

Розділ V. Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування функціональних рівнянь

§5.1. Степеневі функціональні рівняння

Степеневими функціональними рівняннями називають рівняння вигляду

$$f^n(x) + a_1(x) f^{n-1}(x) + \dots + a_k(x) f^{n-k}(x) + \dots + a_{n-1}(x) f(x) + a_n(x) = 0,$$

де $a_k(x)$ – деякі відомі функції, $k = \overline{1, n}$.

Позначивши $f(x) = y$, приходимо до звичайного степеневого рівняння відносно y .

У випадку, коли всі функції $a_k(x) = \alpha_k$ є константами, отримуємо степеневе функціональне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$f^n(x) + \alpha_1 f^{n-1}(x) + \dots + \alpha_k f^{n-k}(x) + \dots + \alpha_{n-1} f(x) + \alpha_n = 0,$$

розв'язування якого зводиться до розв'язування звичайного степеневого рівняння $y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \dots + \alpha_k y^{n-k} + \dots + \alpha_{n-1} y + \alpha_n = 0$.

Приклад 39. Розв'яжіть рівняння

$$f^3(x) - 2f^2(x) - f(x) + 2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Позначивши $f(x) = y$, отримаємо кубічне рівняння $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$, коренями якого є числа: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$. Тому неперервними розв'язками заданого функціонального рівняння є функції: $f_1(x) \equiv -1$, $f_2(x) \equiv 1$, $f_3(x) \equiv 2$. Крім них, таке рівняння має й нескінченну кількість інших розв'язків. Сукупність всіх його розв'язків утворюють всі можливі функції, множини значень яких є не порожніми підмножинами множини $\{-1; 1; 2\}$.

Приклад 40. Розв'яжіть рівняння

$$f^4(x) + (1 - x^2) f^2(x) - x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$(f^2(x) - x^2)(f^2(x) + 1) = 0.$$

Звідси випливає, що його розв'язками є всі ті функції, які задовольняють тотожність $|f(x)| \equiv |x|$. З них неперервними є лише дві функції: $f(x) = x$ та $f(x) = -x$.

Зауважимо, що аналогічно можна розв'язати й функціональні рівняння такого загального вигляду: $F(x, f(x)) = 0$, де $F(x, y)$ – довільна задана функція, для якої рівняння $F(x, y) = 0$ може бути розв'язане відносно змінної y .

§5.2. Метод невизначених коефіцієнтів

Систему функцій $\{a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)\}$ називають *лінійно незалежною*, якщо тотожність $c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x) + \dots + c_n a_n(x) \equiv 0$ справджується лише за умови $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Прикладами лінійно незалежних систем функцій є:

- 1) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$;
- 2) $\{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$;
- 3) $\{\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_n^x\}$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – попарно різні додатні числа.

Зокрема, лінійна незалежність першої з них випливає з того, що рівняння ненульового степеня може мати лише скінченну кількість дійсних чи комплексних коренів.

Метод невизначених коефіцієнтів для розв'язування функціональних рівнянь полягає в тому, що шуканий розв'язок записують у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних функцій $f(x) = c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x) + \dots + c_n a_n(x)$. Таку функцію підставляють у задане рівняння і прирівнюють коефіцієнти біля однакових $a_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, у його лівій та правій частинах. З отриманої системи рівнянь знаходять c_k , $k = \overline{1, n}$.

Приклад 41. Розв'яжіть рівняння

$$2f(x) + f(2-x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння є квадратичною функцією, то будемо шукати частковий розв'язок цього рівняння у вигляді $h(x) = ax^2 + bx + c$.

Підставимо цю функцію в задане рівняння замість $f(x)$ і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x в лівій та правій частинах тотожності

$$2(ax^2 + bx + c) + a(2-x)^2 + b(2-x) + c \equiv x^2.$$

З отриманої при цьому системи рівнянь

$$\begin{cases} 2a + a = 1, \\ 2b - 4a - b = 0, \\ 2c + 4a + 2b + c = 0, \end{cases}$$

знаходимо: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$. Отже,

$$h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x - 4).$$

Якщо тепер $f(x) = g(x) + h(x)$, то для функції $g(x)$ отримуємо рівняння $2g(x) + g(2-x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Припустимо, що існує таке $x_0 \in \mathbb{R}$, що $g(x_0) \neq 0$. Тоді для $x = x_0$ та $x = 2 - x_0$ повинні справджуватися рівності: $2g(x_0) + g(2 - x_0) = 0$ та $2g(2 - x_0) + g(x_0) = 0$. Але нескладно переконатися (пропонуємо читачам зробити це самостійно), що таке можливе лише за умови $g(x_0) = 0$.

Отримана суперечність доводить, що $g(x) \equiv 0$. Тому

$$f(x) = h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x - 4).$$

Приклад 42. Знайдіть принаймні одну функцію $f(x)$, визначену на множині невід'ємних дійсних чисел, для якої

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{2017} = (1 + \sqrt{x})^2, \quad x \in [0; +\infty).$$

Розв'язання. Запишемо функцію f у вигляді $f(x) = (a + b\sqrt{x})^2$.

Спочатку підберемо коефіцієнти a та b так, щоб виконувалася тотожність $f(f(x)) \equiv (1 + \sqrt{x})^2$. Оскільки

$$f(f(x)) = (a + b\sqrt{f(x)})^2 = (a + b|a + b\sqrt{x}|)^2 = (a + ab + b^2\sqrt{x})^2$$

для всіх невід'ємних a, b, x , то така тотожність буде справджуватися, якщо $a + ab = 1$ та $b^2 = 1$. Звідси знаходимо

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1 \quad \text{та} \quad f(x) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x}\right)^2.$$

Отриманий результат дає підставу припустити, що одним з розв'язків заданого в умові функціонального рівняння є

$$\text{функція } f(x) = \left(\frac{1}{2017} + \sqrt{x}\right)^2.$$

Доведемо загальніше твердження: для кожного $n \in \mathbb{N}$ композиція $f_n(x)$ n функцій вигляду $f(x) = \left(\frac{1}{n} + \sqrt{x}\right)^2$ тотожно

дорівнює $(1 + \sqrt{x})^2$, $x \in [0; +\infty)$. Для цього достатньо довести,

що $f_k(x) \equiv \left(\frac{k}{n} + \sqrt{x}\right)^2$ для всіх $k \leq n$.

Для $k=1$ це очевидно. А з припущення справедливості такої тотожності для деякого $k < n$, отримуємо, що

$$f_{k+1}(x) \equiv f(f_k(x)) \equiv \left(\frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{k}{n} + \sqrt{x}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{n} + \sqrt{x}\right)^2.$$

Тому $f_n(x) \equiv (1 + \sqrt{x})^2$, і для $n = 2017$ маємо $f(x) = \left(\frac{1}{2017} + \sqrt{x}\right)^2$.

§5.3. Функціональні рівняння в класі многочленів

Метод невизначених коефіцієнтів, який ми розглядали в попередньому параграфі особливо ефективний при розв'язуванні функціональних рівнянь у класі многочленів.

Приклад 43. Розв'яжіть у класі многочленів функціональне рівняння Коші $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Розв'язання. Якщо $f(x) = \text{const}$, то отримуємо $f(x) \equiv 0$.

Нехай тепер $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ — многочлен степеня n , де $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Підставляючи цю функцію в рівняння Коші, для всіх дійсних чисел x та y отримаємо рівність

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(x+y) + \dots + a_n(x+y)^n &= \\ &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n). \end{aligned}$$

Для $n \geq 2$ така тотожність неможлива, бо її ліва частина містить відмінні від нуля доданки вигляду $a_n C_n^k x^k y^{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$, які відсутні в її правій частині. Тому $n=1$. Отже, $f(x) = a_0 + a_1x$.

З тотожності $a_0 + a_1(x+y) \equiv (a_0 + a_1x) + (a_0 + a_1y)$ отримуємо, що $a_0 = 0$, $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тобто $f(x) = a_1x$, $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Враховуючи також розв'язок $f(x) \equiv 0$, остаточно будемо мати $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Приклад 44. Знайдіть усі многочлени $f(x)$, для яких при кожному $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність

$$f(f(x)) - f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x.$$

Розв'язання. Нехай $f(x)$ є многочленом степеня $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді многочлен у лівій частині рівності матиме степінь n^2 . Отже, така рівність можлива лише за умови $n=2$. Тому розв'язок будемо шукати у вигляді $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Підставляючи цю функцію в рівняння, приходимо до тотожності

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c - (ax^2 + bx + c) \equiv x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x.$$

Запишемо цю тотожність у вигляді

$$a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab - a)x^2 + \\ + (2abc + b^2 - b)x + (ac^2 + bc) \equiv x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$

і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x в її лівій та правій частинах, починаючи від найстаршого степеня. Послідовно знайдемо $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. Отже, $f(x) = x^2 + x - 1$.

Приклад 45. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які для кожного дійсного x задовольняють рівність $P(P(x)) = (x^2 + 2017x + 2017)P(x)$.

Розв'язання. Очевидно, що $P(x) \equiv 0$ задовольняє умову.

Нехай тепер $P(x)$ не є тотожним нулем і має степінь n , $n \geq 0$. Тоді у заданій рівності многочлен зліва має степінь n^2 , а справа – степінь $n + 2$. З рівності $n^2 = n + 2$ знайдемо $n = 2$.

Далі, міркуючи як в попередньому прикладі, многочлен $P(x)$ можна було б шукати у вигляді $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x у лівій та правій частинах отриманих виразів. Ми поступимо дещо хитріше.

Підставивши у задану рівність замість x довільний (дійсний чи комплексний) корінь квадратного тричлена $P(x)$, отримаємо $P(0) = 0$. Звідси випливає, що обидва його корені є дійсними і $P(x) = ax(x + q)$, $a \neq 0$. Враховуючи умову задачі, приходимо до тотожності

$$a \cdot ax(x + q) \cdot (ax(x + q) + q) \equiv (x^2 + 2017x + 2017) \cdot ax(x + q),$$

яка рівносильна тотожності

$$a^2x^2 + a^2qx + aq \equiv x^2 + 2017x + 2017.$$

З системи рівнянь $a^2 = 1$, $a^2 q = 2017$, $aq = 2017$ знаходимо $a = 1$, $q = 2017$. Отже, $P(x) = x(x + 2017) = x^2 + 2017x$.

Скористаємося аналогічною ідеєю і для розв'язування наступної задачі. Але спочатку обґрунтуємо наступне твердження.

Лема. Нехай многочлен $H(x)$ такий, що $H(x + a) = H(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, де $a \neq 0$ – довільна константа. Тоді $H(x) \equiv c$.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді рівняння $H(x) = 0$, ліва частина якого є многочленом ненульового степеня, матиме нескінченну кількість різних дійсних чи комплексних коренів: $x_0, x_0 + a, x_0 + 2a, x_0 + 3a, \dots$. Але, як відомо, кількість різних нулів такого многочлена, не перевищує його степеня.

Приклад 46. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівняння

$$(x + 1)P(x) = (x - 2)P(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Підставивши в задану рівність $x = -1$, отримаємо $P(0) = 0$. Аналогічно, підставивши $x = 2$, знайдемо $P(2) = 0$. Тому $P(x) = x(x - 2)Q(x)$, де $Q(x)$ – деякий многочлен, для якого справджується рівність

$$(x + 1) \cdot x(x - 2)Q(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)(x - 1)Q(x + 1)$$

або ж $xQ(x) = (x - 1)Q(x + 1)$.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що $Q(1) = 0$. Тому $Q(x) = (x - 1)H(x)$, де $H(x)$ – многочлен, який задовольняє умову $x \cdot (x - 1)H(x) = (x - 1) \cdot xH(x + 1)$, тобто $H(x) = H(x + 1)$.

Звідси, внаслідок доведеної вище леми, маємо $H(x) = c$. Тоді $Q(x) = c(x - 1)$, $P(x) = cx(x - 1)(x - 2)$.

Підстановкою в задане рівняння переконуємося, що тут c – довільне дійсне число.

§5.4. Функціональні рівняння та періодичні функції

Повертаючись до леми, яку ми доводили в попередньому параграфі, відзначимо, що з тотожності $H(x+a) \equiv H(x)$ випливає періодичність функції $H(x)$ з періодом a . Звідси також можна було би прийти до висновку, що многочлен $H(x)$ може бути лише нульового степеня, тобто $H(x) \equiv c$.

Розглянемо також інші функціональні співвідношення, які при всіх допустимих значеннях x задовольняють лише періодичні функції. Значну частину таких співвідношень легко отримати з допомогою циклічних функцій.

Нехай $\varphi(t)$ – довільна циклічна функція порядку n . Тоді композиція n таких функцій $\varphi_n(t) \equiv t$. Розглянемо рівняння

$$f(x+T) = \varphi(f(x)), \quad T \neq 0.$$

Послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} f(x+2T) &= \varphi(f(x+T)) = \varphi(\varphi(f(x))) = \varphi_2(f(x)), \\ f(x+3T) &= \varphi_3(f(x)), \dots, f(x+nT) = \varphi_n(f(x)) = f(x). \end{aligned}$$

Отже, кожен розв'язок такого рівняння є періодичною функцією з періодом nT .

Приклад 47. Доведіть, що всі розв'язки функціонального рівняння $f(x+\pi) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ є періодичними функціями з періодом 2π та дослідіть чи кожна періодична функція з таким періодом задовольняє це рівняння.

Розв'язання. Знайдемо

$$f(x+2\pi) = \frac{f(x+\pi)+1}{f(x+\pi)-1} = \frac{\frac{f(x)+1}{f(x)-1}+1}{\frac{f(x)+1}{f(x)-1}-1} = f(x).$$

Тому функція $f(x)$ періодична з періодом 2π .

Нехай тепер $f(x) = \sin x$, період якої також дорівнює 2π . Підставивши її в задане функціональне рівняння, з врахуванням формул зведення отримаємо рівність $-\sin x = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$, яка не є тотожністю. Тому не кожна періодична функція з періодом 2π задовольняє це рівняння.

Для наступного узагальнення зауважимо, що для функції $f(x) = \sin x$ з періодом $2\pi = 8 \cdot \frac{\pi}{4}$ справджується рівність

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

Приклад 48. Доведіть, що кожна функція, яка задовольняє умову $f(x + \alpha) + f(x - \alpha) = \sqrt{2} f(x)$, $\alpha \neq 0$, є періодичною функцією з періодом $T = 8\alpha$.

Розв'язання. Замінивши x на $x + \alpha$ та на $x - \alpha$, отримаємо $f(x + 2\alpha) + f(x) = \sqrt{2} f(x + \alpha)$ та $f(x) + f(x - 2\alpha) = \sqrt{2} f(x - \alpha)$ відповідно. Додавши ці рівності, з врахуванням заданої умови будемо мати

$$2f(x) + f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) = \sqrt{2}(f(x + \alpha) + f(x - \alpha)) = 2f(x),$$

звідки випливає, що $f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) = 0$.

Замінивши в останній рівності x на $x + 2\alpha$, отримаємо, що $f(x + 4\alpha) + f(x) = 0$, тобто $f(x + 4\alpha) = -f(x)$. Тому

$$f(x + 8\alpha) = -f(x + 4\alpha) = f(x),$$

що й треба було довести.

Відзначимо також, що періодичність функції, яка задовольняє певне функціональне співвідношення, можна використати й для обчислення значень цієї функції в окремих точках її області визначення.

Приклад 49. Обчисліть $f(2017)$, якщо $f(1) = 2017$ і для всіх $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність $f(x) = f(x-1)f(x+1)$.

Розв'язання. Оскільки $f(1) \neq 0$, то з умови випливає, що також $f(0) \neq 0$ та $f(2) \neq 0$. Підставляючи послідовно замість x натуральні числа n , отримаємо, що $f(n) \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Враховуючи сказане, для натуральних чисел $x = n$ запишемо задану рівність у вигляді $f(x+1) = \frac{f(x)}{f(x-1)}$. Тоді

$$f(x+2) = \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x-1)f(x+1)} = \frac{1}{f(x-1)}.$$

Отже,

$$f(x+5) = f((x+3)+2) = \frac{1}{f((x+3)-1)} = \frac{1}{f(x+2)} = f(x-1).$$

Тому $f(2017) = f(2011) = \dots = f(7) = f(1) = 2017$.

Зауважимо, що можна було міркувати ще й так.

Замінімо x на $x+1$ і помножимо отриману при цьому рівність $f(x+1) = f(x)f(x+2)$ на задану в умові. Якщо $f(x) \neq 0$ та $f(x+1) \neq 0$, то отримаємо $f(x-1)f(x+2) = 1$, звідки випливає, що $f(x+2) = \frac{1}{f(x-1)}$ та $f(x+5) = \frac{1}{f(x+2)} = f(x-1)$.

§5.5. Функціональні рівняння з обмеженнями на область визначення та множину значень функції

Розв'язуючи функціональне рівняння Коші, ми встановили, що на множині раціональних чисел його розв'язками є лише лінійні функції, та зауважували на множині всіх дійсних чисел існують також розривні адитивні нелінійні функції.

Для цього ж рівняння за умови обмеженості адитивної функції на деякому відрізку ми також довели, що така функція може бути

тільки лінійною. Відповідно, без такої умови можуть існувати й нелінійні адитивні функції.

Таким чином, розв'язок функціонального рівняння суттєво залежить не лише від самого рівняння, а й від тих обмежень, які накладені на область визначення чи множину значень шуканої функції. При цьому при розширенні таких множин загальна кількість розв'язків може як і збільшуватися, так і зменшуватися.

Зокрема, повертаючись до прикладу 13, відзначимо, що неперервними розв'язками функціонального рівняння

$$f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$$

на множині невід'ємних дійсних чисел були функції $f(x) = x + a\sqrt{x}$, $a \in \mathbb{R}$. Але на множині всіх дійсних чисел таке рівняння матиме єдиний розв'язок $f(x) = x$.

Розглянемо інші приклади рівнянь такого роду.

Приклад 50. Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f(x + f(x)) = f(x)$$

у класі функцій $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x) = 0$, $x \in [0;1]$, є розв'язком. Припустимо, що існує $x_0 \in [0;1]$ таке, що $f(x_0) = a \neq 0$.

Підставивши $x = x_0$, отримаємо $f(x_0 + a) = f(x_0)$, тобто функція f визначена й для $x = x_0 + a$.

Далі, для $x = x_0 + a$, отримаємо, що $f(x_0 + 2a) = f(x_0 + a)$, тобто функція f визначена й для $x = x_0 + 2a$.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що функція f повинна бути визначена для $x = x_0 + na$ при кожному натуральному n .

Але, яким би не було число $a \neq 0$, знайдеться такий номер $n = n_0$, за якого $x = x_0 + n_0 a \notin [0;1]$, що суперечить умові задачі.

Отже $f(x) = 0$ – єдиний розв'язок.

Відзначимо, що при розв'язуванні цього рівняння ми суттєво використали умову обмеженості області визначення функції. Наступний приклад демонструє, як можна використати для обґрунтування властивостей функції, заданої функціональним співвідношенням, обмеженість множини її значень.

Приклад 51. Доведіть, що кожна обмежена функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє умову

$$f(x) + f(x+5) = f(x+2) + f(x+3)$$

є періодичною.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - f(x+2)$. Для неї рівняння з умови набуває вигляду $g(x) = g(x+3)$. Це означає, що ця функція періодична з періодом 3, отже, й з періодом 6.

Нехай $h(x) = g(x) + g(x+2) + g(x+4)$. Функція h також періодична з періодом 6, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$ та всіх натуральних чисел n справджуються рівності

$$h(x) = h(x+6) = h(x+12) = \dots = h(x+6n).$$

Доведемо, що $h(x) \equiv 0$. Для цього зауважимо, що

$$\begin{aligned} h(x) &= (f(x) - f(x+2)) + (f(x+2) - f(x+4)) + \\ &+ (f(x+4) - f(x+6)) = f(x) - f(x+6). \end{aligned}$$

Припустимо, що існує точка x_0 така, що $h(x_0) = y_0 \neq 0$. Тоді

$$f(x_0) - f(x_0 + 6n) = h(x_0) + h(x_0 + 6) + \dots + h(x_0 + 6(n-1)) = ny_0$$

для всіх натуральних значень n , що суперечить умові обмеженості функції f . Звідси випливає, що $f(x) - f(x+6) \equiv 0$, тобто функція f є періодичною з періодом 6.

Зазначимо, що умову $f(x) + f(x+5) = f(x+2) + f(x+3)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють також необмежені при $a \neq 0$ лінійні функції $f(x) = ax + b$, які не є періодичними. Існують також розривні неперіодичні розв'язки цього рівняння.

§5.6. Функціональні рівняння на дискретних множинах

Розглянемо тепер задачі про відшукування функцій, які визначені і набувають своїх значень на множинах натуральних цілих чи раціональних чисел.

Приклад 52. Функція f визначена і набуває значень на множині невід'ємних цілих чисел. Знайдіть усі можливі значення $f(2017)$, якщо для всіх n з цієї множини справджується рівність

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3.$$

Розв'язання. При $n = 0$ отримуємо $f(f(0)) + f(0) = 3$. Оскільки функція f набуває лише невід'ємних цілих значень, то звідси випливає, що $f(0)$ може набувати значень тільки з множини $\{0; 1; 2; 3\}$. Розглянемо кожен таку можливість окремо.

Нехай $f(0) = 0$. Тоді з попередньої рівності приходимо до суперечності: $f(0) = 3$.

Нехай $f(0) = 1$. Тоді отримуємо $f(1) + 1 = 3$, тобто $f(1) = 2$. Методом математичної індукції доведемо, що при цьому $f(n) = n + 1$ для всіх невід'ємних цілих чисел n . Справді, для $n = 0$ така рівність правильна. Припустимо, що вона правильна для деякого цілого невід'ємного числа $n = k$. Тоді, підставивши $n = k$ в початкове рівняння, отримаємо $f(k + 1) + k + 1 = 2k + 3$, звідки маємо $f(k + 1) = k + 2$. Таким чином, внаслідок принципу математичної індукції, наше твердження доведене. Отже, в такому разі $f(2017) = 2018$.

Нехай $f(0) = 2$. Тоді $f(2) + 2 = 3$, $f(2) = 1$. Підставивши $n = 2$ в початкове рівняння, знайдемо $f(1) = 6$. Підставляючи тепер $n = 2$, приходимо до суперечності з умовою: $f(6) + 6 = 5$, тобто $f(6) = -1$.

I, нарешті, розглянемо останню можливість $f(0)=3$. Тоді $f(3)+3=3$, отже, $f(3)=0$. Тому, підставляючи в початкове рівняння $n=3$, отримаємо, що також $f(0)=9$. Таким чином, ми довели, що єдиним значенням $f(2017)$ є число 2018.

Звертаємо увагу читачів, що при розв'язуванні цього прикладу ми скористалися тим, що у множині невід'ємних цілих чисел є найменший елемент, тобто скористалися так званим *принципом крайнього*. Такий підхід є ефективним і при розв'язуванні інших задач, в яких фігурують обмежені зверху чи знизу множини.

Узагальнюючи, відзначимо, що в тому ж класі функцій рівняння $f(f(n))+f(n)=2n+3k, k \in \mathbb{N}$, має єдиний розв'язок $f(n)=n+k$, а рівняння $f(f(n))+f(n)=2n+3k+1, k \in \mathbb{N}$, та $f(f(n))+f(n)=2n+3k-1, k \in \mathbb{N}$, розв'язків не мають.

Приклад 53. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такі, що $f(f(m)+f(n))=m+n$ для всіх $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що f – ін'єктивна функція. Справді, якщо $f(m)=f(n)$, то $f(m)+f(n)=f(n)+f(n)$.

Отже, внаслідок заданої в умові рівності, отримуємо

$$m+n=f(f(m)+f(n))=f(f(n)+f(n))=n+n,$$

тобто $m=n$.

Нехай $f(1)=a \in \mathbb{N}$. Якщо $a=1$, то, припускаючи, що $f(k)=k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, при $m=k, n=1$ з умови задачі отримуємо $f(k+1)=f(f(k)+f(1))=k+1$. Звідси, внаслідок принципу математичної індукції, $f(n)=n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що інших розв'язків рівняння не має. Дійсно, якщо $f(1)=2$, то, покладаючи $m=n=1$, отримаємо, що також

$$f(4)=f(2+2)=f(f(1)+f(1))=1+1=2.$$

А це суперечить ін'єктивності функції f .

Нехай тепер $f(1) = a \geq 3$. З рівності

$$f(f(m+k) + f(n-k)) = (m+k) + (n-k) = m+n = f(f(m) + f(n))$$

та ін'єктивності функції f для всіх натуральних чисел m, n та $k, k < n$, отримуємо $f(m+k) + f(n-k) = f(m) + f(n)$.

Підставивши тут $m=1, n=2a, k=a-2$, запишемо останню рівність у вигляді $f(a-1) + f(a+2) = f(1) + f(2a)$. Оскільки

$$f(1) = a, f(2a) = f(a+a) = f(f(1) + f(1)) = 1+1 = 2,$$

$$f(a+2) = f(f(1) + f(2a)) = 1+2a,$$

то звідси знаходимо $f(a-1) = 1-a < 0$, що суперечить умові.

Отже, єдиним розв'язком рівняння є функція $f(n) = n, n \in \mathbb{N}$.

Приклад 54. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f(x+y) = f(x)f(y)$ для всіх $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ та $f(1) = 2$.

Розв'язання. Підставивши $x=1, y=0$, знайдемо $f(0) = 1$.

Нехай тепер $x=t, y=1-t$. Тоді для всіх $t \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(t)f(1-t) = f(1) = 2$, звідки випливає, що $f(t) \neq 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Крім того, при $x=y=\frac{t}{2}$ отримуємо

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)f\left(\frac{t}{2}\right) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0.$$

Тому функція f набуває лише додатних значень.

Далі, підставивши $x=t, y=-t$, отримуємо $f(t)f(-t) = 1$,

тобто $f(-t) = \frac{1}{f(t)}.$

Методом математичної індукції для всіх $n \in \mathbb{N}$ доведемо рівність $f(nx) = f^n(x)$. Для $n=1$ вона очевидна. Припустимо,

правильність такої рівності для деякого натурального $n = k$. Тоді для $n = k$, внаслідок заданого рівняння, будемо мати

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx)f(x) = f^k(x)f(x) = f^{k+1}(x),$$

що, внаслідок принципу математичної індукції, й завершує доведення.

Покладаючи в доведеній рівності $x=1$, для всіх $n \in \mathbb{N}$ отримаємо $f(n) = f^n(1) = 2^n$. Тоді, покладаючи $x = \frac{m}{n}$, будемо

мати $2^m = f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right)$. Звідки, враховуючи додатність значень

функції f , отримуємо $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^{\frac{m}{n}}$ для всіх $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Оскільки також } f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = 2^{-\frac{m}{n}} \text{ та } f(0) = 1 = 2^0,$$

то $f(x) = 2^x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$.

§5.7. Функціональні рівняння та монотонність функцій

Як ми бачили в прикладі 53, при розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь буває важливо встановити *ін'єктивність* шуканої функції, тобто, що така функція при різних значеннях аргумента набуває різних значень.

Зрозуміло, що кожна строго монотонна функція є ін'єктивною. Навпаки, не кожна ін'єктивна функція є строго монотонною. Але такою буде кожна неперервна ін'єктивна функція.

Розглянемо застосування монотонності функцій до розв'язування функціональних рівнянь.

Приклад 55. Знайдіть усі неперервні розв'язки рівняння

$$f(f(f(x))) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Спочатку доведемо ін'єктивність функції f . Справді, якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то, двічі застосувавши до цієї рівності функцію f , внаслідок заданої умови отримаємо $x_1 = x_2$. Отже, шукана неперервна функція є строго монотонною.

Припустимо, що така функція монотонно спадає. Тоді функція $f(f(x))$ буде монотонно зростаючою, $f(f(f(x)))$ – монотонно спадною. Зокрема, монотонно спадною буде і функція, записана у лівій частині рівняння, і вона не зможе тотожно дорівнювати зростаючій функції $g(x) = x$.

Нехай тепер f – монотонно зростаюча функція. Припустимо, що існує таке значення x_0 , для якого $f(x_0) > x_0$. Тоді

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0, \quad f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

Остаточно отримуємо, що в точці x_0 значення лівої частини рівності більше за x_0 , що суперечить умові.

Аналогічно доводимо, що не існує такого x_0 , для якого $f(x_0) < x_0$. Тому $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що існують також розривні функції, які не є монотонними, але задовольняють це рівняння для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$.

Зазначимо також, що іноді монотонність шуканої функції, можна встановити і за відсутності умови її неперервності.

Приклад 56. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння $f(f(x) + y^2) = x + f^2(y)$.

Розв'язання. Позначимо $f(0) = a$ і підставимо $x = t$, $y = 0$. Тоді $f(f(t)) = t + a^2$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Зокрема, при $t = 0$ отримаємо $f(a) = a^2$. Навпаки, якщо підставити $x = 0$, $y = t$, то будемо мати $f(a + t^2) = f^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Звідси маємо, що $f(a+t^2)+a^2=f(a)+f^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Застосуємо функцію f до обох частин останньої рівності:

$$f(f(a+t^2)+a^2)=f(f(a)+f^2(t)).$$

Враховуючи умову задачі, отримаємо рівність

$$a+t^2+f^2(a)=a+f^2(f(t)), t \in \mathbb{R},$$

яку, з врахуванням отриманих вище результатів, можна записати у вигляді $t^2+a^4=(t+a^2)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Оскільки при цьому $2a^2t \equiv 0$, то $a=0$. Тому $f(t^2)=f^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, тобто функція f набуває невід'ємних значень при невід'ємних значеннях аргумента.

Якщо $f(x_0)=0$ для деякого $x_0>0$, то, покладаючи $x=x_0$, $y=t$, будемо мати $f(t^2)=x_0+f^2(t)$, що суперечить тотожності $f(t^2) \equiv f^2(t)$. Отже, $f(x)>0$ для всіх $x>0$.

Далі, зауваживши, що при $a=0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ справджується рівність $f(f(t))=t$, підставимо в задане рівняння $x=f(t)$, $y=s$ і запишемо його у вигляді $f(f(f(t))+s^2)=f(t)+f^2(s)$ або ж

$$f(t+s^2)=f(t)+f(s^2).$$

Звідси для всіх $t \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ отримуємо нерівність

$$f(t+s^2)-f(t)=f(s^2)>0,$$

з якої випливає, що функція f є строго монотонно зростаючою.

Отже, з тотожності $f(f(x)) \equiv x$, міркуючи аналогічно, як у попередньому прикладі, отримуємо єдиний розв'язок $f(x)=x$.

§5.8. Функціональні рівняння та теореми про властивості неперервних функцій

При розв'язуванні рівняння з прикладу 55, ми скористалися властивістю монотонності ін'єктивних неперервних функцій. Ще раз використаємо цю властивість у наступному прикладі.

Приклад 57. Доведіть, що рівняння $f(f(x)) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, не має неперервних розв'язків.

Розв'язання. З рівності $f(x_1) = f(x_2)$ отримуємо

$$x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2.$$

Отже, функція f є ін'єктивною та, внаслідок неперервності, строго монотонною. Тому $f(f(x))$ – монотонно зростаюча функція і вона не може дорівнювати e^{-x} .

Наведемо також застосування інших властивостей неперервних функцій.

Приклад 58. Доведіть, що не існує неперервних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0.$$

Розв'язання. Припустимо, що існує така точка $x_0 \in \mathbb{R}$, для якої $f(x_0) = 0$. Тоді, підставивши $x = x_0 - 1$, отримаємо суперечність $1 = 0$. Враховуючи неперервність функції f , звідси випливає, що вона може набувати лише значень одного знаку. Якщо при цьому $f(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то ліва частина рівняння також набуває лише додатних значень і не може дорівнювати 0.

Нехай тепер $f(x) < 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Записавши рівняння у вигляді $f(x+1)(f(x)+1) = -1$, отримаємо, що $f(x)+1 > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому функція f може набувати значень лише з інтервалу $(-1; 0)$. Але в такому разі $f(x+1)f(x) > 0$ та $f(x+1)+1 > 0$. Тому записана в умові рівність також не справджується.

Приклад 59. Знайдіть усі неперервні функції $f: [1; 2] \rightarrow [1; 2]$ такі, що $f(1) = 2$ та для $f(f(x))f(x) = 2$ всіх $x \in [1; 2]$.

Розв'язання. При $x = 1$ з умови отримуємо $f(2) = 1$. Внаслідок неперервності функції f звідси випливає, що вона набуває всі проміжні значення з відрізка $[1; 2]$. Тому для кожного $y \in [1; 2]$ знайдеться таке $x \in [1; 2]$, що $f(x) = y$. Для всіх таких $y \in [1; 2]$ з умови прикладу отримуємо рівність $f(y)y = 2$, тобто $f(y) = \frac{2}{y}$.

Перевірка показує, що $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in [1; 2]$, є розв'язком.

§5.9. Метод граничного переходу

Розв'язуючи рівняння з прикладу 54, ми обмежилися лише знаходженням значень шуканої функції для раціональних значень аргумента. Нехай тепер така функція є неперервною. Тоді для кожного ірраціонального числа x розглянемо послідовність раціональних чисел $x_n \rightarrow x$. Внаслідок неперервності функції f знаходимо $f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{x_n} = 2^x$, тобто в класі неперервних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння $f(x+y) = f(x)f(y)$ з умовою $f(1) = 2$ має єдиний розв'язок $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Такий спосіб розв'язування функціональних рівнянь в класі неперервних функцій називають *методом граничного переходу*. Він вже був застосований нами при розв'язуванні рівняння Коші. Розв'яжемо з його допомогою ще деякі функціональні рівняння.

Приклад 60. Знайдіть усі неперервні в точках $x = 0$, $x = 1$ та $x = -1$ функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f(x^3 + y) = f(x) + f(y^3)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Підставивши $x = y = 0$, знайдемо $f(0) = 0$. Якщо тепер лише $y = 0$, то отримаємо $f(x^3) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Покладаючи тут $x = \sqrt[3]{t}$, будемо мати $f(t) = f(\sqrt[3]{t})$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Звідси отримуємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(t) = f(\sqrt[3]{t}) = f(\sqrt[9]{t}) = \dots = f(\sqrt[3^n]{t}), n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3^n]{t} = 1$ для всіх $t > 0$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3^n]{t} = -1$ для всіх $t < 0$, то, враховуючи неперервність функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точках $x = \pm 1$, для всіх $t > 0$ отримаємо $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt[3^n]{t}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3^n]{t}) = f(1)$, а для всіх $t < 0$, будемо мати $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt[3^n]{t}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3^n]{t}) = f(-1)$.

Враховуючи також неперервність шуканої функції в точці $x = 0$, звідси отримуємо, що $f(x) \equiv f(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 61. Знайдіть усі неперервні функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax + b) = f(x), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Розглянемо кілька можливих випадків:

- 1). $a = 0$. Тоді зразу отримуємо розв'язок $f(x) = f(b) = \text{const}$.
- 2). $a = 1, b = 0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні функції.
- 3). $a = 1, b \neq 0$. Розв'язками рівняння є всі періодичні з періодом $T = |b|$ неперервні функції.

4). $a = -1, b = 0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні непарні функції.

5). $a = -1, b \neq 0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні функції, графіки яких симетричні відносно прямої $x = \frac{b}{2}$.

6). $0 < |a| < 1, b \in \mathbb{R}$. Будемо в заданому рівнянні послідовно замінювати $x \in \mathbb{R}$ на $ax + b$. У результаті отримаємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(x) = f(ax + b) = f(a^2x + (a+1)b) = \dots = f(a^n x + (a^{n-1} + \dots + a + 1)b),$$

де n – довільне натуральне число.

Враховуючи неперервність функції f , звідси знаходимо

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a^n x + (a^{n-1} + \dots + a + 1)b\right) = \\ &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n x + (a^{n-1} + \dots + a + 1)b\right)\right) = f\left(\frac{b}{1-a}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Перевірка показує, що функція $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, є розв'язком рівняння при кожному $c \in \mathbb{R}$.

7). $|a| > 1$, $b \in \mathbb{R}$. Позначимо $ax + b = t$. Звідси маємо $x = \frac{t-b}{a}$.

Отже, рівняння можна записати у вигляді $f(t) = f\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Будемо

в ньому послідовно замінювати $t \in \mathbb{R}$ на $\frac{t-b}{a}$.

У результаті отримаємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(t) = f\left(\frac{t-b}{a}\right) = f\left(\frac{t}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)b\right) = \dots = f\left(\frac{t}{a^n} - \left(\frac{1}{a^n} + \dots + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)b\right).$$

Звідси, враховуючи неперервність функції f , знаходимо

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{a^n} - \left(\frac{1}{a^n} + \dots + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)b\right) = \\ &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{a^n} - \left(\frac{1}{a^n} + \dots + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)b\right)\right) = f\left(\frac{ab}{1-a}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, як і в попередньому випадку, отримуємо розв'язок $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Відзначимо, що з переходом до змінної $y = kx + m$ аналогічно можуть бути знайдені всі неперервні розв'язки рівняння $f(ax + b) = f(kx + m)$, $k \neq 0$.

Приклад 62. Знайдіть усі неперервні функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ задовольняють рівняння $f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Розв'язання. Спочатку будемо вважати, що $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Далі,

послідовно замінюючи x на $\frac{x}{1-x}$, отримаємо:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{1-nx}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Перейшовши при $n \rightarrow \infty$ до границі в рівності $f(x) = f\left(\frac{x}{1-nx}\right)$,

знайдемо $f(x) = f(0)$ для всіх $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

А, враховуючи неперервність функції f , звідси отримуємо, що також $f(x) = f(0)$ й для всіх $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Перевірка показує, що функція $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняє задане рівняння при кожному $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Зауважимо, що для визначення значень функції f в точках $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ можна було міркувати інакше. Підставивши в задане

рівняння $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, отримаємо рівність $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n-1}\right)$.

Аналогічно при $x = \frac{1}{n-1}$, $n \geq 3$ будемо мати $f\left(\frac{1}{n-1}\right) = f\left(\frac{1}{n-2}\right)$.

Таким чином, приходимо до ланцюжка рівностей:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \dots = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

З іншого боку, для $x = \frac{1}{3}$ в отриманій вище рівності

$f(x) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$, послідовно замінюючи x на $\frac{x}{1-2x}$, будемо

мати ланцюжок рівностей:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right) = f\left(\frac{x}{1-4x}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{1-2nx}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що $f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2n}{3}}\right) = f(0)$. Тому

$f(x) = f(0)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, і в умові задачі достатньо було вимагати неперервності функції f лише в одній точці $x = 0$.

Відзначимо також, що іноді для здійснення граничного переходу замість неперервності достатньо вимагати тільки обмеженість функції в околі однієї з точок її області визначення.

Приклад 63. Знайдіть усі обмежені в деякому околі точки $x = 0$ функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняють умову

$$2f(2x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = 2(2x + 1).$$

Розв'язання. Позначимо $2x = t$ і запишемо рівняння у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{4}\right) + t + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Зрозуміло, що також

$$f\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{16}\right) + \frac{t}{4} + 1, \quad f\left(\frac{t}{16}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{64}\right) + \frac{t}{16} + 1, \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тому для кожного натурального n справджується рівність

$$f(t) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{t}{4^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8^{n-1}}\right)t + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Перейшовши в ній до границі при $n \rightarrow \infty$, з врахуванням обмеженості функції f у деякому околі точки $x = 0$ отримаємо

$$f(t) = \frac{8}{7}t + 2. \quad \text{Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що}$$

функція $f(x) = \frac{8}{7}x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$, є розв'язком.