

Числення висловлювань

2.1 Поняття формальної системи. Системи аксіом. Правила виводу

Більшість математичних теорій будуються аксіоматичним методом і називаються аксіоматичними. В математичній теорії твердження, що доводяться, називаються *теоремами*. Вони виводяться з деяких фіксованих тверджень, що приймаються без доведень і називаються *аксіомами* цієї математичної теорії.

Розрізняють змістовні та формальні аксіоматичні теорії. Доведення теорем в них теж називають змістовними та формальними відповідно. Більшість математичних теорій є змістовними (наприклад, евклідова геометрія, векторний простір, алгебраїчні структури). В змістовних аксіоматичних теоріях можна користуватись звичайними міркуваннями і всіма логічними законами, тобто правила логічного виводу не фіксуються.

Аксіоматична теорія логіки висловлювань називається численням висловлювань, вона є прикладом формальної теорії. Всі аксіоми та теореми є тавтологіями. Крім аксіом вказують ще правила виводу і правило підстановки. Процес доведення в численні висловлювань зводиться до певних механічних дій над формулами по точно визначеним правилам.

Найбільш важливими для математики є тотожно істинні формули або тавтології. Знаходження тавтологій є основною задачею логіки висловлювань, а отже, і числення висловлювань, оскільки тавтології виражають закони логічного мислення.

Правило підстановки. Нехай формула Φ є тавтологією, A - одна з її пропозиціональних змінних і B - будь-яка формула. Тоді формула, яка отримана з Φ заміною в ній всіх входжень A на B , теж є тавтологією. Результат підстановки B замість A у формулі Φ зручно позначати символом $\Pi_A^B(\Phi)$.

Правило підстановки дозволяє одну і ту саму аксіому записати безліччю способами, тому аксіоми зручніше називати *схемами аксіом*. Існує кілька аксіоматичних теорій логіки висловлювань. Розглянемо аксіоматичну теорію, що будується на аксіомах (в численні висловлювань замість символу $\Rightarrow$ використовують як правило символ $\rightarrow$)

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

$$A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$A_3: (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B).$$

Правило виводу - **modus ponens (МП)**:
$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$

2.2. Поняття виводу. Виведення із гіпотез. Теорема дедукції

Означення 2.1 *Виводом* (або *формальним доведенням*) називається скінченна послідовність формул, кожен елемент якої є або аксіома, або отриманий з попередніх формул за правилом МП. Формула називається вивідною, якщо вона зустрічається в деякому виводі. Позначення $\vdash A$ використовують, щоб сказати, що формула A є вивідною.

Зауваження. Послідовність з однієї формули $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ є виводом, оскільки ця формула отримана з аксіоми A_1 . А, наприклад, послідовність з двох формул $A \rightarrow B, A \rightarrow (A \rightarrow A)$ не є виводом, оскільки перша з формул не задовольняє означенню.

Оформлення виводу формули часто записують у вигляді послідовності кроків, записаних один під одним, доповнених короткими поясненнями.

Теорема 2.1 Формула $A \rightarrow A$ є вивідною (або $\vdash A \rightarrow A$).

Доведення. 1) $\Pi_B^{A \rightarrow A}(A_1): A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A),$

2) $\Pi_{B,C}^{A \rightarrow A, A}(A_2): (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)),$

3) МП для 1) і 2): $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)),$

4) $\Pi_B^A(A_1): A \rightarrow (A \rightarrow A),$

5) МП для 3) і 4): $A \rightarrow A$.

Наслідок. Формула $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ є вивідною.

Поняття виводу з гіпотез є розширенням поняття виводу і співпадає з ним, якщо множина гіпотез є порожньою.

Означення 2.2 Нехай Γ – деяка скінченна множина формул (гіпотез) числення висловлювань, яка може бути і порожньою. *Виводом* формули B з гіпотез Γ називається послідовність формул, в якій кожна формула або аксіома, або належить Γ , або отримується за правилом МП з попередніх формул. Позначають $\Gamma \vdash B$.

Властивості виводу із гіпотез.

- 1) якщо $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma, A \vdash B$,
- 2) якщо $\Gamma, A, C \vdash B$, то $\Gamma, C, A \vdash B$,
- 3) якщо $\Gamma, A \vdash B$ і $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$,
- 4) якщо $\Gamma \vdash A_i$ для кожного $i = 1, \dots, n$ і $A_1, \dots, A_n \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$,
- 5) якщо $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, то $\Gamma, A \vdash B$.

Теорема 2.2 Формула $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow B)$ є вивідною.

Доведення Будемо доводити, що B виводиться з $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ і A .

- 1) A – гіпотеза,
- 2) аксіома А1: $A \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A)$,
- 3) МП для 1) і 2): $\bar{B} \rightarrow A$,
- 4) $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ - гіпотеза,
- 5) аксіома А3: $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B)$,
- 6) МП для 4) і 5): $(\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B$,
- 7) МП для 3) і 6): B .

Зауваження. Ця формула називається законом контрапозиції. Цей логічний закон є обґрунтуванням методу доведення від супротивного, який широко використовується при побудові змістовних аксіоматичних теорій.

Теорема 2.3 Формула $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$ є вивідною.

Доведення. 1) $\Pi_{A,B}^{\bar{A},\bar{B}}(A_1): \bar{A} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A}),$

2) формула з теореми 2.2, позначимо її $B_1,$

3) $\Pi_{A,B}^{B_1,\bar{A}}(A_1): B_1 \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B_1),$

4) МП для 3) і 2): $\bar{A} \rightarrow B_1,$

5) $\Pi_{A,B,C}^{\bar{A},\bar{B} \rightarrow \bar{A}, A \rightarrow B}(A_2): (\bar{A} \rightarrow B_1) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B))),$

6) МП для 5) і 4): $(\bar{A} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)),$

7) МП для 6) і 1): $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B).$

Теорема 2.4 Якщо $\Gamma = \{A\}$, то $A \vdash (B \rightarrow A)$ для будь-якої формули B .

Доведення. 1) $A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A),$

2) A – гіпотеза,

3) МП для 1) і 2): $B \rightarrow A$

Теорема 2.5 (дедукції) $A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$ тоді і лише тоді, коли $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B \rightarrow C$.

Зауваження. Теорему дедукції іноді формулюють у більш лаконічному вигляді: « $\Gamma, B \vdash C$ тоді і лише тоді, коли $\Gamma \vdash B \rightarrow C$ », вважаючи, що формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ з попереднього формулювання утворюють систему гіпотез.

Терема 2.6 Якщо з $\bar{F}$ виводиться A і з $\bar{F}$ виводиться $\bar{A}$, то F - вивідна формула.

Доведення. 1) $\vdash \bar{F} \rightarrow \bar{A}$ за теоремою дедукції,

2) аксіома А3: $(\bar{F} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{F} \rightarrow A) \rightarrow F),$

3) МП для 1) і 2): $(\bar{F} \rightarrow A) \rightarrow F,$

4) $\vdash \bar{F} \rightarrow A$ за теоремою дедукції,

5) МП для 3) і 4): F .

Теорема 2.7 (правило силогізму) Якщо $\Gamma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow C$.

Доведення. За теоремою дедукції достатньо довести $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash C$.

- 1) A – гіпотеза,
- 2) $A \rightarrow B$ - гіпотеза,
- 3) МП для 1) і 2): B ,
- 4) $B \rightarrow C$ - гіпотеза,
- 5) МП для 3) і 4): C .

Теорема 2.8 $\vdash \overline{\overline{A}} \rightarrow A$

Доведення Будемо доводити $\overline{\overline{A}} \vdash A$

- 1) $\Pi_{A,B}^{\overline{A},A}(A_3): (\overline{A} \rightarrow \overline{\overline{A}}) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow A)$,
- 2) $\overline{\overline{A}}$ - гіпотеза,
- 3) $\overline{\overline{A}} \vdash (\overline{A} \rightarrow \overline{\overline{A}})$ - доведено вище, отже $\overline{A} \rightarrow \overline{\overline{A}}$ - вивідна формула,
- 4) МП для 1) і 3): $(\overline{A} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow A$,
- 5) $\overline{A} \rightarrow \overline{A}$ - вивідна,
- 6) МП для 4) і 5): A – вивідна з $\overline{\overline{A}}$.

Теорема 2.9 $\vdash A \rightarrow \overline{\overline{A}}$.

Доведення.

- 1) $\Pi_B^{\overline{\overline{A}}}(A_3): (\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((\overline{\overline{A}} \rightarrow A) \rightarrow \overline{\overline{A}})$,
- 2) $\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{A}$ - доведено в попередній теоремі,
- 3) МП для 1) і 2): $(\overline{\overline{A}} \rightarrow A) \rightarrow \overline{\overline{A}}$,
- 4) $\Pi_B^{\overline{A}}(A_1): A \rightarrow (\overline{\overline{A}} \rightarrow A)$
- 5) Теорема 2.7 для 3) і 4): $\overline{\overline{A}}$ – вивідна з A .

Означення 2.3 Імплікацію $\overline{A} \rightarrow B$ будемо називати диз'юнкцією формул A та B і позначати $A \vee B$. Заперечення $\overline{\overline{A} \rightarrow \overline{B}}$ назвемо кон'юнкцією

$A \wedge B$ формул A та B . Формулу $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ назвемо еквіваленцією $A \leftrightarrow B$ формул A та B .

Зауваження. Коректність наведеного означення впливає з того, що раніше була доведена рівносильність наведених пар формул, тобто, що

$$\overline{A} \rightarrow B = A \vee B;$$

$$\overline{A \rightarrow \overline{B}} = A \wedge B;$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = A \leftrightarrow B.$$

Теорема 2.10 Формула $A \vee \overline{A}$ є вивідною.

Доведення. За попереднім означенням формула $A \vee \overline{A}$ є формулою $\overline{A} \rightarrow \overline{A}$. Ця формула є вивідною, бо раніше було доведено, що формула $A \rightarrow A$ є вивідною.

2.3 Числення висловлювань і булеві функції. Несуперечність і повнота числення висловлювань

Розглянута формальна аксіоматична теорія – числення висловлювань – відповідає змістовній теорії, яку ми вище називали логікою висловлювань. В зв'язку з цим виникає питання повноти та несуперечності цієї аксіоматичної теорії. Кожну формулу числення висловлювань можна розглядати як формулу логіки висловлювань.

Під повнотою числення висловлювань розуміють можливість виводу в ній будь-якої тавтології з логіки висловлювань. З іншого боку, аксіоми числення висловлювань є тавтологіями логіки висловлювань і будь-яка вивідна формула в численні висловлювань є тавтологією логіки висловлювань.

Розглянемо інший спосіб обґрунтування повноти числення висловлювань. Формули числення висловлювань реалізують булеві функції. Тавтології реалізують булеві функції, рівні константі 1. Згідно з теоремою

Поста система булевих функцій (заперечення, імплікація) є повною, звідки випливає, що для будь-якої булевої функції знайдеться формула числення висловлювань, що реалізує цю булеву функцію.

Лема. Аксиоми A_1 , A_2 , A_3 є тавтологіями.

Довести можна, побудувавши таблиці істинності булевих функцій, що реалізують ці аксиоми. З леми випливає

Теорема 2.11 В численні висловлювань вивідними є лише тавтології.

Дійсно, кожна формула у виводі є або аксіомою (тобто тавтологією), або отримана по правилу МП з тавтологій, отже теж є тавтологією.

Означення 2.4 Формальна теорія називається *суперечливою*, якщо в ній одночасно є виводи формул A і $\bar{A}$.

Теорема 2.12 Числення висловлювань не суперечливе.

Доведення. Припустимо, що числення висловлювань суперечливе, тобто у ньому існує одночасно два виводи A і $\bar{A}$. Тоді за теоремою про повноту A і $\bar{A}$ – тавтології. Отримуємо протиріччя з означенням тавтології. Теорема доведена.

Питання для самоконтролю

1. До якого типу формул відносяться аксиоми числення висловлювань?
2. Який вигляд має правило **modus ponens** ?
3. В чому сутність правила підстановки?
4. Як в численні висловлювань визначаються диз'юнкція, кон'юнкція, еквіваленція (через імплікацію)?
5. Назвіть властивості виводу із гіпотез.
6. Який вигляд має закон контрапозиції?
7. Наведіть приклад застосування правила силізму.
8. Яка теорія називається *суперечливою*?

Приклади розв'язування задач до теми 2

Задача 1. Для заданого виводу з гіпотез сформулювати пояснення кожного кроку:

- 1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
- 2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
- 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$,
- 4) $A \rightarrow B$,
- 5) $A \rightarrow C$.

Розв'язання. 1) – гіпотеза, 2) - аксіома A_2 , 3) - МП для 1) і 2), 4) – гіпотеза, 5) - МП для 3) і 4).

Задача 2. Послідовність $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, A , $B \rightarrow A$ є виводом формули $B \rightarrow A$ з гіпотез: а) $\{A\}$, б) $\{A, A \rightarrow B\}$, в) $\{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, г) $\{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C, B \rightarrow A\}$. Показати, що кожна відповідь правильна і вказати, які властивості виводу з гіпотез використано і як можна скоротити вивід.

Задача 3. Довести, що формула $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow B)$ вивідна в численні висловлювань (правило контрапозиції).

Розв'язання. Будемо доводити, що $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

- 1) $(\bar{B} \rightarrow \bar{A})$ - гіпотеза,
- 2) $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B)$ - аксіома A_3 ,
- 3) МП для 1) і 2): $(\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B$,
- 4) $\Pi_{\bar{B}}^{\bar{B}}(A_1): A \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A)$,
- 5) правило силогізму для 4) і 3): $A \rightarrow B$.

Висновок випливає з теореми дедукції.

Задача 4. Довести, що формула $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Так само за теоремою дедукції можемо взяти $A \rightarrow B$ за гіпотезу.

- 1) $A \rightarrow B$ - гіпотеза,
- 2) $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$ - доведено в лекціях,
- 3) правило силогізму для 2) і 1): $\overline{\overline{A}} \rightarrow B$.
- 4) $B \rightarrow \overline{\overline{B}}$ - доведено в лекціях,
- 5) правило силогізму для 3) і 4): $\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{\overline{B}}$,
- 6) $(\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{\overline{B}}) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ - з попередньої задачі підстановкою $\overline{A}$ замість B і $\overline{B}$ замість A ,
- 7) МП для 5) і 6): $(\overline{B} \rightarrow \overline{A})$.

Задача 5. Довести, що формула $A \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B})$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Доведемо спочатку $\{A \rightarrow B, A\} \vdash B$.

- 1) A - гіпотеза,
- 2) $A \rightarrow B$ - гіпотеза,
- 3) МП для 1) і 2): B .

Тепер застосуємо двічі теорему дедукції, отримаємо $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$. За попередньою теоремою вивідною є формула $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B})$. За правилом силогізму для двох останніх формул отримаємо $\vdash A \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B})$, що і треба було довести.

Задача 6. Довести, що формула $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow B)$ вивідна в численні висловлювань.

Розв'язання. Будемо доводити, що $\{A \rightarrow B, \overline{A} \rightarrow B\} \vdash B$.

- 1) $A \rightarrow B$ - гіпотеза,
- 2) $\overline{A} \rightarrow B$ - гіпотеза,
- 3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ - доведено в попередній задачі,

- 4) МП для 1) і 3): $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$,
- 5) правило силогізму для 4) і 2): $\bar{B} \rightarrow B$,
- 6) $\Pi_A^B(A_3): (\bar{B} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow B) \rightarrow B)$,
- 7) $\bar{B} \rightarrow \bar{B}$ - було доведено в лекціях,
- 8) МП для 7) і 6): $(\bar{B} \rightarrow B) \rightarrow B$,
- 9) МП для 5) і 8): B .

Якщо двічі застосувати теорему дедукції, то отримаємо висновок, що формула $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B)$ є вивідною.