

Розділ IV. Циклічні групи дробово-лінійних підстановок

§4.1. Найпростіші приклади циклічних підстановок

Функцію φ називають *циклічною функцією n -го порядку*, якщо n – найменше натуральне число, для якого справджується тотожність $\varphi(\varphi(\dots\varphi(x)\dots)) \equiv x$, в лівій частині якої функція φ фігурує n разів.

Очевидно, що єдиною циклічною функцією першого порядку є функція $\varphi(x) \equiv x$. Однак практичного застосування для розв'язування функціональних рівнянь вона не має.

Розглянемо найпростіші циклічні функції другого порядку та їх використання в процесі розв'язування функціональних рівнянь.

Такими є функції: $\varphi(x) = -x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ та $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$.

Приклад 25. Розв'яжіть рівняння:

а). $f(x) - 2xf(-x) = x + 3, x \in \mathbb{R};$

б). $f(x) - 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = x + 3, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

в). $f(x) - 2xf\left(-\frac{1}{x}\right) = x + 3, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Розв'язання. Зробимо у заданих рівняннях такі підстановки:

а). Замінімо x на $-x$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f(-x) + 2xf(x) = -x + 3$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння а). Звідси $(1 + 4x^2)f(x) = x + 3 - 2x^2 + 6x$, тобто

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 7x + 3}{4x^2 + 1}.$$

б). Замінімо x на $\frac{1}{x}$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f(x) = \frac{1}{x} + 3$ в системі з заданим рівнянням.

Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння б). Звідси $(1-4)f(x) = x + 3 + 2 + 6x$, тобто

$$f(x) = -\frac{7x+5}{3}, \quad x \neq 0.$$

в). Замінімо x на $-\frac{1}{x}$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x} f(x) = -\frac{1}{x} + 3$ в системі з заданим рівнянням.

Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння в). Звідси $(1+4)f(x) = x + 3 - 2 + 6x$, тобто

$$f(x) = \frac{7x+1}{5}, \quad x \neq 0.$$

Зауважимо, що аналогічно можуть бути зведені до системи двох рівнянь функціональні рівняння такого загального вигляду

$$F(x, f(x), f(\varphi(x))) = 0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція другого порядку. При цьому друге рівняння системи матиме вигляд $F(\varphi(x), f(\varphi(x)), f(x)) = 0$.

Звертаємо увагу читачів на те, що не завжди така система матиме розв'язок, або що її розв'язок буде єдиним.

Приклад 26. Розв'яжіть рівняння:

а). $f(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) = x + 3, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

б). $f(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Розв'язання. Замінімо у заданих рівняннях x на $\frac{1}{x}$.

Відповідно отримаємо такі рівняння:

а). $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} + 3$. Помножимо обидві його частини на

x і додамо до заданого рівняння. В результаті будемо мати $0 \cdot f(x) = 4x + 4$ для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, що не справджується для жодної функції $f(x)$. Отже, задане рівняння не має розв'язків.

б). $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} - 1$. Поступаючи аналогічно як у

попередньому випадку, приходимо до рівності $0 \cdot f(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, яка правильна для довільної функції $f(x)$.

Повертаючись до початкового рівняння, зауважимо, що одним з його розв'язків є функція $h(x) = x$. Тому будемо шукати розв'язки такого рівняння у вигляді суми $f(x) = g(x) + x$. Тоді для функції $g(x)$ отримаємо рівняння $g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одним з розв'язків якого є функція $g(x) \equiv 0$.

Припустимо тепер, що існує таке $x_0 \neq 0$, для якого $g(x_0) = y_0 \neq 0$. Якщо при цьому $g\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{y_0}{x_0}$, то така функція також буде розв'язком. Перебравши всі такі $x_0 \neq 0$ та $y_0 \neq 0$, отримаємо всі шукані функції $g(x)$, а разом з ними і нескінченну множину розв'язків початкового рівняння.

§4.2. Циклічні дробово-лінійні підстановки другого порядку

Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \in \mathbb{R}$, $cx+d \neq 0$, і накладемо умови: $ad \neq bc$, тобто $\varphi(x) \neq \text{const}$, та $a \neq d$, якщо $b = c = 0$, тобто не справджується тотожність $\varphi(x) \equiv x$.

Знайдемо

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(x)) &= \frac{a\varphi(x)x+b}{c\varphi(x)x+d} = \frac{a \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + d} = \\ &= \frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} = \frac{(a^2+bc)x+ab+bd}{(ac+cd)x+bc+d^2}.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що $\varphi(\varphi(x)) \equiv x$ за виконання таких умов:

$$a^2 + bc = bc + d^2 \neq 0, \quad ab + bd = 0, \quad ac + cd = 0.$$

Запишемо ці умови у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} (a-d)(a+d) = 0, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0. \end{cases}$$

Якщо $a+d \neq 0$, то отримуємо $a=d \neq 0$, $b=c=0$, тобто функцію $\varphi(x) \equiv x$ першого порядку циклічності.

Якщо ж $a+d=0$ і при цьому $a^2+bc \neq 0$, то дробово-лінійна функція $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією другого порядку.

Приклад 27. Розв'яжіть рівняння

$$f(x) - xf\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Розв'язання. Замінімо x на $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Оскільки

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

то при цьому отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{x+1}{x-1} f(x) = 3.$$

Помножимо обидві його частини на x і додамо до заданого.

В результаті отримаємо $\left(1 - x \cdot \frac{x+1}{x-1}\right) f(x) = 3 + 3x$, звідки

$$\text{знаходимо } f(x) = \frac{3(1-x^2)}{x^2+1}, x \neq 1.$$

Звернемо увагу читачів на те, що для функції $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ми мали $a=b=c=1$, $d=-1$, тобто вимоги для другого порядку її циклічності $a+d=0$ та $a^2+bc \neq 0$ виконувалися.

Повертаючись до найпростіших циклічних підстановок, відзначимо, що вони отримуються при наступних значеннях параметрів:

$$\varphi(x) = -x \text{ при } a=1, b=c=0, d=-1,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ при } a=d=0, b=c=1,$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} \text{ при } a=d=0, b=-1, c=1.$$

§4.3. Циклічні дробово-лінійні підстановки третього порядку

Використовуючи значення виразу

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{(a^2+bc)x + ab + bd}{(ac+cd)x + bc + d^2},$$

з попереднього параграфа, та міркуючи аналогічно, легко отримати, що для всіх допустимих значень x тотожність $\varphi(\varphi(\varphi(x))) \equiv x$ справджується за виконання таких умов:

$$\begin{cases} (a-d)(a^2+ad+d^2+bc) = 0, \\ b(a^2+ad+d^2+bc) = 0, \\ c(a^2+ad+d^2+bc) = 0. \end{cases}$$

Якщо при цьому $a^2+ad+d^2+bc \neq 0$, то маємо циклічну функцію $\varphi(x) \equiv x$ першого порядку.

Якщо ж $a^2 + ad + d^2 + bc = 0$, то функція $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією третього порядку за виконання, як це впливає з параграфа 4.2, додаткової умови $a + d \neq 0$.

Приклад 28. Розв'яжіть рівняння

$$f(x) - 2f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = 3x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Розв'язання. Для функції $\varphi(x) = \frac{x-3}{x+1}$ маємо $a = c = d = 1$, $b = -3$, $a + d = 2 \neq 0$, $a^2 + ad + d^2 + bc = 0$. Тому вона є циклічною функцією третього порядку. Отже, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) \equiv x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Знайдемо також

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{\varphi(x)-3}{\varphi(x)+1} = \frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1} = \frac{x+3}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\},$$

Замінивши у заданому рівнянні x на $\varphi(x) = \frac{x-3}{x+1}$, отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) - 2f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) = 3 \cdot \frac{x-3}{x+1}.$$

У ньому також замінимо x на $\frac{x-3}{x+1}$ і прийдемо до рівняння

$$f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) - 2f(x) = 3 \cdot \frac{x+3}{1-x}.$$

Помножимо обидві частини другого рівняння на 2, третього – на 4 і додамо такі три рівняння. В результаті будемо мати

$$-7f(x) = 3x + 6 \cdot \frac{x-3}{x+1} + 12 \cdot \frac{x+3}{1-x}.$$

$$\text{Звідси знаходимо } f(x) = \frac{3(x^3 - 2x^2 - 25x - 6)}{7(1-x^2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

Узагальнюючи, відзначимо, що вказаним способом рівняння вигляду

$$F(x, f(x), f(\varphi(x))) = 0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція третього порядку, може бути зведене до системи трьох рівнянь. При цьому друге рівняння системи матиме вигляд

$$F(\varphi(x), f(\varphi(x)), f(\varphi(\varphi(x)))) = 0,$$

а третє –

$$F(\varphi(\varphi(x)), f(\varphi(\varphi(x))), f(x)) = 0.$$

Не завжди така система матиме розв'язок. Наприклад, при розв'язуванні функціонального рівняння $f(x) - f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = 3x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, ми в кінцевому результаті прийшли би до рівняння

$$0 \cdot f(x) = 3x + 3 \cdot \frac{x-3}{x+1} + 3 \cdot \frac{x+3}{1-x},$$

яке для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ не задовольняє жодна з функцій.

§4.4. Циклічні дробово-лінійні підстановки четвертого порядку та їх застосування

Продовжуючи й далі міркувати аналогічно, для виконання тотожності $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) \equiv x$ на множині допустимих значень x отримаємо таку систему умов:

$$\begin{cases} (a-d)(a+d)(a^2+d^2+2bc) = 0, \\ b(a+d)(a^2+d^2+2bc) = 0, \\ c(a+d)(a^2+d^2+2bc) = 0. \end{cases}$$

Якщо $a^2 + d^2 + 2bc \neq 0$, то при $a + d = 0$ матимемо вже відому нам умову циклічності другого порядку, а при $a + d \neq 0$ отримаємо функцію $\varphi(x) \equiv x$.

Якщо ж $a^2 + d^2 + 2bc = 0$, то за умови $a + d \neq 0$ функція $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією четвертого порядку.

Проілюструємо застосування циклічних дробово-лінійних підстановок четвертого порядку до розв'язування функціональних рівнянь.

Приклад 29. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють рівняння $xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

Розв'язання. Для функції $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ маємо:

$$\varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{x}, \quad \varphi(\varphi(\varphi(x))) = -\frac{x+1}{x-1}, \quad \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) = x.$$

Отже, отримуємо таку лінійну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned} xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= 1, & \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) &= 1, \\ -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) &= 1, & -\frac{x+1}{x-1}f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right) + 2f(x) &= 1. \end{aligned}$$

З неї знаходимо $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

Пропонуємо читачам самостійно узагальнити цей метод на розв'язування функціональних рівнянь вигляду

$$F(x, f(x), f(\varphi(x))) = 0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція четвертого порядку.

§4.5. Циклічні дробово-лінійні функції довільного порядку

Аналізуючи результати попередніх параграфів, логічно поставити питання про існування циклічних, в тому числі й дробово-лінійних, функцій довільного порядку.

Не ставлячи собі за мету знайти всі такі функції, будемо шукати їх у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{x \cos \alpha - \sin \alpha}{x \sin \alpha + \cos \alpha}, \quad x \sin \alpha + \cos \alpha \neq 0.$$

Для зручності композицію n таких функцій позначимо $\varphi_n(x)$.

Методом математичної індукції доведемо, що

$$\varphi_n(x) = \frac{x \cos n\alpha - \sin n\alpha}{x \sin n\alpha + \cos n\alpha}$$

для всіх допустимих значень x та всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для $n = 1$ така рівність правильна.

Припустивши, що вона правильна для $n = k$, для $n = k + 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x) &= \frac{\frac{x \cos k\alpha - \sin k\alpha}{x \sin k\alpha + \cos k\alpha} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{x \cos k\alpha - \sin k\alpha}{x \sin k\alpha + \cos k\alpha} \cdot \sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{x(\cos k\alpha \cdot \cos \alpha - \sin k\alpha \cdot \sin \alpha) - (\sin k\alpha \cdot \cos \alpha + \cos k\alpha \cdot \sin \alpha)}{x(\sin k\alpha \cdot \cos \alpha + \cos k\alpha \cdot \sin \alpha) + (\cos k\alpha \cdot \cos \alpha - \sin k\alpha \cdot \sin \alpha)} = \\ &= \frac{x \cos(k+1)\alpha - \sin(k+1)\alpha}{x \sin(k+1)\alpha + \cos(k+1)\alpha}. \end{aligned}$$

Звідси, внаслідок принципу математичної індукції, впливає її правильність для всіх натуральних n .

Виберемо тепер $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Тоді $\sin n\alpha = 0$, $|\cos n\alpha| = 1$. Отже,

$\varphi_n(x) \equiv x$. При цьому дробово-лінійна функція

$$\varphi(x) = \frac{x \cos \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}}{x \sin \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n}}, \quad x \neq -\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{n}, \quad m = \overline{1, n-1},$$

буде циклічною функцією порядку n .

Цікавим є й питання щодо лінійних циклічних функцій. Нескладно переконатися, що композицією n функцій вигляду $\varphi(x) = ax + b$ є функція $\varphi_n(x) = a^n x + (1 + a + \dots + a^{n-1})b$.

При цьому $\varphi_n(x) \equiv x$, якщо $a = 1, b = 0$, $\varphi(x) \equiv x$, а для парних n – ще й у разі $a = -1, b \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = -x + b$. Для кожного $b \in \mathbb{R}$ така функція є циклічною функцією другого порядку.

Приклад 30. Розв'яжіть рівняння

$$f(x) - 2xf(2-x) = x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Замінімо x на $2-x$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f(2-x) - 2(2-x)f(x) = 5-x$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до початкового рівняння. Звідси отримуємо $(4x^2 - 8x + 1)f(x) = x + 3 + 2x(5-x)$, тобто $f(x) = \frac{-2x^2 + 11x + 3}{4x^2 - 8x + 1}$.

§4.6. Розв'язування різних функціональних рівнянь зведенням до систем рівнянь

Розглядаючи наведені вище приклади функціональних рівнянь, які зводяться до систем рівнянь, ми завжди одним з аргументів функції f мали x . Розглянемо аналогічні приклади рівнянь дещо іншого роду.

Приклад 31. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}.$$

Розв'язання. Позначимо $\frac{x+1}{x-1} = t$. Звідси $x = 1 + \frac{2}{t-1}$, тому запишемо задане рівняння у вигляді

$$f(t) - 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t-1}{2}, \quad t \neq 0.$$

Замінімо тепер t на $\frac{1}{t}$. В результаті отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{1}{t}\right) - 2f(t) = \frac{1-t}{2t}, \quad t \neq 0.$$

Помножимо обидві його частини на 2 і додамо до попереднього рівняння. Тоді $-3f(t) = \frac{t-1}{2} + \frac{1-t}{t}$, отже, маємо

$$f(t) = \frac{-t^2 + 3t - 2}{6t}, \text{ тобто } f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{6x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}.$$

Приклад 32. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2(1-x^2)}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

Розв'язання. Зробимо заміни: 1) $x = t$, 2) $x = \frac{1}{1-t}$, 3) $x = \frac{t-1}{t}$.

В результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f\left(\frac{t-1}{t}\right) = \frac{2(1-t^2)}{t}, \\ f\left(\frac{t-1}{t}\right) + f(t) = \frac{2(2t-t^2)}{t-1}, \\ f(t) + f\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{2(2t-1)}{t(t-1)}. \end{cases}$$

Віднявши від суми другого та третього рівнянь системи перше рівняння, знайдемо

$$f(t) = \frac{2t-t^2}{t-1} + \frac{2t-1}{t(t-1)} - \frac{1-t^2}{t} = \frac{t+1}{t-1}.$$

Отже, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$

Відзначимо, що в окремих випадках підстановки можуть бути не такими очевидними.

Приклад 33. Розв'яжіть рівняння

$$2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) - f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 3x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Розв'язання. Замінивши x на $\frac{2x-1}{x+1}$, отримаємо рівняння

$$2f\left(\frac{x}{x-1}\right) - f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = \frac{6x-3}{x+1}.$$

Помножимо обидві його частини на 2 і додамо до заданого рівняння. В результаті знайдемо $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x+1}$.

Позначимо $\frac{x}{x-1} = t$. Звідси $x = \frac{t}{t-1}$. Отже,

$$f(t) = \frac{\left(\frac{t}{t-1}\right)^2 + \frac{5t}{t-1} - 2}{\frac{t}{t-1} + 1} = \frac{4t^2 - t - 2}{(t-1)(2t-1)}.$$

$$\text{Тому } f(x) = \frac{4x^2 - x - 2}{(x-1)(2x-1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Розглянемо ще й такий приклад зведення функціонального рівняння до системи рівнянь.

Приклад 34. Для кожного $a \in \mathbb{N}$ розв'яжіть рівняння

$$2f(x) + f(a-x) = 1 - xf(a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Замінивши послідовно x на $a-x$, на a та на 0, разом із заданим рівнянням отримаємо систему чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} 2f(x) + f(a-x) = 1 - xf(a), \\ 2f(a-x) + f(x) = 1 - (a-x)f(a), \\ 2f(a) + f(0) = 1 - af(a), \\ 2f(0) + f(a) = 1. \end{cases}$$

З двох останніх рівнянь системи знайдемо $f(a) = \frac{1}{2a+3}$.

Підставивши знайдене значення в перші два рівняння, для визначення функції $f(x)$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2f(x) + f(a-x) = 1 - \frac{x}{2a+3}, \\ 2f(a-x) + f(x) = 1 - \frac{a-x}{2a+3}. \end{cases}$$

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що її розв'язком є функція $f(x) = \frac{a+1-x}{2a+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

I, нарешті, приклад підстановок, які не є дробово-лінійними.

Приклад 35. Розв'яжіть рівняння

$$f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{x^n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\},$$

якщо n – довільне непарне натуральне число, більше за 1.

Розв'язання. Провівши заміни: 1) $x = \sqrt[n]{\frac{t^n-1}{t^n}}$, 2) $x = \sqrt[n]{\frac{1}{1-t^n}}$ та

$x = t$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\sqrt[n]{\frac{t^n-1}{t^n}}\right) + f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-t^n}}\right) = \sqrt[n]{\frac{2t^n-1}{t^n}}, \\ f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-t^n}}\right) + f(t) = \sqrt[n]{\frac{t^n-2}{t^n-1}}, \\ f(t) + f\left(\sqrt[n]{\frac{t^n-1}{t^n}}\right) = \sqrt[n]{t^n+1}. \end{cases}$$

Нескладно переконатися, що її розв'язком є функція

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{t^n+1} + \sqrt[n]{\frac{t^n-2}{t^n-1}} - \sqrt[n]{\frac{2t^n-1}{t^n}} \right).$$

§4.7. Зведення до систем рівнянь функціональних рівнянь з вільними змінними

До систем рівнянь можуть бути зведені й функціональні рівняння з вільними змінними, як ми це робили в прикладі 24. Розглянемо ряд інших рівнянь такого роду.

Приклад 36. Розв'яжіть рівняння

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Підставивши в рівняння $y = 0$, для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ отримаємо рівність $xf(0) = f(0)$, яка можлива лише за умови $f(0) = 0$.

Підставимо тепер $y = 2$ і в отриманому при цьому рівнянні

$$xf(2) - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

замінімо x на $\frac{2}{x}$. Позначивши $f(2) = a$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} ax - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right), \\ \frac{2a}{x} - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = f(x). \end{cases}$$

З неї маємо $\frac{2a}{x} - 2(ax - 2f(x)) = f(x)$, тобто

$$f(x) = \frac{2a}{5} \left(\frac{1}{x} - x \right) = c \left(\frac{1}{x} - x \right), \quad c = \frac{2f(2)}{5}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Перевірка показує, що c може бути довільним дійсним числом. Нагадаємо, що, крім цього, також $f(0) = 0$.

Приклад 37. Розв'яжіть рівняння

$$f(2^x + y) = f(x) + f(2^y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Зробимо такі чотири підстановки:

1) $x = 0, y = 0$; 2) $x = 1, y = 2$; 3) $x = 0, y = t$; 4) $x = t, y = 0$.

В їх результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f(1) = f(0) + f(1), \\ f(4) = f(1) + f(4), \\ f(1+t) = f(0) + f(2^t), \\ f(2^t) = f(t) + f(1). \end{cases}$$

Звідси знаходимо $f(0) = f(1) = 0$ та $f(2^t) = f(1+t) = f(t)$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. З врахуванням заданого рівняння для $y = 2^x$ маємо

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+1) = f(2^{x+1}) = f(2^x + 2^x) = \\ &= f(x) + f(2^{2^x}) = f(x) + f(2^x) = f(x) + f(x), \end{aligned}$$

звідки знаходимо єдиний розв'язок $f(x) \equiv 0$.

Частковим випадком зведення до системи рівнянь є метод відокремлення змінних. Він ґрунтується на тому, що тотожність $g(x) \equiv g(y)$ можлива лише умови, що $g(x) \equiv c$ та $g(y) \equiv c$.

Приклад 38. Розв'яжіть рівняння

$$f(x \cdot y) = y^\alpha f(x) + x^\beta f(y), \quad x \in (0; \infty), y \in (0; \infty),$$

де $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$.

Розв'язання. Оскільки $f(x \cdot y) = f(y \cdot x)$, то також

$$y^\alpha f(x) + x^\beta f(y) = x^\alpha f(y) + y^\beta f(x).$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо $\frac{f(x)}{x^\beta - x^\alpha} = \frac{f(y)}{y^\beta - y^\alpha}$ при

$x \neq 1, y \neq 1$. Тоді $\frac{f(x)}{x^\beta - x^\alpha} = c$, тобто $f(x) = c(x^\beta - x^\alpha), x \neq 1$.

Перевірка показує, що тут c – довільне дійсне число.

Крім того, з початкового рівняння при $x = y = 1$ знаходимо $f(1) = 0$. Тому $f(x) = c(x^\beta - x^\alpha)$ для всіх $x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R}$.