

ТЕМА 1. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗЛП)

План

1. Задача лінійного програмування та форми її представлення
2. Принципи побудови математичних моделей економічних задач
3. Геометрична інтерпретація ЗЛП
4. Вирішення ЗЛП за допомогою інструменту «Пошук рішень» MS Excel

1.1. Задача лінійного програмування та форми її представлення

Велика множина реальних економічних задач можуть бути математично представлені у формі задач лінійного програмування (ЗЛП), для яких існують універсальні методи їхнього вирішення. Розглянемо постановку ЗЛП та форми її представлення.

Задача лінійного програмування – це математична модель економічної системи, яка дозволяє знайти оптимальне значення лінійної цільової функції (максимум, або мінімум) за певних обмежень, які також є лінійними.

Основними складовими задачі лінійного програмування є:

1. **Цільова функція** – це лінійна функція, значення якої необхідно оптимізувати (максимізувати або мінімізувати);
2. **Змінні** – невідомі величини, значення яких необхідно визначити для досягнення оптимального значення цільової функції;
3. **Обмеження** – лінійні нерівності, або рівняння, які обмежують можливі значення змінних й формують область допустимих значень цільової функції. Якщо за економічним змістом задачі, змінні не можуть приймати від’ємних значень, тоді до вказаної множини обмежень додаються умови невід’ємності змінних.

Розрізняють загальну, канонічну та стандартну форми представлення задачі лінійного програмування. Розглянемо їх більш детально.

Загальна форма ЗЛП:

$F(Z) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$ – цільова функція;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{cases} \quad \text{– лінійні обмеження;}$$

$x_j \geq 0$ для $j = 1 \dots k$ при $k < n$ – умови невід’ємності змінних.

Загальна форма задачі лінійного програмування допускає як максимізацію, так й мінімізацію цільової функції. При цьому, лінійні обмеження можуть мати знаки: « $\leq$ », « $\geq$ », або « $=$ ».

Стандартна форма ЗЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ для } j = 1 \dots k \text{ при } k < n$$

Стандартна форма ЗЛП виходить з необхідності максимізації цільової функції. При цьому, лінійні обмеження можуть мати знаки: « $\leq$ », або « $=$ ».

Канонічна форма ЗЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ для } j = 1 \dots k \text{ при } k < n$$

Канонічна форма ЗЛП виходить з необхідності максимізації цільової функції. При цьому, лінійні обмеження повинні мати знак « $=$ ».

Універсальним методом вирішення задач лінійного програмування є симплекс-метод, який виходить із необхідності її перетворення до стандартної форми. Якщо цільова функція вхідної задачі повинна мінімізуватись, то приведення її до стандартної форми відбувається шляхом множення на (-1) . Наприклад, якщо:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \text{ то}$$

$$F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \rightarrow \max.$$

Аналогічно, якщо лінійні обмеження мають знак « $\geq$ », то приведення їх до стандартної форми відбувається шляхом множення й лівої й правої частини цих обмежень на (-1) . Наприклад, якщо:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \quad \text{то}$$

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1.$$

Таким чином, будь-яку ЗЛП ми завжди маємо змогу привести до стандартної форми.

Окрім симплекс-методу, задачі лінійного програмування також можна вирішувати графічним методом та за допомогою інструменту «Пошук рішень» електронних таблиць Microsoft Excel. Розглянемо їх пізніше.

1.2. Принципи побудови математичних моделей економічних задач

Принципи побудови математичних моделей економічних задач у вигляді ЗЛП розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1.1. Підприємство виготовляє фарбу «А» для зовнішніх робіт та фарбу «В» для внутрішніх робіт. Під час виробництва використовуються два види ресурсів. Норми витрат цих ресурсів на виробництво однієї тони відповідної фарби та їхні добові запаси наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Норми витрат ресурсів на виробництво 1 тони фарб «А» та «В»

Витрати ресурсів на виробництво однієї тони фарби	Фарба А	Фарба В	Добові запаси ресурсів, тон
Ресурс 1	1	2	6
Ресурс 2	2	1	8

Дослідження ринку показало, що добовий попит на фарбу «В» ніколи не перевищує добового попиту на фарбу «А» більше, ніж на 1 тону. Крім того, попит на фарбу «В» ніколи не перевищує 2 тони на добу.

Ціни реалізації готової продукції:

- фарба «А» – 3000 у.о. за 1 тону;
- фарба «В» – 2000 у.о. за 1 тону.

Побудувати економіко-математичну модель нашої задачі для визначення оптимальних добових обсягів виробництва продукції «А» та «В», якщо сумарний дохід повинний максимізуватись.

Для відповіді на поставлене запитання, перш за все необхідно побудувати математичну модель нашої економічної задачі у вигляді ЗЛП. Для цього введемо умовні позначення. Нехай:

- x_1 – обсяг виробництва фарби «А», тон;
- x_2 – обсяг виробництва фарби В, тон.

Тоді, з урахуванням цін на готову продукцію, сумарний добовий дохід складе $F = 3000x_1 + 2000x_2$. За умовою задачі, цей дохід повинний максимізуватись. Тобто, цільова функція набуває вигляду:

$$F = 3000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max.$$

Окрім цільової функції, наша задача містить ряд обмежень. Загальні витрати першого ресурсу складуть $(x_1 + 2x_2)$. При цьому, його витрати не повинні перевищувати добових запасів, 6 тон. Тоді, перше обмеження набуває вигляду:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6.$$

Аналогічно, загальні витрати другого ресурсу складуть $(2x_1 + x_2)$ й не повинні перевищувати 8 тон на добу. Тобто, друге обмеження буде мати вигляд:

$$2x_1 + x_2 \leq 8.$$

Той факт, що попит на фарбу «В» ніколи не перевищує 2 тон на добу, запишеться як:

$$x_2 \leq 2.$$

Також слід врахувати, що добовий попит на фарбу «В» ніколи не перевищує добового попиту на фарбу «А» більше, ніж на 1 тону. Тобто:

$$x_2 - x_1 \leq 1, \text{ звідки } -x_1 + x_2 \leq 1.$$

Оскільки обсяг виробництва не може бути від'ємним, необхідно додати відповідні обмеження:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Узагальнюючи вищесказане, економіко-математична модель нашої задачі у вигляді ЗЛП, буде мати вигляд:

$$F = 3000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ x_2 & \leq 2 \\ -x_1 + x_2 & \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Вирішення даної задачі лінійного програмування буде розглядатись нижче.

Приклад 1.2. Нехай, підприємство виробляє три види продукції: А, В та С. Ціна одиниці продукції А складає 560 у.о., продукції В – 280 у.о., продукції С – 430 у.о. Під час виробництва кожного виду продукції, підприємство витрачає ресурси, норми витрат яких наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Норми витрат ресурсів на виробництво продукції

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Запаси ресурсів, од.
Ресурс 1	120	46	98	52000
Ресурс 2	85	110	0	35000
Ресурс 3	155	0	75	36000
Ресурс 4	12	26	18	18000
Ресурс 5	38	66	150	49000

Необхідно знайти такий оптимальний план виробництва продукції А, В та С, який дозволить підприємству отримати максимальний дохід від її реалізації.

Для відповіді на поставлене запитання, так само, необхідно побудувати математичну модель нашої економічної задачі у вигляді ЗЛП. Для цього введемо умовні позначення. Нехай:

x_1 – обсяг виробництва продукції А, од.;

x_2 – обсяг виробництва продукції В, од.;

x_3 – обсяг виробництва продукції С, од.

Тоді, зважаючи на ціни реалізації готової продукції, сумарний дохід підприємства від її виробництва складе: $F = 560x_1 + 280x_2 + 430x_3$. За умовою задачі, цей дохід повинний максимізуватись. Тобто, цільова функція набуває вигляду:

$$F = 560x_1 + 280x_2 + 430x_3 \rightarrow \max.$$

Далі переходимо до розгляду обмежень ЗЛП. Згідно табл. 1.1, під час виробництва продукції А, В та С, підприємство використовує п'ять різних видів ресурсів.

Загальні витрати першого ресурсу складуть $(120x_1 + 46x_2 + 98x_3)$. При цьому, його витрати не повинні перевищувати запасів на складі, 52000 од. Тоді, перше обмеження набуває вигляду:

$$120x_1 + 46x_2 + 98x_3 \leq 52000.$$

Другий ресурс використовується лише при виробництві продукції А та В. Тоді, загальні його витрати складуть $(85x_1 + 110x_2)$ й не повинні перевищувати 35000 од. наявних запасів на складі. Тобто, друге обмеження буде мати вигляд:

$$85x_1 + 110x_2 \leq 36000.$$

Аналогічним чином складаються обмеження за всіма ресурсами, табл. 1.1. Тоді, економіко-математичне представлення нашої задачі у вигляді ЗЛП, набуває вигляду:

$$F = 560x_1 + 280x_2 + 430x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 120x_1 + 46x_2 + 98x_3 & \leq 52000 \\ 85x_1 + 110x_2 & \leq 35000 \\ 155x_1 + 75x_3 & \leq 36000 \\ 12x_1 + 26x_2 + 18x_3 & \leq 18000 \\ 38x_1 + 66x_2 + 150x_3 & \leq 49000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0; \quad x_1, x_2, x_3 - \text{цілі числа.}$$

Останнє обмеження цілочисельності невідомих змінних було додано до нашої задачі, зважаючи на її економічний зміст, а саме: обсяги виробництва продукції А, В та С повинні бути цілими.

1.3. Геометрична інтерпретація ЗЛП

Одним із методів вирішення задач лінійного програмування є геометричний метод. Однак, його суттєвим обмеженням є наявність лише двох невідомих змінних, x_1 та x_2 . Тому, візьмемо за основу економіко-математичну модель, яку було побудовано у прикладі 1.1:

$$F = 3000x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ x_2 & \leq 2 \\ -x_1 + x_2 & \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розглянемо знаходження оптимального плану виробництва геометричним методом. Для цього, на горизонтальній осі позначимо x_1 – обсяг виробництва фарби «А»; по вертикальній осі x_2 – обсяг виробництва фарби «В».

В просторі цих координат необхідно позначити всі наші обмеження, які формують область допустимих рішень. Також, необхідно позначити напрямок градієнту (вектор, який вказує напрям максимального зростання цільової функції).

Кожне обмеження представлено на рис. 1.1 відповідною граничною прямою. Тоді, область допустимих рішень, яка задовольняє одразу всім обмеженням одночасно, виділена сірим кольором.

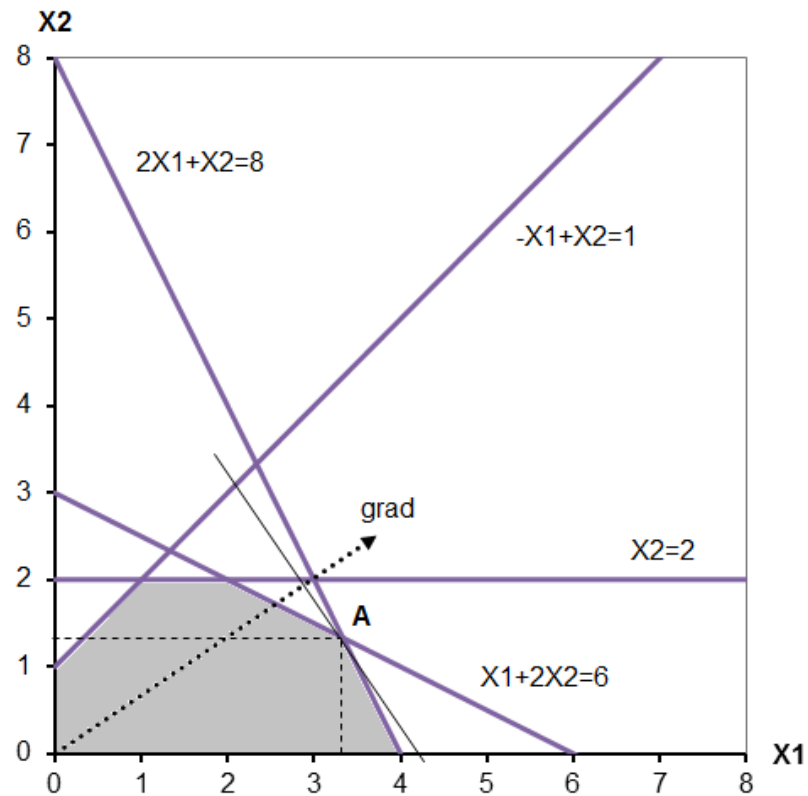


Рис. 1.1. Вирішення ЗЛП графічним методом

Напрямок градієнта визначається значеннями коефіцієнтів цільової функції при x_1 та x_2 .

Для того, щоб визначити оптимальне рішення з множини допустимих, рухаємо перпендикуляр до градієнта в позначеному ним напрямку до тих пір, поки цей перпендикуляр не досягне крайньої точки області допустимих рішень. На рис. 1.1 вона позначена крапкою А, координати якої приблизно дорівнюють:

$$x_1 = 3,3; x_2 = 1,3.$$

Відповідно:

$$F = 3000x_1 + 2000x_2 = 3000 \times 3,3 + 2000 \times 1,3 = 12500.$$

Таким чином, максимально можливий добовий дохід буде складати 12500 у.о. При цьому, виробництво фарби «А» повинно складати 3,3 тони, а виробництво фарби «В» – 2,2 тони на добу.

1.4. Вирішення ЗЛП за допомогою інструменту «Пошук рішень» MS Excel

Як зазначалось раніше, обмеженням геометричного методу вирішення ЗЛП є наявність лише двох невідомих змінних, x_1 та x_2 . В інших випадках слід застосовувати аналітичні розрахунки у вигляді симплекс-методу, або скористатись перевагами сучасних інформаційних технологій. Розглянемо

вирішення прикладу 1.2 за допомогою інструменту «Пошук рішень» Microsoft Excel. Економіко-математична постановка даної задачі мала вигляд:

$$F = 560x_1 + 280x_2 + 430x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 120x_1 + 46x_2 + 98x_3 & \leq 52000 \\ 85x_1 + 110x_2 & \leq 35000 \\ 155x_1 + 75x_3 & \leq 36000 \\ 12x_1 + 26x_2 + 18x_3 & \leq 18000 \\ 38x_1 + 66x_2 + 150x_3 & \leq 49000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0; \quad x_1, x_2, x_3 - \text{цілі числа.}$$

Підготуємо вхідні дані на робочому аркуші, згідно нашої задачі лінійного програмування, рис. 1.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукція А	Продукція В	Продукція С	Сукупний дохід		
2	Ціна за одиницю, грн.	560	280	430			
3	Обсяг реалізації, од.						
4							
5	Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Використано ресурсів, од.	Обмеження	Запаси ресурсів, од.
6	Ресурс 1	120	46	98		<=	52000
7	Ресурс 2	85	110	0		<=	35000
8	Ресурс 3	155	0	75		<=	36000
9	Ресурс 4	12	26	18		<=	18000
10	Ресурс 5	38	66	150		<=	49000
11							

Рис. 1.2. Вхідні дані для вирішення ЗЛП

В комірках В3:D3 будуть міститись значення невідомих змінних x_1 , x_2 та x_3 . В таблиці нижче, комірки А5:G10, будемо відслідковувати загальні витрати кожного з ресурсів й перевіряти їх відповідність наявним запасам на складі.

Окрім вхідних даних, на робочий аркуш слід додати деякі розрахункові дані:

1. В комірці Е3 будемо обчислювати сукупний дохід від реалізації всіх видів продукції (значення цільової функції). Для цього, в комірці Е3 вводимо формулу:

$$=SUMPRODUCT(B2:D2;B3:D3),$$

або

$$=СУММПРОИЗВ(B2:D2;B3:D3).$$

2. В комірках Е6:Е10 повинні міститись розраховані витрати ресурсів кожного виду. Для цього, в комірці Е6 вводимо формулу нижче й розтягуємо її за правий нижній кут до комірки Е10:

$$=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B6:D6),$$

або

=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B6:D6).

Після вказаних маніпуляцій, колонка Е повинна містити формули, як показано на рис. 1.3.

	A	B	C	D	E
1		Продукція А	Продукція В	Продукція С	Сукупний дохід
2	Ціна за одиницю, грн.	560	280	430	
3	Обсяг реалізації, од.				
4					=SUMPRODUCT(B2:D2;B3:D3)
5	Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Використано ресурсів, од.
6	Ресурс 1	120	46	98	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B6:D6)
7	Ресурс 2	85	110	0	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B7:D7)
8	Ресурс 3	155	0	75	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B8:D8)
9	Ресурс 4	12	26	18	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B9:D9)
10	Ресурс 5	38	66	150	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$D\$3;B10:D10)

Рис. 1.3. Формули робочого аркуша

Інструмент «Пошук рішень», або «Розв’язувач» міститься у вкладці «Дані». Якщо, після встановлення Excel, ним не користувались жодного разу, то дану надбудову необхідно підключити: вкладка «Файл», «Параметри», «Надбудови», зі списку «Керування» обираємо «Надбудови Excel» й натискаємо кнопку «Перейти». У відкритому вікні «Надбудови» слід виділити «Пошук розв’язання» й натиснути кнопку «ОК». Далі, у вкладці «Дані», секції «Аналіз» натискаємо кнопку «Розв’язувач». Після вказаних дій на екрані відобразиться вікно, рис. 1.4.

Рис. 1.4. Вікно «Параметри розв’язувача»

В полі «Оптимізувати цільову функцію» слід зробити посилання на комірку E3 й встановити напрямок оптимізації на «Максимум».

Поле «Змінюючи клітинки змінних» повинно містити посилання на діапазон значень невідомих змінних x_1 , x_2 та x_3 , комірки B3:D3.

Для додавання обмежень ЗЛП, справа від поля «Підлягає обмеженням», слід натиснути кнопку «Додати». Далі, по черзі додаємо всі обмеження нашої задачі:

E6:E10 <= G6:G10;

B3:D3 >= 0;

B3:D3 = ціле.

В якості методу розв'язання з випадального списку слід обрати «За симплекс-методом».

Після всіх налаштувань, вікно «Параметри розв'язувача» буде мати вигляд, рис. 1.5.

Параметри розв'язувача

Оптимізувати цільову функцію:

До: ☒ Максимум ☐ Мінімум ☐ Значення:

Змінюючи клітинки змінних:

Підлягає обмеженням:

☒ Зробити необмежені змінні не від'ємними

Виберіть метод розв'язання:

Метод розв'язання

Для розв'язання гладких нелінійних задач виберіть розв'язувач нелінійних задач за методом зведеного градієнта. Для розв'язання лінійних завдань виберіть розв'язувач за симплекс-методом, для негладких завдань виберіть розвиваний розв'язувач.

Додати
Змінити
Видалити
Скинути
Завантажити/зберегти

Довідка Розв'язати Закрити

Рис. 1.5. Налаштування вікна «Параметри розв'язувача»

На завершення, натискаємо кнопку «Розв'язати». Успішність вирішення даної задачі відображається у вікні «Результати розв'язувача»: «Цілочисельне розв'язання знайдено в межах припустимої похибки. Усі обмеження дотримані». Результати оптимального виробництва товарів А, В та С наведені на рис. 1.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукція А	Продукція В	Продукція С	Сукупний дохід		
2	Ціна за одиницю, грн.	560	280	430			
3	Обсяг реалізації, од.	136	213	198			
4							
5	Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Використано ресурсів, од.	Обмеження	Запаси ресурсів, од.
6	Ресурс 1	120	46	98	45522	<=	52000
7	Ресурс 2	85	110	0	34990	<=	35000
8	Ресурс 3	155	0	75	35930	<=	36000
9	Ресурс 4	12	26	18	10734	<=	18000
10	Ресурс 5	38	66	150	48926	<=	49000

Рис. 1.6. Оптимальний план виробництва

Як бачимо, максимальний сукупний дохід, який може бути отриманий в умовах наших обмежень, становить 220940 у.о. При цьому, виробництво продукції А повинно становити 136 од.; продукції В – 213 од.; продукції С – 198 од.

Всі обмеження щодо наявних й використаних ресурсів було виконано. Причому, другий, третій та п'ятий ресурси були дефіцитними, оскільки весь їхній запас в умовах цілочисельного обмеження, було використано. Відповідно, перший та четвертий ресурси дефіцитними не являються.