсних чисел, то з останньої рівності випливає, що $f(f(t)) = t$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Отже, початкове співвідношення можна записати у вигляді $f(x + y) = y + x$ чи $f(x) = x$. Як показує перевірка, така функція справді є розв'язком.

Приклад 99. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такі, що для всіх натуральних $n \geq 2$ виконується рівність

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)).$$

(Обласний турнір юних математиків, 2005 рік).

Розв'язання. Нехай $f(m) = k$ – найменше значення такої функції при $n \geq 2$. Оскільки $f(f(m-1)) \geq 1$, то при $f(m+1) \neq 1$ одержимо, що $f(f(m+1)) \geq k$. Отже, задана рівність для такого $n = m \geq 2$ виконуватися не буде. Якщо ж $f(m+1) = 1$, то $k = 1$. Але у такому випадку при $n = m$ ліва частина заданої рівності дорівнює 1, а права не менша 2. Отже, вказаної функції не існує.

Приклад 100. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх дійсних x та y задовольняють рівність

$$f(x + y) = \{f(x)\} + \{f(y)\}.$$

(VII Соросівська олімп. з математики, I етап, 10 клас).

Розв'язання. Для $x = y = 0$ маємо $f(0) = 2\{f(0)\}$. Оскільки $f(0) = [f(0)] + \{f(0)\}$, то $[f(0)] = \{f(0)\}$, тобто $f(0) = 0$.

Підставимо тепер $x \in \mathbb{R}$, $x = y = 0$. З рівності $f(x) = \{f(x)\}$ отримаємо, що $0 \leq f(x) < 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому задане функціональне рівняння можна записати у вигляді

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Методом математичної індукції нескладно довести, що при цьому $f(nx) = nf(x)$ для всіх натуральних n та всіх $x \in \mathbb{R}$.

Якщо б існувало таке x_0 , для якого $f(x_0) > 0$, то знайшлося б таке $n \in \mathbb{N}$, за якого справджувалась би нерівність $f(nx_0) \geq 1$.

З отриманої суперечності випливає, що єдиним розв'язком заданого рівняння є функція $f(x) \equiv 0$.

Наведемо також приклад олімпіадної задачі, в якій функціональна залежність задана нерівністю, при розв'язуванні якої доводиться використовувати властивості диференційованих функцій.

Приклад 101. Чи існує функція f , яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну в усіх точках та задовольняє наступні умови:

- а) при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$;
- б) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1999 рік, 11 клас).

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - f(x + \sin x)$. За умовою задачі $F(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому $F(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $F(x)$, як і $f(x)$, має похідні у всіх точках, то за теоремою Ферма в таких її точках мінімуму $F'(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $f'(\pi n) - (1 + \cos \pi n) f'(\pi n + \sin \pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Звідси випливає, що $f'(\pi n) = 0$, для всіх $n \in \mathbb{Z}$. А це суперечить умові задачі. Тому такої функції f не існує.

§7.2. Функціональні рівняння заключних етапів Всеукраїнських олімпіад та турнірів

Функціональні рівняння часто зустрічаються й на заключних етапах Всеукраїнських олімпіад чи турнірів юних математиків. Наведемо приклади розв'язування таких рівнянь.

Приклад 102. Нехай для всіх дійсних x функція $f(x)$ задовольняє співвідношення

$$(x-1)f(x+1)-(x+1)f(x-1)=4x(x^2-1).$$

а). Доведіть, що функція $f(x)$ є неперіодичною.

б). Чи може функція $f(x)$ бути многочленом?

в). Чи може функція $f(x)$ бути не многочленом?

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1996 рік, 11 клас).

Розв'язання. Нескладно переконатися, що функція $\varphi(x) \equiv x^3$ є розв'язком, звідки зразу отримуємо позитивну відповідь на п. б).

Будемо шукати функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = g(x) + x^3$. Підставивши її в задане рівняння, отримаємо співвідношення

$$(x-1)g(x+1)-(x+1)g(x-1)=0.$$

З нього знаходимо $g(1)=0$ та $g(-1)=0$. А для всіх інших x будемо мати рівність $\frac{g(x+1)}{x+1} = \frac{g(x-1)}{x-1}$, звідки випливає, що $g(x) = x \cdot h(x)$, де $h(x)$ – довільна періодична з періодом $T=2$ функція така, що $h(1)=0$. Отже, $f(x) = x \cdot h(x) + x^3$, тобто функція $f(x)$ є неперіодичною. Покладаючи $h(x) = \sin \pi x$, бачимо, що вона може бути й не многочленом.

Приклад 103. Знайдіть усі пари многочленів f та g таких, що для всіх дійсних значень x та y виконується рівність

$$f(xy) = f(x) + g(x)f(y).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1998 рік, 10 клас).

Розв'язання. Покладаючи $y = 0$, для всіх дійсних значень x отримаємо рівність $f(0) = f(x) + g(x)f(0)$, з якої випливає, що $f(x) = c \cdot (1 - g(x))$, де $c = f(0)$.

Якщо $c = 0$, то звідси зразу знаходимо $f(x) \equiv 0$, а $g(x)$ – довільний многочлен.

Якщо ж $c \neq 0$, то, підставивши таку функцію в початкове рівняння, після очевидних спрощень для знаходження многочлена g отримаємо рівняння $g(xy) = g(x)g(y)$.

Оскільки кожен многочлен є неперервною функцією, то з нього знаходимо $g(x) \equiv 0$ або $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Відповідно будемо мати $f(x) = c$, та $f(x) = c \cdot (1 - x^n)$, де $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Враховуючи, що многочлен $f(x) \equiv 0$ задовольняє рівняння при довільному $g(x)$, значення $c = 0$ теж підійде.

Приклад 104. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f(0) = \frac{1}{2}$, і для всіх дійсних значень x та y виконується рівність

$$f(x+y) = f(x)f(2001-y) + f(y)f(2001-x).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 10 клас).

Розв'язання. Поклавши $x = y = 0$, знайдемо $f(2001) = \frac{1}{2}$.

Нехай тепер лише $y = 0$. Враховуючи, що $f(0) = f(2001) = \frac{1}{2}$, для всіх $x \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(x) = f(2001-x)$. Тому, підставивши в задане рівняння $y = 2001-x$, для всіх $x \in \mathbb{R}$ будемо мати $2f^2(x) = \frac{1}{2}$. Оскільки, крім того, при $y = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $f(2x) = 2f^2(x) \geq 0$, то отримуємо єдиний розв'язок $f(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Приклад 105. Чи існує така функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка для всіх дійсних значень x та y задовольняє рівняння

$$f(x \cdot y) = \max\{f(x); y\} + \min\{f(y); x\}.$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 11 клас).

Розв'язання. Такої функції не існує. Легко бачити, що $\max\{a; b\} + \min\{a; b\} = a + b$. Підставивши $x = y = 1$, отримаємо суперечність $f(1) = \max\{f(1); 1\} + \min\{f(1); 1\} = f(1) + 1$.

Приклад 106. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, які одночасно задовольняють такі три умови:

1). $f(1) = 1$;

2). $f(n+2) + (n^2 + 4n + 3)f(n) = (2n+5)f(n+1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;

3). $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ для будь-яких натуральних чисел $m > n$.

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2004 рік, 10 клас).

Розв'язання. Нехай $f(2) = k$. Тоді $f(3) = 7k - 8$, і для подільності $f(3)$ на $f(2)$ необхідно, щоб натуральне число k було дільником числа 8. Розглянемо можливі варіанти.

$k = 1$ не задовольняє, бо тоді $f(3) = -1 \notin \mathbb{N}$.

$k = 2$. За індукцією доводимо, що $f(n) = n!$.

$k = 4$. Аналогічно встановлюємо, що $f(n) = \frac{(n+2)!}{6}$.

$k = 8$ не задовольняє, бо тоді $f(4) = 312$ не ділиться на $f(3) = 48$.

Приклад 107. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх дійсних значень x та y задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(xy-1) = (f(x)+1)(f(y)+1).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2007 рік, 10 клас).

Розв'язання. Підставляючи по черзі $x = y = 0$ та $x = 0, y = -1$, отримаємо таку систему рівностей: $f(0) + f(-1) = (f(0) + 1)^2$ та $2f(-1) = (f(0) + 1)(f(-1) + 1)$. Звідси $f(0) = 0$ та $f(-1) = 1$.

Маючи ці значення функції, підставимо $x = y = -1$. З рівності $f(-1) + f(0) = (f(-1) + 1)^2$ знайдемо $f(-2) = 4$.

І, нарешті, підставивши $x = 1, y = -1$, з отриманої при цьому рівності $f(0) + f(-2) = (f(1) + 1)(f(-1) + 1)$ знайдемо $f(1) = 1$.

Підставимо тепер $x = n, y = 1$ і запишемо задане рівняння у вигляді $f(n+1) = 2(f(n) + 1) - f(n-1)$. Методом математичної індукції нескладно переконатися, що $f(n) = n^2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Аналогічно, записавши для цього останню рівність у вигляді $f(n-1) = 2(f(n) + 1) - f(n+1)$, доводимо, що $f(n) = n^2$ для всіх від'ємних цілих чисел. Тому шуканою є функція $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}$.

Наведемо також приклад олімпіадної задачі, в якій функціональна залежність задана нерівністю.

Приклад 108. Чи існує функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що будь-яких дійсних чисел x та y справджується нерівність

$$f(x - f(y)) \leq x - yf(x).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2016 рік, 10 клас).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Позначимо $f(0) = a$ і підставимо в задану нерівність $y = 0$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ отримаємо $f(x - a) \leq x$. Замінивши тут x на $x + a$, для всіх дійсних x будемо мати нерівність $f(x) \leq x + a$.

Підставимо тепер у початкову нерівність $x = f(y)$. Далі послідовно отримаємо $a \leq f(y) - yf(f(y)) \leq y + a - yf(f(y))$, тобто $yf(f(y)) \leq y$ для всіх $y \in \mathbb{R}$.

Тому для всіх від'ємних значень y повинен справджуватися ланцюжок нерівностей: $1 \leq f(f(y)) \leq f(y) + a \leq y + 2a$, що, очевидно, є неможливим. Отже, вказаної в умові функції не існує.

Розглянемо й пов'язані з функціями та функціональними рівняннями дві задачі заключного етапу XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

Приклад 109. Про функцію $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f(n) \rightarrow +\infty$, якщо $n \rightarrow +\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f . Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$, якщо $n \rightarrow +\infty$?

Розв'язання. Не можна. Наприклад, для функції

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ -n, & n = -2k + 1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n}{2}, & n = -2k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

маємо $f(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Але для функції

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 2k, n \in \mathbb{Z}_+, \\ -n, & n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, \\ 2n, & n = -k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$f^{-1}(n)$ для непарних n не прямує до $+\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Приклад 110. Для натурального k знайдіть усі такі функції $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$, добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^k \frac{f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{x_{2i-1} + x_{2i}} = 1.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $k \geq 2$.

Підставивши $x_1 = x_2 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$, отримаємо $f^n(1) = 1$. А оскільки $f(x)$ набуває лише додатних значень, то $f(1) = 1$.

Підставимо тепер $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, та $x_3 = x_4 = \dots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$. Враховуючи, що $f(1) = 1$, отримаємо рівність $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}$.

Покладемо $x_1 = a$, $x_3 = \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, залишаючи решта аргументів одиницями. Тоді $(f(a) + 1)\left(f\left(\frac{1}{a}\right) + 1\right) = (a + 1)\left(\frac{1}{a} + 1\right)$, звідки маємо $f(a)f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$. Отже, $f(a) = a$ або $f(a) = \frac{1}{a}$.

Припустимо, що для відмінних від одиниці додатних чисел a та b одночасно виконуються рівності $f(a) = a$, $f(b) = \frac{1}{b}$. Тоді

$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$, $f\left(\frac{1}{b}\right) = b$. Тому, підставивши $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = \frac{1}{a}$, $x_4 = \frac{1}{b}$, та залишаючи решта аргументів одиницями, отримаємо

співвідношення $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, звідки випливає рівність $ab + 1 = a + b$, тобто $(a - 1)(b - 1) = 0$, яка можлива лише при $a = 1$ та $b = 1$.

З доведеного випливає, що при $k \geq 2$ розв'язками заданого функціонального рівняння можуть бути лише функції $f(x) = x$ та $f(x) = \frac{1}{x}$.

Як показує перевірка, обидві такі функції задовольняють це рівняння.

Нехай тепер $k=1$. Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо: $f(1)=1$ та $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$. Отже, для функції $g(x)=f(x)-x$ будемо мати: $g(1)=0$ та $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Нехай $g(x)$ – довільна функція, визначена на інтервалі $(0;1)$, яка задовольняє на ньому нерівності $-x < g(x) < \frac{1}{x}$. Тоді, покладаючи $g(1)=0$ та $g(x)=-g\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>1$, отримаємо, що функція $f(x)=g(x)+x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння при $k=1$.

Навпаки, для кожного розв'язку $f(x)>0$ функція $g(x)=f(x)-x$ задовольняє накладені на неї вище умови. При цьому нерівність $g(x)>-x$, $x\in(0;1)$, очевидна, а $g(x)<\frac{1}{x}$, $x\in(0;1)$ випливає з нерівності

$$-g(x)+\frac{1}{x}=g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)>0, x\in(0;1).$$

Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при $k=1$. Зокрема, покладаючи $g(x)=0$ та $g(x)=\frac{1}{x}-x$, отримаємо отримані нами для $k\geq 2$ розв'язки $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}$ відповідно. Але, крім них, при $k=1$ задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(0;1), \\ 1, & x=1, \\ x-1, & x\in(1;+\infty). \end{cases}$$

§7.3. Вибрані задачі зарубіжних та міжнародних змагань юних математиків

Функціональні рівняння та нерівності характерні й для багатьох зарубіжних та міжнародних олімпіад з математики.

Приклад 111. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють тотожність $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$.

(Болгарія, 1968 рік)

Розв'язання. Для $x = y = 1$, отримаємо $2f(1) = 2f^2(1)$, звідки випливає, що $f(1) = 0$ або $f(1) = 1$.

Якщо $f(1) = 0$, то, покладаючи $y = 1$, знайдемо $f(x) \equiv 0$.

Якщо ж $f(1) = 1$, то для $y = 1$ будемо мати тотожність $f(x) + x \equiv (x+1)f(x)$, тобто $x(f(x) - 1) \equiv 0$. Звідси для всіх $x \neq 0$ отримуємо $f(x) = 1$ та $f(1) = \alpha$. Як показує перевірка, α може бути довільним дійсним числом.

Приклад 112. Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє тотожність

$$f(xy) \equiv \frac{f(x) + f(y)}{x + y}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0.$$

Чи існує таке значення $x \in \mathbb{R}$, для якого $f(x) \neq 0$?

(Нью-Йорк, 1978 рік)

Розв'язання. Підставивши $y = 0$, для всіх $x \neq 0$ отримаємо $f(0) = \frac{f(x) + f(0)}{x}$. Якщо $f(0) = a$, то $f(x) = a(x-1)$.

Для $a = 0$ звідси маємо $f(x) \equiv 0$. А для $a \neq 0$ отримуємо, що $f(x)$ може набувати значення 0 хіба що в точці $x = 1$. Але при $f(1) = 0$ з умови задачі для $x = 2$, $y = 1$ отримуємо рівність

$$f(2) = \frac{f(2)}{3}, \text{ з якої випливає, що також } f(2) = 0. \text{ Тому } f(x) \equiv 0.$$

Приклад 113. Знайдіть усі такі функції $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, які задовольняють умову $f(1) = 2$ і тотожність

$$f(xy) \equiv f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \quad x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1980 рік).

Розв'язання. Підставляючи $y = 1$, для всіх $x \in \mathbb{Q}$ отримаємо $f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1$, тобто $f(x+1) = f(x) + 1$.

Звідси, покладаючи $x = 0$, знайдемо $f(0) = 1$. Крім того, методом математичної індукції встановимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $f(x+n) \equiv f(x) + n$.

Покладаючи тут $x = 0$, отримаємо $f(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. А при $x = -n$ знайдемо $f(-n) = -n + 1$. Тому $f(x) = x + 1$ для всіх $x \in \mathbb{Z}$.

Підставимо тепер $x = \frac{1}{n}$, $y = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1,$$

звідки, враховуючи $f(1) = 2$, $f(n) = n + 1$, $f\left(\frac{1}{n} + n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + n$,

знайдемо $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$.

І, нарешті, покладаючи $x = p$, $p \in \mathbb{Z}$, $y = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1 = \\ &= (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \left(p + \frac{1}{q} + 1\right) + 1 = \frac{p}{q} + 1. \end{aligned}$$

Таким чином, $f(x) = x + 1$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$.

Зауважимо, що у разі неперервності шуканої функції ми граничним переходом отримали би $f(x) = x + 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 114. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівність

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

для всіх дійсних чисел a, b, c таких, що $ab + bc + ca = 0$.

(Міжнародна математична олімпіада, 2004 рік).

Розв'язання. Підставимо $a = b = c = 0$. Тоді $3P(0) = 2P(0)$. Отже, $P(0) = 0$. Якщо тепер $a = x \in \mathbb{R}$, $b = c = 0$, то з рівності $P(x) + P(0) + P(-x) = 2P(x)$ отримаємо $P(-x) \equiv P(x)$. Таким чином, шуканий многочлен має такий загальний вигляд:

$$P(x) = \sum_{k=1}^n C_k x^{2k}.$$

Безпосередньою перевіркою нескладно переконатися, що для $n = 2$ цей многочлен задовольняє умову задачі за довільних дійсних значень C_1 та C_2 . Доведемо, що інших розв'язків немає.

Зауважимо, що числа $a = 6x$, $b = 3x$, $c = -2x$ задовольняють умову $ab + bc + ca = 0$ при кожному $x \in \mathbb{R}$. Тому за умовою задачі для кожного $k \leq n$ повинна справджуватися тотожність

$$C_k (6x - 3x)^{2k} + C_k (3x + 2x)^{2k} + C_k (-2x - 6x)^{2k} \equiv 2C_k (6x + 3x - 2x)^{2k}.$$

Але для $k \geq 3$ вона можлива лише за умови $C_k = 0$, бо для них справджується нерівність $3^{2k} + 5^{2k} + (-8)^{2k} > 8^{2k} > 2 \cdot 7^{2k}$.

І, на завершення, розглянемо ще одну задачу міжнародної олімпіади, в якій функціональна залежність задана нерівністю.

Приклад 115. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, для яких виконується умова $f(n+1) > f(f(n))$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(Міжнародна математична олімпіада, 1997 рік).

Розв'язання. Нехай число k – найменший елемент множини значень функції f , яка є підмножиною множини натуральних чисел. При цьому $k = f(m)$ для деякого $m \in \mathbb{N}$.

Якщо $m > 1$, то за умовою задачі $k = f(m) > f(f(m-1))$, що суперечить вибору k як найменшого елемента. Тому $k = f(1)$.

Аналогічно, розглядаючи функцію f для $n \geq 2$, встановимо, що серед її значень найменшим є значення $f(2)$ причому $f(2) > f(1)$. Справді, з рівності $f(2) = f(1)$ та умови задачі отримали би суперечність $k = f(1) = f(2) > f(f(1))$.

Такі міркування можуть бути продовжені, і ми отримаємо нескінченний ланцюжок нерівностей:

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots,$$

тобто функція f є монотонно зростаючою. Оскільки при цьому $f(1) \geq 1$, то звідси випливає, що $f(n) \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що $f(n) > n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f(n) \geq n+1$ і, внаслідок монотонності, $f(f(n)) \geq f(n+1)$, що суперечить умові $f(n+1) > f(f(n))$. Отже, $f(n) = n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, така функція задовольняє умову задачі.