

§5.10. Функціональні рівняння в класах диференційованих функцій

Скориставшись висновками, отриманими при розв'язуванні прикладу 61, знайдемо розв'язки деяких функціональних рівнянь у класах диференційованих функцій.

Приклад 64. Знайдіть усі неперервно диференційовані функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax + b) = af(x), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Покладемо $g(x) = f'(x)$. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x , отримаємо $g(ax + b) = g(x)$.

Оскільки, за умовою, функція g неперервна, то $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Тому також $f'(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Отже, $f(x) = cx + d$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, отримаємо тотожність $c(ax + b) + d \equiv a(cx + d)$, з якої при $a \neq 1$ знайдемо $d = \frac{bc}{a-1}$. Отже, остаточно маємо $f(x) = c\left(x + \frac{b}{a-1}\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

Приклад 65. Знайдіть усі неперервно диференційовані функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f(4x + 1) = 2f(2x - 1) + 3.$$

Розв'язання. Покладемо $g(x) = f'(x)$. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x , для функції g отримаємо рівність

$$g(4x + 1) = g(2x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай тепер $2x - 1 = t$. Тоді $x = \frac{t+1}{2}$, отже, приходимо до рівняння $g(2t + 3) = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у класі неперервних функцій. Воно, згідно з прикладом 61, має розв'язки $g(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Тому $f'(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, та $f(x) = cx + d$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, з тотожності $c(4x+1)+d \equiv 2(c(2x-1)+d)+3$, знаходимо $d=3(c-1)$. Отже, остаточно маємо $f(x)=cx+3(c-1)$, $c \in \mathbb{R}$.

Приклад 66. Знайдіть усі двічі неперервно диференційовані функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax+b)=a^2 f(x), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Поклавши $g(x)=f''(x)$, двічі здиференціюємо обидві частини рівняння за змінною x . У результаті для неперервної функції g отримаємо рівняння $g(ax+b)=g(x)$, з якого знаходимо $g(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$. Тому також $f''(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$.

Отже, $f'(x)=cx+d$, $f(x)=c \cdot \frac{x^2}{2}+dx+e$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, з тотожності

$$\frac{c(ax+b)^2}{2}+d(ax+b)+e \equiv a^2 \left(\frac{cx^2}{2}+dx+e \right),$$

при $a \neq 0$ та $a \neq \pm 1$ отримаємо $d = \frac{bc}{a-1}$, $e = \frac{b^2c}{2(a-1)^2}$.

Отже, остаточно маємо

$$f(x) = \frac{c}{2} \left(x + \frac{b}{a-1} \right)^2, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

З використанням похідної можуть бути розв'язані й деякі функціональні рівняння з вільними змінними. Проілюструємо цей підхід на прикладі розв'язування неоднорідного функціонального рівняння Коші.

Приклад 67. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які в точці $x=0$ мають скінченну похідну і для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$.

Розв'язання. Поклавши $x = y = 0$, з умови знайдемо $f(0) = 0$.

Позначимо $f'(0) = a$ і для $y \neq 0$ запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} + x^2 + xy.$$

Для кожного фіксованого значення x його права частина при $y \rightarrow 0$ прямує до $a + x^2$. Тому й $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = a + x^2$, тобто

$f'(x) = a + x^2$. Отже, $f(x) = ax + \frac{x^3}{3} + b$, причому з рівності $f(0) = 0$ маємо $b = 0$.

Підставляючи функцію $f(x) = ax + \frac{x^3}{3}$ в початкове рівняння, переконуємося, що при цьому a може набувати довільних дійсних значень.

Зауважимо, що у випадку однорідного рівняння Коші задача зведеться до розв'язування диференціального рівняння $f'(x) = a$ з початковою умовою $f(0) = 0$.

§5.11. Знаходження неперервно диференційованих розв'язків методом відокремлення змінних

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь у класі неперервно диференційованих функцій метод диференціювання може успішно поєднуватися з методом відокремлення змінних. Проілюструємо такі можливості на прикладах розв'язування функціонального рівняння Коші та звідних до нього рівнянь.

Приклад 68. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y , з рівності похідних лівих частин отримаємо, що

для відповідних похідних правих частин справджується рівність $f'(x) = f'(y)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$, що можливо лише за одночасного виконання умов $f'(x) = a$, $f'(y) = a$. Звідси маємо $f(x) = ax + b$. Підставляючи таку функцію в рівняння Коші, переконуємося, що a може бути довільним дійсним числом, $b = 0$.

Зауважимо, що аналогічно в класі неперервно диференційованих функцій можна розв'язати й неоднорідне рівняння Коші $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Для нього з рівностей відповідних похідних в його правій частині $f'(x) + 2y = f'(y) + 2x$ методом відокремлення змінних приходимо до диференціального рівняння $f'(x) - 2x = a$, з якого знаходимо $f(x) = x^2 + ax + b$. При цьому також a може бути довільним дійсним числом, $b = 0$.

Приклад 69. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні прикладу 2, встановимо, що $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому, якщо існує таке y_0 , для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$. Тому для знаходження інших розв'язків надалі будемо вважати, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Далі диференціюємо обидві частини рівняння за змінними x та y . З рівності обох таких похідних лівих частин отримаємо, що й для частинних похідних правих частин рівняння справджується рівність $f'(x)f(y) = f(x)f'(y)$, яку, відокремлюючи змінні, можна записати у вигляді $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$.

Тоді з диференціального рівняння $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$ знаходимо

$$\ln f(x) = ax + \ln c, \quad f(x) = ce^{ax} = cb^x, \quad \text{де } b = e^a.$$

Підставивши таку функцію в задане рівняння, отримуємо $c = 1$, b – довільне додатне число.

Приклад 70. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x \in (0; +\infty), \quad y \in (0; +\infty).$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y , отримаємо рівності $yf'(xy) = f'(x)$ та $xf'(xy) = f'(y)$. Звідси випливає, що $\frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(y)}{x}$, отже, й $xf'(x) = yf'(y)$ для всіх $x \in (0; +\infty)$, $y \in (0; +\infty)$.

Тоді з диференціального рівняння $xf'(x) = a$ знаходимо

$$f(x) = a \ln x + c = \log_b x + c, \quad x \in (0; +\infty),$$

де $b = e^{1/a}$ при $a \neq 0$, та $f(x) \equiv c$ при $a = 0$. Підстановкою таких функцій в задане рівняння переконуємося, що в обох випадках $c = 0$, а число $b \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Приклад 71. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x \in (0; +\infty), \quad y \in (0; +\infty).$$

Розв'язання. Підставивши $x = y = \sqrt{t}$, встановимо, що $f(t) \geq 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, причому, якщо існує таке y_0 , для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$. Тому для знаходження інших розв'язків надалі будемо вважати, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y , отримаємо рівності $yf'(xy) = f'(x)f(y)$ та $xf'(xy) = f(x)f'(y)$.

Звідси маємо, що $\frac{f'(x)f(y)}{y} = \frac{f'(y)f(x)}{x}$ для всіх $x > 0$, $y > 0$.

Тому й $\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{yf'(y)}{f(y)}$ для всіх $x > 0, y > 0$, і з диференціального рівняння $\frac{xf'(x)}{f(x)} = a$ знаходимо $\ln f(x) = a \ln x + \ln c, c > 0$, тобто $f(x) = cx^a$. Підстановкою в задане рівняння переконуємося, що $c = 1, a \in \mathbb{R}$.

Як і слід було очікувати, в прикладах 68 – 71 ми отримали ті ж розв'язки, які вже були знайдені нами в класах неперервних функцій.

§5.12. Рівняння та системи функціональних рівнянь з кількома шуканими функціями

Метод відокремлення змінних може бути корисним і при розв'язуванні деяких функціональних рівнянь з кількома невідомими функціями. Його застосування дає змогу звести такі рівняння до систем рівнянь.

Приклад 72. Знайдіть всі пари функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) + g(x+y) - g(x-y) = 4xy + 2\sqrt[3]{y-x}.$$

Розв'язання. Покладемо $x+y=t, x-y=z$. Тоді $2x=t+z, 2y=t-z$. Отже, задане рівняння можна записати у вигляді

$$f(t) + f(z) + g(t) - g(z) = t^2 - z^2 - 2\sqrt[3]{z},$$

Звідси для всіх $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність

$$f(t) + g(t) - t^2 = g(z) - f(z) - z^2 - 2\sqrt[3]{z} = c.$$

Покладаючи в ній $z=t$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} f(t) + g(t) - t^2 = c, \\ g(t) - f(t) - t^2 - 2\sqrt[3]{t} = c, \end{cases}$$

з якої знаходимо $f(t) = -\sqrt[3]{t}, g(t) = t^2 + \sqrt[3]{t} + c$.

Перевірка показує, що функції $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ та $g(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} + c$ задовольняють задане рівняння при кожному $c \in \mathbb{R}$.

Наведемо також приклад на дослідження властивостей функцій, заданих системою рівнянь.

Приклад 73. Функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y). \end{cases}$$

Знайдіть усі можливі значення $f(0)$ та $g(0)$.

Розв'язання. Підставивши в рівняння системи $x = y = 0$, отримаємо систему рівностей

$$\begin{cases} f(0) = 2f(0)g(0), \\ g(0) = g^2(0) - f^2(0). \end{cases}$$

Зауважимо, що $g(0) \neq \frac{1}{2}$, бо інакше з другої рівності ми отримали би $f^2(0) = -\frac{1}{4}$. Тому з першої рівності маємо $f(0) = 0$.

При цьому друга рівність набуває вигляду $g(0) = g^2(0)$. Отже, $g(0) = 0$ або $g(0) = 1$.

Якщо $g(0) = 0$, то з рівнянь початкової системи при $y = 0$ отримуємо $f(x) \equiv 0$ та $g(x) \equiv 0$.

Якщо ж $g(0) = 1$, то, разом з $f(0) = 0$, таке значення можливе, наприклад, для функцій $f(x) = \sin \omega x$ та $g(x) = \cos \omega x$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Продовжимо досліджувати властивості розв'язків заданої системи рівнянь. Враховуючи основну тригонометричну тотожність, накладемо на функції f та g додаткову умову:

$$f^2(x) + g^2(x) \equiv 1.$$

За її виконання з рівнянь системи при $y = -x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ отримаємо таку систему рівностей:

$$\begin{cases} 0 = f(x)g(-x) + f(-x)g(x), \\ 1 = g(x)g(-x) - f(x)f(-x). \end{cases}$$

Помножимо першу з них на $f(x)$, а другу – на $g(x)$. Додавши отримані при цьому рівності, будемо мати $g(x) = g(-x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Відповідно з першої рівності для всіх $x \in \mathbb{R}$ отримуємо $f(-x) = -f(x)$. Таким чином, всі такі функції f є непарними, а функції g – парними.

Враховуючи це, знайдемо

$$g(x-y) = g(x)g(-y) - f(x)f(-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y).$$

Тому для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ будемо мати

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y).$$

Повертаючись до означення тригонометричного косинуса, про є йшла мова в параграфі 3.3, накладемо на функцію g ще такі три додаткові умови:

1) $g(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

2) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $g(x) > 0$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

За їх виконання однозначно отримуємо $g(x) = \cos x$.

Нехай функція f також є неперервною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ і $f(x) > 0$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тоді з рівності $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + g^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

отримуємо $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Отже, для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)g(-x) - f(-x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(x).$$

Звідси, враховуючи означення тригонометричного синуса, отримуємо $f(x) = \sin x$.

Підсумовуючи сказане, відзначимо, що система рівнянь з прикладу 73 разом з накладеними вище додатковими умовами також може бути використана для функціонального означення тригонометричних синуса та косинуса.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що отримані за накладених умов функції $f(x)$ та $g(x)$ є періодичними з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$, не використовуючи при цьому відповідну властивість конкретних функцій $\sin x$ та $\cos x$.

§5.13. Приклади функціональних співвідношень, заданих нерівностями

Чимало змістовних задач можна отримати й розглядаючи функціональні співвідношення, пов'язані з нерівностями.

Приклад 74. Знайдіть усі ін'єктивні функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють нерівність $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Таких ін'єктивних функцій не існує. Для доведення підставимо в задану нерівність $x = 0$ та $x = 1$. Отримані при цьому нерівності $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$ та $f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}$

запишемо у вигляді $\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ та $\left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ відповідно.

Отже, $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, що суперечить умові ін'єктивності.

Приклад 75. Функція $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ для всіх $x \in [0;1]$ та $y \in [0;1]$ задовольняє нерівність $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$. Відомо,

що $f(0) = f(1) = 0$. Доведіть, що рівняння $f(x) = 0$ має нескінченну кількість коренів.

Розв'язання. Підставивши в задану нерівність $x = 0$, $y = 1$, отримаємо $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$. А з підстановки $x = y = \frac{1}{2}$ будемо мати нерівність $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Тому $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Міркуючи аналогічно, нескладно довести, що $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 76. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задовольняють умови $f(x) \leq x$ і $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Розв'язання. Підставивши в задані нерівності $x = y = 0$, матимемо $f(0) \leq 0$ та $f(0) \leq 2f(0)$. Звідси отримуємо $f(0) = 0$. Отже, підставивши у другу нерівність $y = -x$, для всіх $x \in \mathbb{R}$ будемо мати: $f(x) + f(-x) \geq f(0) = 0$. Тому, з врахуванням першої нерівності, $f(x) \geq -f(-x) \geq -(-x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. З іншого боку, за першою нерівністю $f(x) \leq x$. Отже, $f(x) \equiv x$.

Приклад 77. Функція $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ така, що $\frac{f(x)}{x}$ є монотонно неспадною. Для довільних додатних x та y доведіть нерівність $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$.

Розв'язання. З умови задачі для довільних додатних x та y отримуємо нерівності $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x+y)}{x+y}$ та $\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x+y)}{x+y}$. Запишемо їх у вигляді $f(x) \leq \frac{xf(x+y)}{x+y}$ та $f(y) \leq \frac{yf(x+y)}{x+y}$. Тож залишається тільки додати дві останні нерівності,