# ТЕМА 2. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА, ЯК ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

План

1. Опис проблемної ситуації
2. Модель транспортної задачі закритого типу. Перетворення відкритої транспортної задачі до закритої
3. Особливості практичного застосування транспортної задачі

## 2.1. Опис проблемної ситуації

Як ми бачили з попередньої теми, важливу роль у здійсненні ефективного управління будь-яким підприємством в умовах ринкової економіки, а також у прийнятті рішень, відіграють економіко-математичні методи й моделі, зокрема, задачі лінійного програмування (ЗЛП). Для таких задач існує універсальний метод їхнього вирішення – симплексний метод.

Однак, достатньо велика кількість реальних економічних задач, представлених у формі ЗЛП, при вирішенні їх симплексним методом, вимагають наявності значних обчислювальних потужностей, що не виправдовує застосування даного методу вирішення. Часто такі задачі можуть бути описані й вирішені більш раціонально в рамках спеціальних теорій, які розробляють ефективні алгоритми їх розв’язання.

Найбільш поширеною моделлю в сфері управління транспортним підприємством є модель транспортної задачі.

Функціонування й розвиток як галузей економіки, так і окремих підприємств пов'язані з рухом матеріальних потоків: доставкою сировини, напівфабрикатів й готової продукції. Будь-яке транспортне підприємство в ході господарської діяльності стикається з рядом властивих їм специфічних особливостей:

1. Наявність великої кількості постачальників продукції, які територіально можуть розташовуватись в різних регіонах, мати певні виробничі потужності й запаси невідвантаженої продукції;
2. Наявність великої кількості споживачів продукції, які також територіально розташовуються в різних регіонах. Причому, й за кількістю й за місцем розташування, споживачі продукції жодним чином не пов'язані з постачальниками. В ході своєї господарської діяльності споживачі формують заявки на поставку продукції в одиницю часу.

Отже, постачальники продукції формують для транспортного підприємства пропозицію, а споживачі – попит. В оптимальній ситуації пропозиція буде дорівнює попиту, але це буває не завжди. Найчастіше, або попит, або пропозиція будуть перевищувати один одного.

Для транспортної компанії це означає наступне:

– якщо попит перевищує пропозицію, то обсяг планових перевезень повинний ґрунтуватись на меншій величині, тобто пропозиції. В такій ситуації частина попиту з боку споживачів залишиться незадоволеною;

– якщо пропозиція перевищує попит, то обсяг планових перевезень буде виходити з існуючого попиту. У цьому випадку частина продукції підприємств-постачальників буде незатребуваною.

3. Крім попиту й пропозиції, під час господарської діяльності транспортне підприємство змушене враховувати обмеження власних виробничих потужностей, таких як: наявний автопарк, трудові ресурси (водії, обслуговуючий персонал) й т.п.;

4. Кінцевою метою діяльності транспортного підприємства є отримання максимального прибутку. Факторами зростання прибутку є: збільшення доходів, або зниження собівартості транспортування вантажів.

Класична модель транспортної задачі зводиться до розробки оптимального плану транспортування вантажів від виробників до споживачів, з точки зору транспортних витрат. При цьому, модель враховує як виробничі потужності підприємств-постачальників, так й потреби в продукції підприємств-споживачів. Універсальним методом вирішення цієї задачі є:

– метод північно-західного кута, для отримання первісного (не оптимального) плану перевезення вантажів;

– ітераційний метод потенціалів, для поетапного вдосконалення первісного плану та отримання економічно ефективного плану перевезень.

Інформаційні технології дозволяють або відтворити ці методи вирішення транспортної задачі, або звести процес пошуку оптимального плану перевезень до задачі імітаційного моделювання, коли в процесі вдосконалення первісного плану, використовуються градієнтні методи. Прикладом такої реалізації є інструмент «Пошук рішень», який інтегрований до електронних таблиць Microsoft Excel й дозволяє знайти оптимальне вирішення транспортної задачі із заданою точністю.

## 2.2. Модель транспортної задачі закритого типу. Перетворення відкритої транспортної задачі в закриту

Далі розглянемо економіко-математичну постановку транспортної задачі. Припустимо, у нас є $m$ пунктів відправлення (підприємства, склади) якогось однорідного вантажу: $A_1$, $A_2$, ... $A_m$. Запаси вантажів на складах задаються вектором-стовпцем $A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

де $a_i$ – обсяг вантажу, що очікує відвантаження в пункті $A_i$, в натуральних одиницях виміру, $a_i \geq 0$.

Цей вантаж необхідно перевезти в $n$ пунктів призначення $B_1$, $B_2$, ... $B_n$. Потреби кожного пункту призначення у вантажі визначаються вектором-рядком $B$:

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n], \tag{2.2}$$

де $b_j$ – потреба у вантажі в $j$-ому пункті призначення, $b_j \geq 0$.

Природно припустити, що сумарні запаси вантажу у всіх пунктах відправлення повинні дорівнювати їх сумарній потребі в пунктах призначення, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M, \tag{2.3}$$

Якщо тотожність (2.3) виконується, то така задача називається **транспортною задачею закритого типу**.

Якщо вказана тотожність не виконується, то така задача має назву **транспортної задачі відкритого типу**. На практиці це означає, що сукупні наявні запаси вантажу перевищують, або є меншими за потребу в них.

Процес вирішення транспортної задачі відкритого типу, спочатку передбачає її приведення до задачі закритого типу, з подальшим знаходженням оптимального плану перевезень.

Вартість транспортування одиниці вантажу з пункту $A_i$ до пункту $B_j$ дорівнює $c_{ij} \geq 0$ й задається прямокутною матрицею $C$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & .. \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

Якщо транспортне підприємство не має фізичної можливості доставити вантаж з пункту відправлення $A_i$ до пункту призначення $B_j$ (транспортні шляхи відсутні) то $c_{ij}$ приймає свідомо завищене значення для того, щоб виключити дане перевезення з оптимального плану.

Розглянуті вище матриці $A$, $B$ й $C$ є вхідними даними нашої транспортної задачі.

Тоді, позначивши обсяги перевезень вантажу з пункту відправлення $A_i$ до пункту призначення $B_j$, як $x_{ij} \geq 0$, отримаємо матрицю рішень $X$.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & .. \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

На відміну від попередніх матриць, значення елементів матриці $X$ спочатку є невідомими. Але їх необхідно знайти в процесі вирішення транспортної задачі.

Критерієм оптимальності рішення $X$ прийнято вважати мінімально можливу вартість перевезень, яка забезпечить задоволення потреб у вантажі всіх пунктів призначень, в межах його наявних обсягів в пунктах відправлень. Загальну вартість перевезень можна розрахувати шляхом сумування витрат на транспортування з кожного пункту відправлення до кожного пункту призначення:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min \quad (\text{ЦФ}), \qquad (2.6)$$

Отриманий вираз (2.6) називається цільовою функцією (ЦФ), яка повинна мінімізуватись.

Оптимальний план перевезень вантажу $X$ для транспортної задачі закритого типу, повинний відповідати наступним обмеженням:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ для всіх } i = 1,2 \ldots m \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ для всіх } j = 1,2 \ldots n \qquad (2.8)$$

Обмеження (2.7) говорить про те, що весь наявний вантаж повинний бути вивезений з кожного пункту відправлення $A_i$. У свою чергу, обмеження (2.8) вимагає, щоб потреба у вантажі в кожному пункті доставки $B_j$, була задоволена в необхідному обсязі.

Таким чином, узагальнюючи все вищесказане, економіко-математична постановка транспортної задачі набуває свого кінцевого вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min \quad (\text{ЦФ}) \qquad (2.9)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ для всіх } i = 1,2 \ldots m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ для всіх } j = 1,2 \ldots n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M, \\ x_{ij} \geq 0, \text{ для всіх } i = 1,2 \ldots m, j = 1,2 \ldots n \end{cases}$$

Як зазначалось вище, під час вирішення практичних завдань, тотожність (2.3) може виконуватись не завжди. Тобто, ми будемо мати транспортну задачу відкритого типу, для якої все одно необхідно знайти оптимальне рішення, яке мінімізує сукупні витрати на транспортування вантажу. В такій ситуації, перш за все, транспортну задачу відкритого типу необхідно перетворити до транспортної задачі закритого типу. Тут можливі два випадки:

1. Якщо загальний попит на вантаж перевищує його пропозицію, тобто: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

В такій ситуації, необхідно ввести ще один, фіктивний пункт відправлення вантажу $A_{m+1}$, щоб його запаси зрівнялись із загальним попитом:

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$

Відповідно, до матриці витрат *C* додається додатковий *(m+1)* рядок, в якому вартість всіх транспортувань повинна дорівнювати нулю.

2. Якщо сумарні запаси вантажу перевищують попит на нього, тобто:

$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$

В такій ситуації, необхідно ввести ще один, фіктивний пункт призначення вантажу $B_{n+1}$, щоб його попит задовольнив сукупні запаси:

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$

Відповідно, до матриці витрат *C* слід додати додатковий стовпець *(n+1)*, в якому вартість всіх транспортувань також повинна дорівнювати нулю.

Виконавши зазначену послідовність дій, ми перейдемо від задачі відкритого типу, до задачі закритого типу, для якої зможемо знайти оптимальний план перевезень.

Розглянувши економіко-математичну постановку транспортної задачі, доцільно звернути увагу на особливості її практичного застосування, а потім – на інформаційні технології, за допомогою яких можна автоматизувати процес знаходження оптимального плану перевезень.

## 1.3. Особливості практичного застосування транспортної задачі

При масовому транспортуванні вантажів від пунктів відправлення до пунктів призначення виникає необхідність не тільки вирішити проблему доставки вантажів з мінімальними витратами, а й вибрати маршрути транспортування таким чином, щоб забезпечити повернення автотранспорту з мінімально можливими витратами. Практична реалізація цієї умови вирішується в три етапи:

1. На першому етапі ми повинні вирішити звичайну транспортну задачу закритого типу, закріпивши за споживачами конкретних постачальників. Цей етап реалізується без урахування повернення транспортних засобів. Постановка цього завдання (1.9) наведена вище.

2. На другому етапі вирішується проблема повернення транспортних засобів назад виробникам продукції з мінімальними витратами. Для цього, знаючи місткість транспортних засобів Т, знаходять їх необхідну кількість, спираючись на матрицю рішень Х за формулою:

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{T}, \text{ для всіх } i = 1,2...m,\ j = 1,2...n \qquad (1.10)$$

де $n_{ij} = \frac{x_{ij}}{T}$ - кількість транспортних засобів (автомобілів), які прибули до j-го споживача від i-го виробника.

Загальна кількість автомобілів, які прибули до j-го споживача, дорівнюватиме:

$$n_j = \sum_{i=1}^{m} n_{ij}, \text{ для всіх } j = 1,2...n \qquad (1.11)$$

Відповідно, загальна кількість автомобілів, відвантажених продукцією від i-го постачальника, буде знайдена з виразу:

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}, \text{ для всіх } i = 1,2..m \qquad (1.12)$$

Позначимо матрицю повернення транспортного засобу, яку потрібно знайти, як Y. Елементи цієї матриці $y_{ij}$ показують кількість транспортних засобів, повернутих від j-го споживача до i-го виробника. Тоді загальна вартість повернення авто становитиме:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} y_{ij} \rightarrow min, \qquad (1.13)$$

Елемент матриці $c'_{ij}$ відрізняється від $c_{ij}$ того, що при поверненні автомобіля не враховуються витрати на його завантаження і розвантаження. Крім того, витрата палива на ненавантаженому автомобілі буде значно менше, що скорочує його пробіг.

Система обмежень за цим завданням повинна включати:

– по-перше, що всі транспортні засоби, які доставили вантаж кожному споживачу, мають бути повернуті;

– по-друге, що загальна кількість автомобілів, відправлених з продукцією від i-го постачальника, також має бути повернута в такій же кількості.

З огляду на все вищесказане, завдання забезпечення повернення транспортних засобів, при мінімально можливих витратах, буде фіксуватися як:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} y_{ij} \rightarrow \min \qquad (1.14)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = n_i, \text{ для всіх } i = 1,2..m \\ \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = n_j, \text{ для всіх } j = 1,2..n \\ y_{ij} \geq 0; \ y_{ij} - \text{цілі числа, для всіх } i = 1,2..m, \ j = 1,2..n \end{cases}$$

В результаті вирішення цієї задачі нам потрібно буде знайти матрицю повернення транспортного засобу Y.

3. На третьому етапі визначаються маршрути руху транспортних засобів з урахуванням першого і другого етапів.

Таким чином, нами була вивчена актуальність вантажоперевезень і специфічні особливості господарської діяльності транспортних підприємств.

За результатами дослідження ми розглянули модель транспортної проблеми, яка дозволяє мінімізувати витрати на доставку продукції від виробників до споживачів. У реальному житті також актуальним завданням є вибір маршрутів транспортування таким чином, щоб забезпечити повернення транспортних засобів.

Далі необхідно розглянути інформаційні технології, які можуть бути використані для автоматизації цих процесів. Перш за все, це інструмент оптимізації Solution Finder від Microsoft Excel і мова програмування Visual Basic for Application (VBA), вбудована в додатки Microsoft Office (практична робота №2)