Тема 1. Методи мережевого планування бізнес-процесів

План

1. Етапи планування мережевої моделі та управління бізнес-процесами
2. Структурне планування: мережева модель
3. Календарне планування бізнес-процесів
4. Календарний графік реалізації бізнес-процесів. Задача розподілу ресурсів

1.1. Етапи планування мережевої моделі та управління бізнес-процесами

Успішне управління бізнес-процесами передбачає широке використання методів планування комплексу робіт, контролю за перебігом й термінами їх виконання та ліквідації виникаючих відхилень шляхом перерозподілу наявних ресурсів.

Бізнес-процес є сукупністю взаємопов'язаних операцій, які повинні виконуватись в певній послідовності для досягнення поставленої мети. Ці операції є хронологічно впорядкованими за датами їх завершення: деякі операції не можуть розпочинатись до завершення інших. Реалізація бізнес-процесів зазвичай потребує часу та ресурсів.

Мережеве планування та управління бізнес-процесами складається з трьох етапів:

1. Структурне планування;
2. Календарне планування;
3. Оперативне управління.

Структурне планування розпочинається з розкладання бізнес-процесу на чітко визначені операції. Далі відбувається оцінка тривалості виконання цих операцій й будується мережева модель (мережева діаграма), кожна дуга якої (стрілка), позначає роботу.

Таким чином, мережева модель представляє собою графічний взаємозв’язок між операціями бізнес-процесу. Побудова мережевої моделі на етапі структурного планування дозволяє детально проаналізувати всі операції й покращити структуру бізнес-процесу ще до його реалізації.

Структурне планування відіграє важливу роль у розробці графіка виконання бізнес-процесу. Його кінцевою метою є створення таблиці, в якій зазначається час початку й закінчення кожної операції, а також її зв'язок з іншими операціями бізнес процесу (**календарне планування**). Крім того, даний календарний план повинний надавати можливість визначати критично важливі за часом виконання операції, яким необхідно приділити особливу увагу, щоб завершити його в строк.

Для некритичних операцій в календарному плані повинна бути передбачена можливість виявлення часових резервів, які можуть бути використані з користю для затримки виконання таких операцій, з точки зору ефективного використання ресурсів.

Завершальним етапом мережевого планування є **оперативне управління** реалізацією виконання бізнес-процесу. Цей етап передбачає використання мережевої моделі та календарного планування для періодичного звітування про хід виконання проекту. За результатами його виконання, мережева модель може бути скоригована. У цьому випадку розробляється новий календарний план для решти проекту.

1.2. Структурне планування: мережева модель

Мережева модель показує взаємозв'язки між операціями бізнес-процесів й послідовністю, в якій вони виконуються. Графічне представлення мережевої моделі називається мережевим графом.

Операції в мережевому графі зображуються стрілками (орієнтованими дугами), напрямки яких показують послідовності реалізації цих операцій в часі.

Впорядковані взаємозв’язки між операціями визначаються за допомогою подій. Події – це моменти часу, коли певні операції завершуються й розпочинаються інші. Таким чином, початок й завершення будь-якої операції описуються парою подій, які називають початковою й кінцевою подіями.

Згідно з прийнятою термінологією, кожна операція є орієнтованою дугою графа, а кожна подія – його вершиною (вузлом). При цьому, довжина дуги не є пропорційною тривалості операції. Також, графічне зображення дуг не обов'язково має бути прямою лінією.

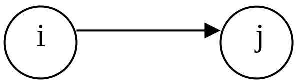

Рис. 1

На рис. 1 наведений приклад графічного представлення операції (i, j) з початковою подією i та кінцевою подією j.

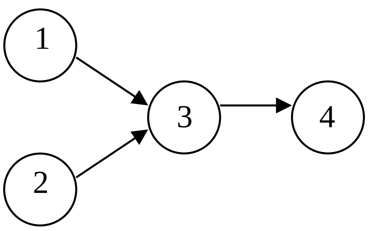

Рис. 2

На рис. 2 наведений приклад, який показує, що операції (1; 3) та (2; 3) повинні бути завершені до того, як розпочнеться операція (3; 4).

Вершини графу в мережевій моделі повинні нумеруватись. Причому, порядковий номер попередньої події завжди є меншим за номер наступної події.

Початкова подія – це подія, яка не має попередніх операцій.

Кінцева подія – це подія, яка не має наступних операцій й яка є кінцевою метою всього бізнес-процесу.

Правила побудови мережевих моделей:

1. Мережа будується від початкової події бізнес-процесу до кінцевої події. Напрямок орієнтованих дуг (стрілок) – зліва направо. Кожна операція представлена однією орієнтованою дугою.
2. В мережі не повинно бути замкнутих циклів, тобто послідовностей операцій, які повертаються до ранніх події.
3. В мережі жодна операція не повинна дублюватись, як показано на рис. 3:

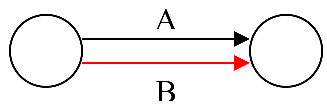

Рис. 3

На рис. 3 операції A та B мають однакові події початку й завершення. Тобто, подія B дублює A. Щоб уникнути їхнього дублювання, між початковою й кінцевою подіями вводиться фіктивна операція. Варіанти введення фіктивної операції D показані на рис. 4:

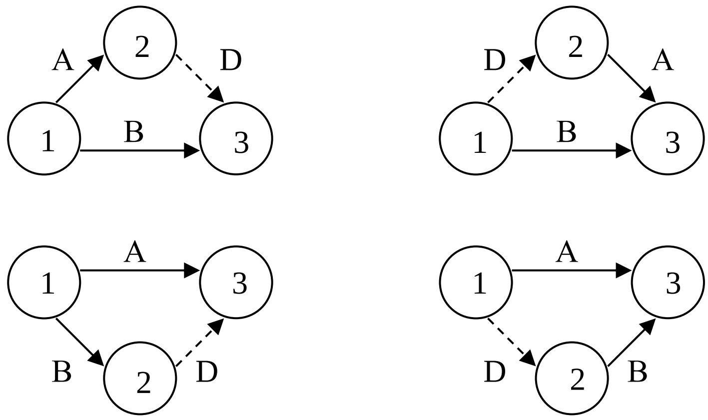

Рис. 4

В результаті внесених змін, операції A та B тепер однозначно визначаються парою подій, які відрізняються між собою. Фіктивна операція D не вимагає витрат часу й ресурсів.

<u>Приклад.</u> Під час реалізації бізнес-процесу, операції A та B повинні виконуватись до операції C, а операція E відбувається лише після операції B. Тоді, мережева модель буде мати вигляд:

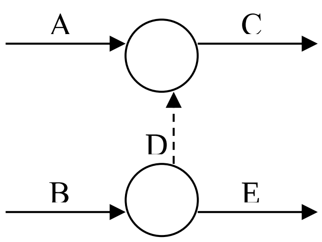

Рис. 5

Фіктивна операція D не потребує жодних ресурсів та часу. Вона лише показує, що C повинна виконуватись після B.

4. В мережі не повинно бути «обірваних» (хвостових) подій, до яких не входить жодна операція, за винятком початкової події, рис. 6:

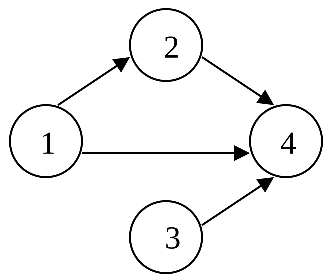

Рис. 6. «Обірвана» подія №3

5. В мережі не повинно бути тупикових подій, з яких не виходить жодна операція, за винятком кінцевої події, рис. 7:

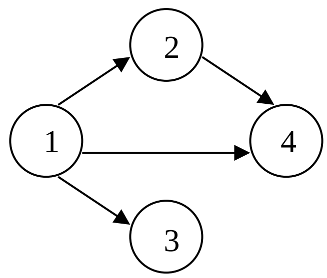

Рис. 7. Тупикова подія №3

1.3. Календарне планування бізнес-процесів

Побудова мережевої моделі в рамках структурного планування є першим кроком в отриманні календарного плану, який визначає дати початку й завершення кожної операції. Через наявність взаємозв'язків між різними операціями, необхідно проводити розрахунки часу їхнього початку й завершення. Вказані розрахунки можуть бути виконані безпосередньо в мережі.

В результаті таких розрахунків, визначаються критичні й некритичні операції бізнес-процесу. Некритична операція характеризується тим, що проміжок часу між її раннім початком й пізнім завершенням (в рамках даного бізнес-процесу), перевищує її фактичну тривалість. У цьому випадку говорять, що операція має запас часу (резерв).

Визначення критичного шляху. *Для визначення поняття критичного шляху в мережевій моделі, розглянемо поняття шляху й повного шляху.*

Шлях – це будь-яка послідовність операцій, яка призводить від однієї події до іншої, де кожна операція відбувається лише один раз.

Повний шлях – це будь-який мережевий шлях, початок якого співпадає з початковою подією бізнес-процесу, а кінець – з кінцевою подією даного бізнес-процесу.

Критичним шляхом називають найдовший з усіх повних шляхів, тривалість якого впливає на тривалість реалізації всього бізнес-процесу.

Критичний шлях визначає безперервну послідовність критичних операцій. Тобто, критичний шлях визначає всі критичні операції бізнес-процесу. Методика визначення такого шляху буде розглянута в наступному прикладі.

Приклад. Нехай, мережева модель має вигляд, як показано на рис. 8:

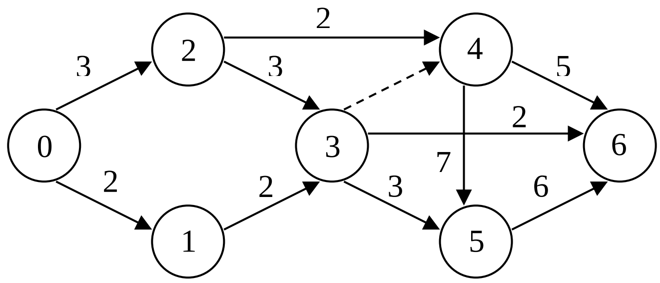

Рис. 8

Оцінки часу, необхідного для виконання кожної операції, наведені на рис. 8, поруч з відповідними орієнтованими дугами.

Тоді, розрахунок критичного шляху буде складатись з двох етапів:

1. Прямий прохід.

Розрахунок починається з початкової події та триває до тих пір, поки не буде досягнуто кінцеву подію мережевого графу. Для кожної події обчислюється число, яке представляє собою самий ранній час, коли вона може відбутись.

2. Зворотний прохід.

Розрахунок починається з кінцевої мережевої події та триває до тих пір, поки не буде досягнута початкова подія. Для кожної події обчислюється число, яке представляє собою найпізніший час її завершення.

Введемо наступні умовні позначення:

$РСН_i$ – ранній строк настання всіх операцій, що виходять з і-ої події (ранній строк настання і-ої події);

$ПСЗ_i$ – пізній строк завершення всіх операцій, що входять до і-ої події;

T_{ij} – тривалість операції $(i;\quad j)$.

Якщо $i = 0$, тобто ми виходимо з початкової події, то $РСН_0 = 0$.

Під час реалізації прямого проходу, розрахунок виконується за формулою: $РСН_j = max\left(РСН_i + T_{ij}\right)$ за всіма операціями $(i;\quad j)$. Тому, для розрахунку $РСН_j$ j-ої події, необхідно спочатку визначити $РСН_i$ всіх попередніх подій.

Для розглянутого прикладу, раннім строком настання кожної операції буде:

$PCH_0 = 0;$
$PCH_1 = max(PCH_0 + T_{01}) = max(0 + 2) = 2;$
$PCH_2 = max(PCH_0 + T_{02}) = max(0 + 3) = 3;$
$PCH_3 = max(PCH_1 + T_{13}; \quad PCH_2 + T_{23}) = max(2 + 2; \quad 3 + 3) = 6;$
$PCH_4 = max(PCH_2 + T_{24}; \quad PCH_3 + T_{34}) = max(3 + 2; \quad 6 + 0) = 6;$
$PCH_5 = max(PCH_3 + T_{35}; \quad PCH_4 + T_{45}) = max(6 + 3; \quad 6 + 7) = 13;$
$PCH_6 = max(PCH_3 + T_{36}; \quad PCH_4 + T_{46}; \quad PCH_5 + T_{56}) =$
$max(6 + 2; \quad 6 + 5; \quad 13 + 6) = 19.$

На цьому прямий прохід завершується.

Зворотний прохід починається з кінцевої мережевої події. Його метою є визначення пізніх строків завершення всіх операцій, що входять до і-ої події, $ПСЗ_i$.

Якщо взяти до уваги рівняння $i = n$, де n - номер кінцевої події в мережі, то рівність $ПСЗ_n = PCH_n$ - це відправна крапка зворотного проходу. У загальному випадку, пізній строк завершення будь-якої і-ої події обчислюється за формулою: $ПСЗ_i = min\left(ПСЗ_j - T_{ij}\right)$ за всіма операціями $(i; \quad j)$.

Для розглянутого прикладу, пізнім строком завершення кожної операції буде:

$ПСЗ_6 = PCH_6 = 19;$
$ПСЗ_5 = min(ПСЗ_6 - T_{56}) = min(19 - 6) = 13;$
$ПСЗ_4 = min(ПСЗ_5 - T_{45}; \quad ПСЗ_6 - T_{46}) = min(13 - 7; \quad 19 - 5) = 6;$
$ПСЗ_3 = min(ПСЗ_4 - T_{34}; \quad ПСЗ_5 - T_{35}; \quad ПСЗ_6 - T_{36}) =$
$min(6 - 0; \quad 13 - 3; \quad 19 - 2) = 6;$
$ПСЗ_2 = min(ПСЗ_3 - T_{23}; \quad ПСЗ_4 - T_{24}) = min(6 - 3; \quad 6 - 2) = 3;$
$ПСЗ_1 = min(ПСЗ_3 - T_{13}) = min(6 - 2) = 4;$
$ПСЗ_0 = min(ПСЗ_1 - T_{01}; \quad ПСЗ_2 - T_{02}) = min(4 - 2; \quad 3 - 3) = 0.$

На цьому етапі зворотний прохід також завершується. Для наочності, покажемо ранні строки настання та пізні строки завершення всіх операцій на мережевій моделі, рис. 9:

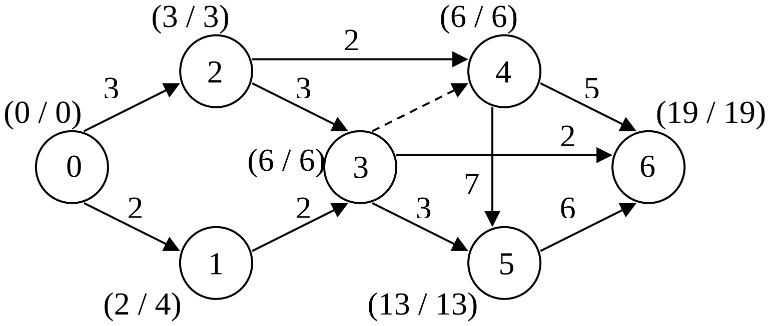

Рис. 9

У круглих дужках біля кожної вершини графу вказується: (*РСН* / *ПСЗ*).

За результатами прямого й зворотного проходів можна визначити операції, які належать до критичного шляху.

Операція $(i;\quad j)$ належить до критичного шляху, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. $РСН_i = ПСЗ_i$
2. $РСН_j = ПСЗ_j$
3. $РСН_j - РСН_i = ПСЗ_j - ПСЗ_i = T_{ij}$

Ці умови означають, що між ранніми строками настання та пізніми строками завершення критичних операцій, запасів часу не існує.

До критичних операцій не належать:

– операція (0; 1) – умова (2);

– операція (2; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 6) – умова (3).

Тоді, **критичний шлях** – це найкоротша можлива тривалість всього бізнес-процесу, від початкової події до кінцевої. Для розглянутого прикладу, критичним шляхом буде наступна послідовність операцій:

(0; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6).

Після визначення критичного шляху, необхідно оцінити запаси часу для некритичних операцій. Оскільки для критичних операцій запаси часу дорівнюють нулю.

Для цього введемо наступні умовні позначення, що пов'язані з кожною операцією:

$РСЗ_{ij}$ – ранній строк завершення операції $(i;\quad j)$;

$ПСН_{ij}$ – пізній строк настання операції $(i;\quad j)$.

Ці показники розраховуються за формулами:

$РСЗ_{ij} = РСН_i + T_{ij}$;

$ПСН_{ij} = ПСЗ_j - T_{ij}$.

При оцінці резервів часу для некритичних операцій, розрізняють:

– повний резерв (*ПР*);

– вільний резерв (*ВР*).

Повний резерв часу для некритичної операції $(i;\quad j)$ – це різниця між максимальним проміжком часу, за який може бути виконана дана операція $(ПСЗ_j - РСН_i)$ та її тривалістю (T_{ij}), тобто:

$ПР_{ij} = ПСЗ_j - РСН_i - T_{ij} = ПСЗ_j - РСЗ_{ij} = ПСН_{ij} - РСН_i$.

Вільний резерв часу для некритичної операції $(i;\ \ j)$ визначається виходячи з припущення, що всі операції в мережі починаються з ранніх строків. Тоді, вільний резерв – це перевищення допустимого проміжку часу $(PCH_j - PCH_i)$ тривалості операції (T_{ij}), тобто:

$BP_{ij} = PCH_j - PCH_i - T_{ij}$.

Зведемо результати розрахунків критичного шляху й резервів часу некритичних операцій в табл. 1:

Таблиця 1

Операція $(i;\ \ j)$	T_{ij}	PCH_i	$PC3_{ij}$	ΠCH_{ij}	$\Pi C3_j$	ΠP_{ij}	BP_{ij}
$(0;\ \ 1)$	2	0	2	2	4	2	0
$(0;\ \ 2)*$	3	0	3	0	3	0*	0
$(1;\ \ 3)$	2	2	4	4	6	2	2
$(2;\ \ 3)*$	3	3	6	3	6	0*	0
$(2;\ \ 4)$	2	3	5	4	6	1	1
$(3;\ \ 4)*$	0	6	6	6	6	0*	0
$(3;\ \ 5)$	3	6	9	10	13	4	4
$(3;\ \ 6)$	2	6	8	17	19	11	11
$(4;\ \ 5)*$	7	6	13	6	13	0*	0
$(4;\ \ 6)$	5	6	11	14	19	8	8
$(5;\ \ 6)*$	6	13	19	13	19	0*	0

Слід звернути увагу, що лише критичні операції повинні мати повний резерв часу, що дорівнює нулю.

Якщо повний резерв дорівнює нулю, то й вільний резерв теж буде дорівнювати нулю. Однак, зворотне твердження не є істинним: оскільки рівність $BP_{ij} = 0$ не означає, що дана операція є критичною, ΠP_{ij} може приймати значення, відмінні від нуля, наприклад операція $(0;\ \ 1)$.

1.4. Календарний графік реалізації бізнес-процесів. Задача розподілу ресурсів

Після зведення в табл. 1 результатів розрахунків критичного шляху й резервів часу, можна переходити до побудови календарного графіка (діаграми Ганта).

Для цього, по-перше, визначаються календарні строки виконання критичних операцій.

По-друге, розглядаються некритичні операції, для яких вказуються їхні ранні строки настання PCH_i й пізні строки завершення $\Pi C3_i$. Відрізки часу, в межах яких можуть виконуватись некритичні операції, позначаються на діаграмі пунктирними лініями.

Роль повного й вільного резервів часу у виборі календарних дат виконання некритичних операцій пояснюється двома наступними правилами:

1. Якщо повний резерв дорівнює вільному резерву, то календарні дати некритичних операцій можуть бути обрані в будь-якому інтервалі між раннім строком настання $РСН_i$ й пізнім строком завершення $ПСЗ_i$;
2. Якщо вільний резерв часу менше повного резерву, то дата початку некритичної операції може бути зміщена по відношенню до раннього строку настання $РСН_i$ не більше ніж на величину вільного резерву, не впливаючи на вибір календарних дат безпосередньо для наступних операцій.

Для розглянутого прикладу, діаграма Ганта має вигляд на рис. 10:

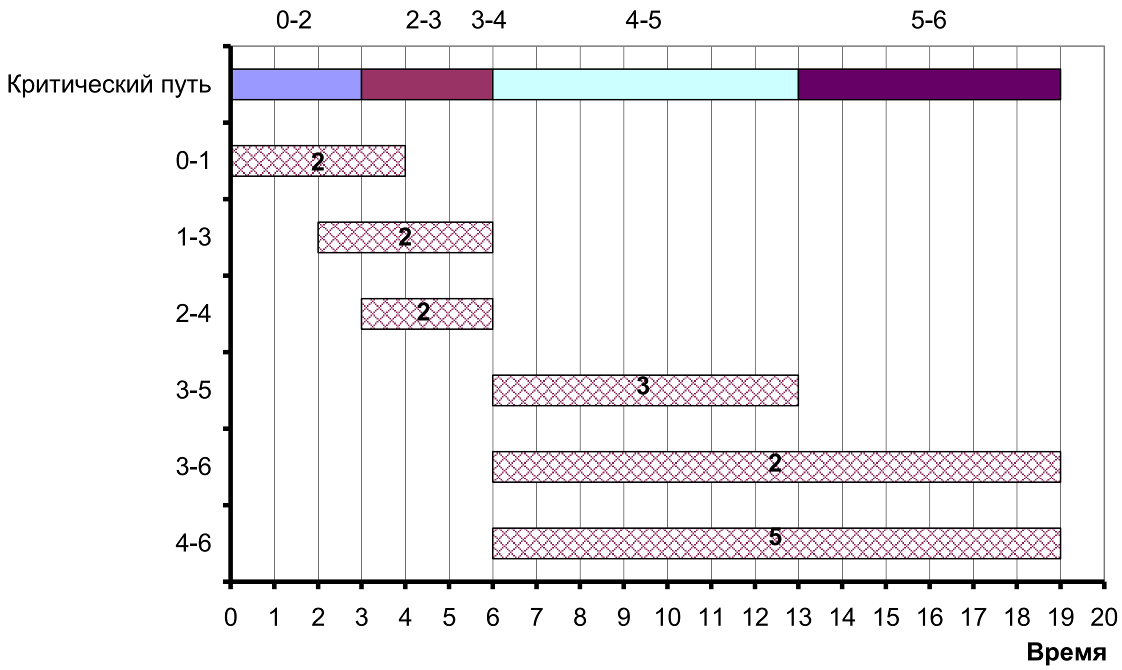

Рис. 10 Діаграма Ганта

В даному прикладі, друге правило було застосоване тільки до операції $(0;\quad 1)$, оскільки її вільний резерв дорівнює 0, а повний резерв – 2. Таким чином, якщо дата початку операції $(0;\quad 1)$ збігається з її раннім строком настання $t = 0$, то календарну дату наступної некритичної операції $(1;\quad 3)$, яка слідує за $(0;\quad 1)$, можна обрати між її раннім раннім строком настання $t = 2$ й пізнім строком завершення $t = 6$.

Якщо ж дата початку операції $(0;\quad 1)$ зсунута по відношенню до $t = 0$, то ранній строк настання операції $(1;\quad 3)$ повинен бути зміщений як мінімум на таку ж величину. Так, наприклад, якщо операція $(0;\quad 1)$ починається в момент $t = 1$, то вона завершиться в $t = 3$. Відповідно, календарну дату операції $(1;\quad 3)$ можна вибрати між $t = 3$ й $t = 6$.

Це обмеження не поширюється на інші некритичні операції, так як їхні повні й вільні резерви часу дорівнюють один одному. Таким чином, операції

$(3;\ 5)$, $(3;\ 6)$ й $(4;\ 6)$ можуть виконуватися в часових інтервалах, зазначених на діаграмі Ганта, рис. 10, незалежно один від одного.

Отже, якщо вільний резерв часу певної операції є меншим повного резерву часу, це є ознакою того, що остаточні календарні дати такої операції не можуть бути зафіксовані без попередньої перевірки, як це вплине на терміни виконання безпосередньо наступних операцій.

При побудові календарного графіку бізнес-процесу, також доводиться враховувати наявність ресурсів, оскільки одночасне (паралельне) виконання деяких операцій може виявитися неможливим через ресурсні обмеження. Саме в цьому випадку, повні резерви часу некритичних операцій є найбільш цінними. Зміщуючи некритичні операції в ту чи іншу сторону, в межах свого повного резерву, можна знизити максимальну потребу в ресурсах.

Для нашого прикладу припустимо, що для виконання різних операцій необхідні такі обсяги людських ресурсів, табл. 2.

Таблиця 2

Операція $(i;\ j)$	Потреби в робочій силі, чол.
$(0;\ 1)$	0
$(0;\ 2)$	5
$(1;\ 3)$	0
$(2;\ 3)$	7
$(2;\ 4)$	3
$(3;\ 4)$	–
$(3;\ 5)$	2
$(3;\ 6)$	1
$(4;\ 5)$	2
$(4;\ 6)$	5
$(5;\ 6)$	6

Завдання полягає в побудові такого календарного графіку реалізації бізнес-процесу, де потреба в трудових ресурсах буде найбільш рівномірною протягом усього періоду.

Слід зазначити, що згідно табл. 2, для виконання операцій $(0;\ 1)$ та $(1;\ 3)$ трудові ресурси не потрібні. Тому, календарні дати цих операцій можуть бути обрані незалежно від сумарних денних потреб в робочій силі.

Як видно з таблиці 2, операція $(2;\ 3)$ для свого виконання вимагає 7 осіб. Тому, одразу можна передбачити, що для реалізації всього бізнес-процесу знадобиться не менше 7 осіб.

Складемо ранній (ліворуч) й пізній (праворуч) календарні плани реалізації проекту, рис. 11.

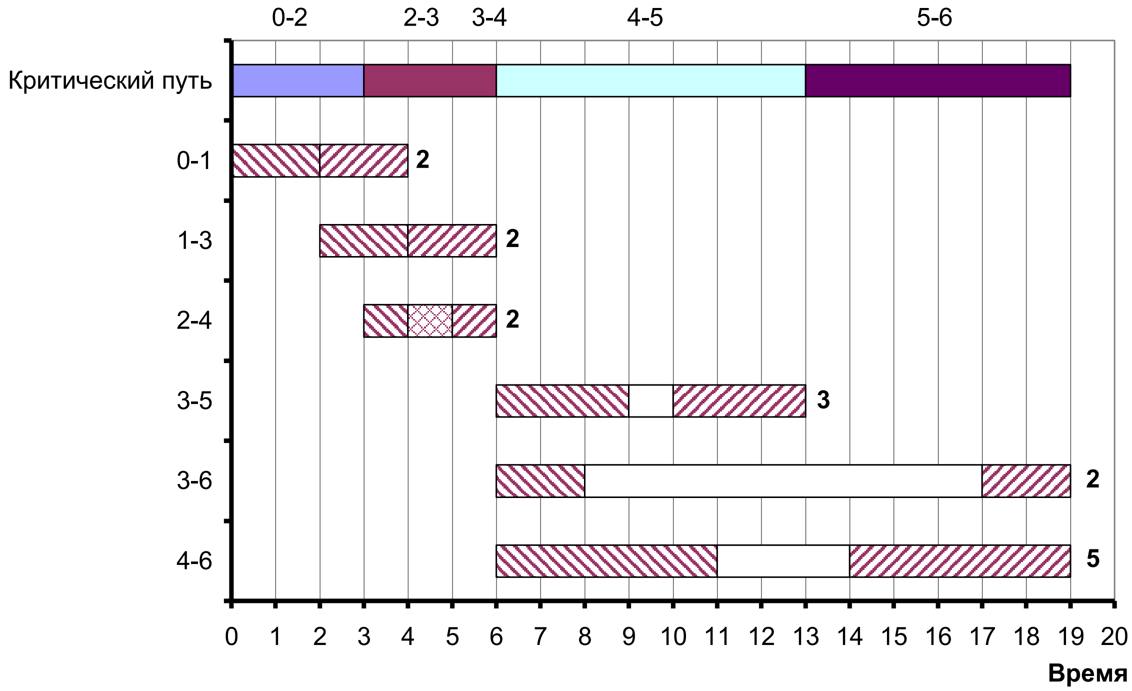

Рис. 11 Діаграма Ганта, з раннім й пізнім строком виконання некритичних операцій

В таблиці 3 наведений розрахунок необхідної чисельності трудових ресурсів для раннього строку виконання некритичних операцій нашого бізнес-процесу.

Таблиця 3

Період	Операція		**Осіб**	Операція		**Осіб**	Операція		**Осіб**	Операція		**Осіб**	**Всього, осіб**
0-1	0	2	**5**	0	1	**0**							**5**
1-2	0	2	**5**	0	1	**0**							**5**
2-3	0	2	**5**	1	3	**0**							**5**
3-4	2	3	**7**	1	3	**0**	2	4	**3**				**10**
4-5	2	3	**7**				2	4	**3**				**10**
5-6	2	3	**7**										**7**
6-7	4	5	**2**	3	5	**2**	3	6	**1**	4	6	**5**	**10**
7-8	4	5	**2**	3	5	**2**	3	6	**1**	4	6	**5**	**10**
8-9	4	5	**2**	3	5	**2**				4	6	**5**	**9**
9-10	4	5	**2**							4	6	**5**	**7**
10-11	4	5	**2**							4	6	**5**	**7**
11-12	4	5	**2**										**2**
12-13	4	5	**2**										**2**
13-14	5	6	**6**										**6**
14-15	5	6	**6**										**6**
15-16	5	6	**6**										**6**
16-17	5	6	**6**										**6**
17-18	5	6	**6**										**6**
18-19	5	6	**6**										**6**

В таблиці 4 наведений розрахунок необхідної чисельності трудових ресурсів для пізнього строку виконання некритичних операцій.

Таблиця 4

Період	Операція		**Осіб**	Операція		**Осіб**	Операція		**Осіб**	**Всього, осіб**
0-1	0	2	**5**							**5**
1-2	0	2	**5**							**5**
2-3	0	2	**5**	0	1	**0**				**5**
3-4	2	3	**7**	0	1	**0**				**7**
4-5	2	3	**7**	1	3	**0**	2	4	**3**	**10**
5-6	2	3	**7**	1	3	**0**	2	4	**3**	**10**
6-7	4	5	**2**							**2**
7-8	4	5	**2**							**2**
8-9	4	5	**2**							**2**
9-10	4	5	**2**							**2**
10-11	4	5	**2**	3	5	**2**				**4**
11-12	4	5	**2**	3	5	**2**				**4**
12-13	4	5	**2**	3	5	**2**				**4**
13-14	5	6	**6**							**6**
14-15	5	6	**6**				4	6	**5**	**11**
15-16	5	6	**6**				4	6	**5**	**11**
16-17	5	6	**6**				4	6	**5**	**11**
17-18	5	6	**6**	3	6	**1**	4	6	**5**	**12**
18-19	5	6	**6**	3	6	**1**	4	6	**5**	**12**

Далі, використовуючи дані таблиць 3 та 4, побудуємо діаграму потреб в робочій силі за умови, що в якості календарних дат для некритичних операцій обираються ранні (рис. 12), або пізні дати (рис. 13).

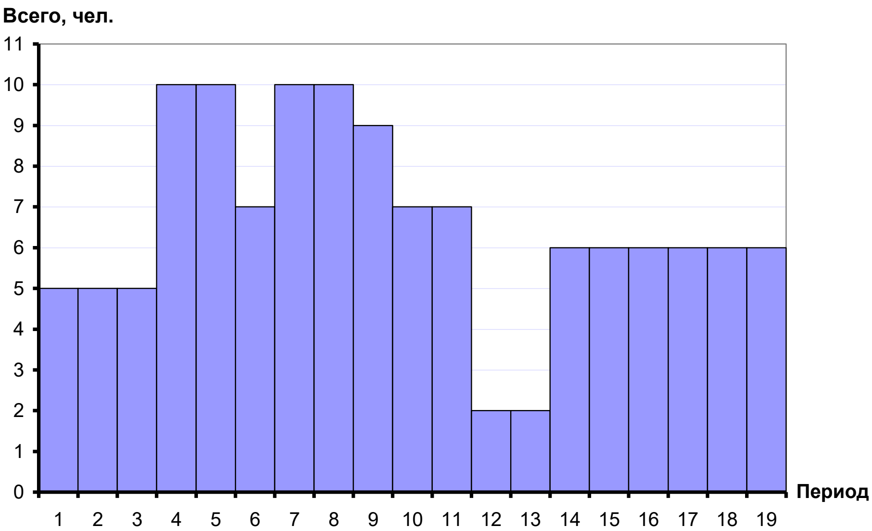

Рис. 12. Денні потреби в трудових ресурсах, ранній строк некритичних операцій

Як видно з рис. 13 та 14, при ранньому строку некритичних операцій, максимальна потреба в трудових ресурсах становить 10 осіб., а при пізньому – 12 осіб.

Однак, як видно з наведених вище розрахунків, незалежно від використання ранніх чи пізніх резервів часу для некритичних операцій, потреба в робочій силі для даного бізнес-процесу не може бути менше 10 осіб.

Це відбувається тому, що інтервал часу, протягом якого може бути виконана операція (2; 4), співпадає с інтервалом критичної операції (2; 3).

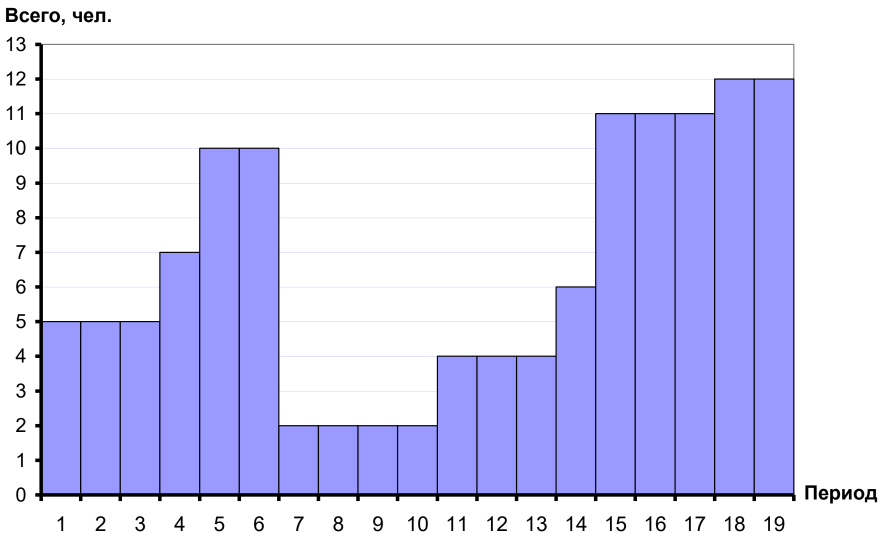

Рис. 13. Денні потреби в трудових ресурсах, пізній строк некритичних операцій

Графік потреб в робочій силі з раннім строком некритичних операцій може бути вдосконалений, з точки зору рівномірного використання ресурсів, шляхом вибору пізнього строку виконання операції (3; 5). В той же час, операцію (3; 6) слід розпочинати виконувати після завершення операції (4; 6).

Під час реалізації деяких проектів може бути поставлена мета не тільки забезпечити рівномірне використання ресурсів, але й обмеження максимальної потреби в них. Якщо дану мету не можна досягти шляхом перенесення календарних дат некритичних операцій, то для зменшення потреб в ресурсах, необхідно збільшувати тривалість деяких критичних операцій.

На даний час такий метод, який забезпечує вирішення задачі з рівномірного розподілу ресурсів, не розроблений. Тому, доводиться використовувати евристичні алгоритми, що побудовані на правилах використання часових резервів для некритичних операцій.

Послідовний метод. Суть методу полягає в тому, що ресурси, які були виділені на виконання операції, закріплюються за нею до її завершення.

Обмеженість ресурсів призводить до того, що не всі операції, початок яких за мережевою моделлю є можливим, можуть бути розпочаті одночасно. В таких ситуаціях потрібний критерій, який буде надавати перевагу тій чи іншій операції. Такі критерії можна сформулювати у вигляді наступних правил-переваг:

– спрямовувати ресурси на виконання операції, яка має найменший повний резерв часу (за інших рівних умов);

– спрямовувати ресурси на виконання максимально тривалої операції;

– спрямовувати ресурси на виконання операції, яка потребує найбільшої кількості ресурсів;

– спрямовувати ресурси на виконання операції з найменшим порядковим номером в мережевій моделі.

Під час виконання операцій згідно мережевої моделі, необхідно контролювати час, протягом якого витрати ресурсів відповідають їхньому плановому розподілу. Одночасно слід відслідковувати обсяги вільних ресурсів, оскільки початок відповідної операції визначається не лише її раннім строком настання, але й наявністю вільних ресурсів.

З огляду на вищесказане, алгоритм послідовного розподілу ресурсів складається з етапів:

1. Формується перелік операцій, які можуть бути розпочаті, з урахуванням умов їхньої послідовності (мережевої моделі). Згідно з обраним правилом переваги, для цих операцій визначаються пріоритети й напрямки розподілу вільних ресурсів.

2. Операції, на виконання яких було виділено ресурси, позначаються як «незавершені». Серед них є така операція, яка буде завершена раніше за всі інші: наявні ресурси будуть поповнюватись за рахунок вивільнених.

3. З множини виконуваних операцій виключаються вже виконані.

Описана процедура повторюється циклічно до тих пір, поки всі операції не будуть виконані. Строк завершення останньої операції визначає час виконання всього проекту.

<u>Мережеве планування в умовах невизначеності.</u> В ситуаціях, коли тривалості операцій T_{ij} точно не відомі (вони є випадковими величинами), то для їхньої оцінки проводиться експертне опитування за трьома часовими характеристиками:

– оптимістична (мінімальна) оцінка $T_{ij,min}$;

– песимістична (максимальна) оцінка $T_{ij,max}$;

– найбільш вірогідна оцінка $T_{ij,v}$.

Тоді, очікуваний час виконання операцій знаходять за формулою:

$$T_{ij} = \frac{T_{ij,min} + 4T_{ij,v} + T_{ij,max}}{6}$$

Якщо відомими є тільки крайні оцінки часу, тоді формула буде мати вигляд:

$$T_{ij} = \frac{2T_{ij,min} + 3T_{ij,max}}{5}$$

<u>Аналіз вартості й часу реалізації бізнес-процесу.</u> Припустимо, що очікувана тривалість виконання бізнес-процесу нас не влаштовує й ми хотіли би її скоротити. Це пов'язано з використанням додаткових ресурсів (збільшення чисельності працюючих, закупівля додаткового обладнання тощо).

Отже, скорочення термінів реалізації бізнес-процесу призводить до збільшення витрат на його реалізацію. Як наслідок, необхідно знайти компроміс між скороченням часу, необхідного для виконання всього проекту, та економією додаткових витрат на нього.

Для розрахунку мінімальних додаткових витрат, необхідних для скорочення часу реалізації бізнес-процесу, можна використовувати оптимізаційну модель у вигляді задачі лінійного програмування.

Введемо умовні позначення. Нехай:

T_{ij} – нормальна тривалість операції $(i;\quad j)$;

$T_{ij}^{'}$ – тривалість операції $(i;\quad j)$, з максимально можливим скороченням часу її виконання за рахунок додаткових ресурсів;

$M_{ij} = \left(T_{ij} - T_{ij}^{'}\right)$ – величина максимально можливого скорочення тривалості операції $(i;\quad j)$ за рахунок додаткових ресурсів;

B_{ij} – планові витрати на виконання операції $(i;\quad j)$, в нормальних умовах;

$B_{ij}^{'}$ – планові витрати на виконання операції $(i;\quad j)$, за максимально можливим скороченням часу її виконання;

$K_{ij} = \frac{B_{ij}^{'} - B_{ij}}{M_{ij}}$ – питомі витрати на скорочення тривалості операції $(i;\quad j)$;

T_0 – бажана тривалість виконання всього бізнес-процесу.

Введемо припущення про пропорційність: будь-яка додаткова частка скороченого часу на операцію, потребує постійної (незмінної в часі) частки додаткових витрат.

В якості змінних нашої задачі лінійного програмування виступають:

x_i – час настання і-ої події (відображає факт завершення всіх операцій, що входять в цей вузол), і = 1... n;

y_{ij} – обсяг скорочення часу виконання операції $(i;\quad j)$.

Враховуючи вказані умовні позначення, в кінцевому випадку наша модель набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} y_{ij} \rightarrow min \quad \text{(цільова функція)}$$

$x_j \geq x_i + T_{ij} - y_{ij}$ (обмеження);
$y_{ij} \leq M_{ij}$;
$x_n \leq T_0$;
$x_i \geq 0$; $y_{ij} \geq 0$ (умови невід’ємності).

Таким чином, дана модель буде мінімізувати загальні витрати на скорочення часу реалізації бізнес-процесу за умови того, що тривалість виконання всього проекту не повинна перевищувати цільове значення T_0.

Тема 2. Окремі випадки застосування методів мережевого планування в управлінні бізнес-процесами

План

1. Мережеві математичні моделі у задачах управління бізнес-процесами
2. Основні поняття та визначення теорії графів
3. Задача мінімізації мережі
4. Задача про найкоротший шлях
5. Задача про максимальний потік в мережі

2.1. Мережеві математичні моделі у задачах управління бізнес-процесами

Значну кількість практичних задач з управління бізнес-процесами, математично можна описати, як задачі лінійного програмування. Для даного типу оптимізаційних задач, існує універсальний алгоритм їхнього вирішення – це симплексний метод.

Однак, достатньо велика кількість задач лінійного програмування при їхньому вирішенні симплексним методом, вимагає наявності значних обчислювальних потужностей й може займати тривалий час, що не виправдовує застосування даного методу.

Сукупність таких задач може бути математично описана й вирішена більш раціонально в рамках спеціальних теорій. Вони розробляють ефективні алгоритми вирішення цих задач, об'єднаних в деякі однотипні класи. Таким чином, існує ряд практичних задач з управління бізнес-процесами, які зручно представляти, наприклад, у вигляді графічних структур (мережевих моделей).

Наприклад, можна формалізувати процес прийняття рішень з функціонування виробничої системи, транспортування продукції, передачі інформації тощо. Перераховані задачі можуть бути сформульовані й вирішені у вигляді задач лінійного програмування. Однак, у зв'язку з величезною кількістю змінних й обмежень, пряме застосування симплексного методу в мережевих задачах є недоцільним. Особлива структура таких задач дозволяє розробити більш ефективні алгоритми їхнього вирішення.

Розглянемо детальніше типові приклади спеціальних ЗЛП й методи їхнього розв’язання, а саме: модифікацію транспортної задачі й її постановку на мережевих моделях (графах).

Транспортна задача й її можливі економічні інтерпретації – це лише одна з багатьох задач, які можуть бути сформульовані й вирішені за допомогою мережевих моделей.

<u>Приклад 1.</u> Задача мінімізації мережі.

Дана оптимізаційна задача виникає в різних сферах управління бізнес-процесами, коли необхідно визначити максимально коротке з'єднання двох й більше заданих об'єктів (наприклад, найкоротший маршрут між обраними містами, розташування двох елементів з мінімальною відстанню на електронній схемі). *Розглянемо нижче змістовну постановку типової задачі мінімізації мережі.*

Припустимо, в деякому місті, населення якого перевищило 1 мільйон осіб, планується будівництво метрополітену, який повинен з'єднати центр міста й п'ять його районів підземною залізничною колією. Оцінивши можливі варіанти будівництва тунелів, були обрані найбільш ефективні, з точки зору переслідуваної мети. Маршрути прокладання тунелів повинні бути обрані таким чином, щоб мета будівництва досягалась за критерієм мінімальних витрат на будівництво, або мінімальної довжини тунелів. Й щоб кожен з районів міста був напряму з'єднаний підземною залізничною колією з його центром, або через інші райони.

Приклад 2. Задача про найкоротший шлях.

Оптова компанія здійснює продаж товарів через торгівельну мережу магазинів. Відомі всі можливі маршрути доставки товарів зі складу цієї компанії в кожен з магазинів, а також транспортні витрати на кожний маршрут (або, наприклад, довжина маршрутів). Для того щоб скоротити загальні витрати (або, сумарний кілометраж) на доставку товарів до магазинів, керівництву компанії слід обрати таку множину маршрутів, яка би дозволяла доставляти товари зі складу в кожен з магазинів безпосередньо, або через інші магазини, щоб мінімізувати витрати компанії.

Приклад 3. Задача про максимальний потік в мережі.

Дана задача виникає кожного разу, коли через певну мережу пропускається будь-який матеріальний, фінансовий, або інформаційний потік. При цьому, необхідно знайти такий розподіл елементів потоку по наявних каналах зв’язку, щоб за одиницю часу передавався його максимальний обсяг.

Наприклад, газова компанія з Азербайджану підписала контракт на постачання нафтопродуктів до Німеччини трубопроводом. Транспортування нафтопродуктів можливе через трубопроводи та паромні станції, що розташовані на території України. Пропускна здатність трубопроводів на різних ділянках також є різною. Перед керівництвом компанії постає питання: який максимально можливий обсяг нафтопродуктів можна транспортувати по існуючій мережі в одиницю часу?

Аналіз цих прикладів показує, що оптимізаційні мережеві задачі можуть бути описані наступними типами моделей:

1) мінімізація мережі (випадок 1);
2) знаходження найкоротшого шляху (випадок 2);
3) визначення максимальної пропускної здатності (випадок 3).

Всі розглянуті приклади мережевих задач можуть бути сформульовані й вирішені, як задачі лінійного програмування. Однак, у зв'язку з величезною кількістю змінних й обмеженістю обчислювальних можливостей, пряме застосування симплексного методу є недоцільним. Особлива структура цих *задач дозволяє створювати більш ефективні алгоритми, які в більшості випадків базуються на теорії лінійного програмування.*

Аналіз графічних структур дозволяє знаходити оптимальні рішення цих задач. Одним з таких представлень є мережа (граф). Теорія, яка розвиває алгоритми розв'язання задач на мережах (або графах), називається теорією графів. У загальному випадку, граф – це пара множин, елементи однієї з яких називаються вершинами, а інші – ребрами (або дугами).

2.2. Основні поняття та визначення теорії графів

Звичайний граф (мережа) G = (V, E) – це впорядкована пара множин, рис. 1, скінченної непорожньої множини V, елементи якої називаються **вершинами графу** G й довільної підмножини $E \subseteq \langle V \times V \rangle$, елементи якої називаються **ребрами** цього графа (мережі).

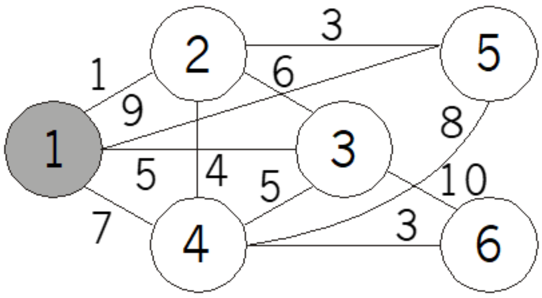

Рис. 1. Приклад звичайного графу

Основними властивостями звичайного графу є:

1. Множина ребер є обмеженою;
2. Ребра графу є неорієнтованими;
3. В графі відсутні петлі, тобто ребра виду $l = (v1, v1)$;
4. Граф *G* не містить кратних ребер (тобто $(v1, v2) = (u1, u2)$, якщо $v1 = u1$ та $v2 = u2$);

Два крайніх випадки звичайних n-вершинних графів:

1. Безреберний граф, де $E = \varnothing$;
2. Повний граф, де $E = \langle V \times V \rangle$, тобто будь-які дві його вершини є суміжними.

Далі, на основі рис. 1, розглянемо основні поняття й визначення теорії графів.

Послідовність вершин й ребер графу *v0 (v0, v1) v1 (v1, v2) v2 … vn* називається **маршрутом**, що з'єднує вершини *v0* та *vn*.

Маршрут називається **ланцюгом,** якщо всі його ребра є різними (не повторюються):

1 (1, 2) 2 (2, 3) 3 (3, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5.

Ланцюг називається **простим**, якщо всі його вершини є різними (не повторюються):

1 (1, 4) 4 (4, 5) 5.

Ланцюг, в якому початкова вершина *v0* співпадає з кінцевою вершиною *vn* й всі ребра є різними, називається **циклом**:

1 (1, 2) 2 (2, 3) 3 (3, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5 (5, 1) 1.

Цикл називається **простим**, якщо всі його вершини є різними, за винятком початкової *v0* й кінцевої *vn*, які є однаковими:

1 (1, 4) 4 (4, 2) 2 (2, 5) 5 (5, 1) 1.

Граф (мережа) називається **зв'язаним,** якщо будь-які дві його неспівпадаючі вершини з'єднані маршрутом (граф на рис. 1 є зв'язаним). В іншому випадку, він є незв'язаним, рис. 2.

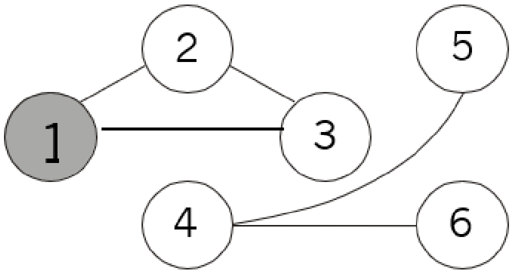

Рис. 2. Приклад незв'язаного графу

Ребро, після видалення якого граф зі зв'язаного перетворюється на незв'язаний, називається **мостом**.

Граф називається **зваженим**, якщо кожному з його ребер відповідає певне число ω(i), яке називається **вагою ребра**.

Тоді, під **вагою графу** розуміють суму ваг всіх його ребер, тобто:

$\boldsymbol{\omega(G) = \sum \omega(i)}$.

Зв'язаний граф, який не містить циклів, називається **деревом**, рис. 3.

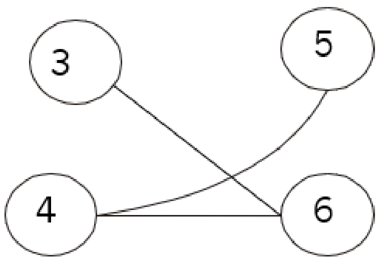

Рис. 3. Приклад дерева

Орієнтований граф – це пара множин (V, A), де V – множина вершин; A – множина орієнтованих ребер, які називаються **дугами**. Приклад орієнтованого графу наведений на рис. 4.

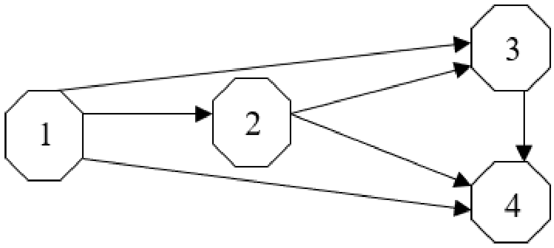

Рис. 4. Орієнтований граф

Якщо $a = (v1, v2)$ – це дуга, то вершини $v1$ й $v2$ називаються її **початком** та **кінцем** відповідно.

Якщо кожна дуга графу має певну вагу, то такий граф називається **орієнтованим зваженим**.

2.3. Задача мінімізації мережі

Задача мінімізації мережі полягає в пошуку ребер, які з'єднують між собою всі вузли мережі (тобто, всі вершини графу) й мають мінімальну загальну довжину, або вагу. Очевидно, що оптимальне вирішення цієї задачі не повинно містити циклів.

Для її вирішення існують ефективні алгоритми, що застосовуються до довільного зв'язного графа.

Алгоритм Краскала

1. Будуємо граф $T_1 = O_n + l_1$, приєднавши ребро l_1 мінімальної ваги до порожнього графа O_n на множині вершин V графа G. Якщо таких ребер декілька, тобто $\omega(l_1) = \omega(l_2) = min\ \omega(l)$, тоді обирається будь-яке з цих ребер. Це вказує на неоднозначність рішення (оптимальних рішень може бути декілька).
2. Якщо ми вже маємо побудований граф T_i, причому $i < (n - 1)$, то будуємо граф $T_{i+1} = T_i + l_{i+1}$, де l_{i+1} – ребро графу G, яке має мінімальну вагу серед ребер, що не входять до складу T_i й не утворюють з ними циклів.
3. В іншому випадку, якщо $i = (n - 1)$, то алгоритм завершує свою роботу. Тобто, ми побудували граф мінімальної ваги, який охоплює всі вершини.

Даний алгоритм на кожному кроці будує ациклічний граф, який на останньому кроці стає зв'язаним.

Розглянемо ще один алгоритм для вирішення задачі про мінімізацію мережі.

Алгоритм Прима

1. Будуємо граф $T_1 = O_n + l_1$, приєднавши ребро l_1 мінімальної ваги до порожнього графа O_n на множині вершин V графа G. Якщо таких ребер декілька, тобто $\omega(l_1) = \omega(l_2) = min\ \omega(l)$, тоді обирається будь-яке з цих ребер. По аналогії, це вказує на неоднозначність рішення (оптимальних рішень може бути декілька).

2. Якщо ми вже маємо побудований граф T_i, причому $i < (n - 1)$, то будуємо граф $T_{i+1} = T_i + l_{i+1}$, де l_{i+1} – ребро графу G мінімальної ваги, яке додається до однієї з вершин цього графу T_i.

3. В іншому випадку, якщо $i = (n - 1)$, то алгоритм завершує свою роботу. Тобто, ми побудували граф мінімальної ваги, який охоплює всі вершини.

На відміну від алгоритму Краскала, алгоритм Прима будує на кожному кроці зв'язний ациклічний граф.

<u>Примітка</u>

У деяких ситуаціях доводиться вирішувати задачу з максимізації мережі, будуючи зв'язаний граф не мінімальної, а максимальної ваги. В таких випадках, алгоритми Краскала й Прима також можуть використовуватись. Необхідно лише всюди замінити максимальні ваги ребер на максимальні.

<u>Приклад 4.</u> Телекомунікаційна компанія планує створити кабельну мережу для обслуговування п'яти нових будинків, рис. 6.

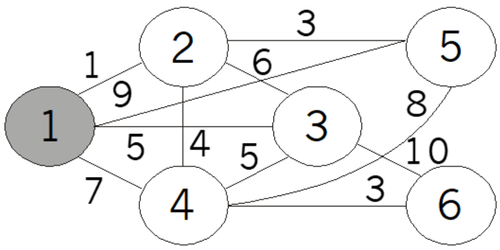

Рис. 6. Схема можливої прокладки кабелів

Цифри на ребрах вказують на довжину кабелю (км), що з'єднує відповідні вершини графу. Вузол №1 представляє собою ретранслятор сигналу, а решта вузлів (№2 – №6) відповідають п'яти новим будівлям.

Необхідно знайти такі ребра, які з'єднають всі вершини графу між собою, причому, вага графу повинна бути мінімальною. Таким чином, маємо задачу мінімізації мережі.

<u>Рішення</u>

Алгоритм Краскала

Упорядкуємо ребра графу, рис. 6, в порядку зростання їхніх ваг:

Ребра графу	Ваги ребер	Додаємо (+), або не додаємо (–) ребра
(1,2)	1	+
(4,6)	3	+

(2,5)	3	+
(2,4)	4	+
(1,3)	5	+ (–)
(3,4)	5	– (+)
(2,3)	6	–
(1,4)	7	–
(4,5)	8	–
(1,5)	9	–
(3,6)	10	–

Знаком «+» в таблиці позначені ті ребра, які ми включили до складу графу. Одне з ребер (1, 3), або (3, 4) можуть бути включені до даного графу.

Таким чином, мінімальна довжина кабелю, що з'єднує ретранслятор сигналу з новозбудованими будівлями, дорівнює:

$\omega = 1 + 3 + 3 + 4 + 5 = 16$ (км).

Алгоритм Прима

Логічним є розпочати вирішення даної задачі з вершини №1, де розташований ретранслятор сигналу.

T_1: $V_1 = \{1, 2\}$, $E_1 = \{(1, 2)\}$ (множина вершин та множина ребер, відповідно);

$T_2 = T_1 \cup (2, 5)$: $V_2 = \{1, 2, 5\}$, $E_2 = \{(1, 2), (2, 5)\}$;

$T_3 = T_2 \cup (2,4)$: $V_3 = \{1, 2, 4, 5\}$, $E_3 = \{(1, 2), (2, 5), (2, 4)\}$;

$T_4 = T_3 \cup (4,6)$: $V_4 = \{1,2,4,5,6\}$, $E_2 = \{(1, 2), (2, 5), (2, 4), (4, 6)\}$;

$$T_5 = \begin{cases} T_4 \cup (1,3)\colon \mathrm{V}_5 = \{1,2,3,4,5,6\},\ \mathrm{E}_5 = \{(1,2),(2,5),(2,4),(4,6),(1,3)\} \\ T_4 \cup (3,4)\colon \mathrm{V}_5 = \{1,2,3,4,5,6\},\ \mathrm{E}_5 = \{(1,2),(2,5),(2,4),(4,6),(3,4)\} \end{cases}$$

Оскільки $i = (n - 1) = 6 - 1 = 5$, то ітераційний процес побудови зв’язаного графу завершується, рис. 7.

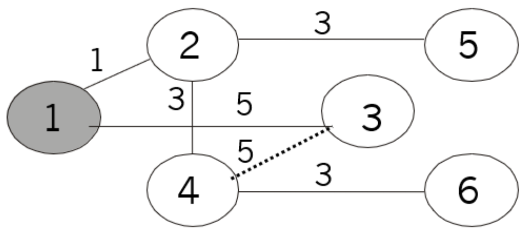

Рис. 7. Вирішення задачі мінімізації мережі

Таким чином, оптимальна мережа підключень нових будинків до ретранслятору, показана на рис. 7. Для її практичної реалізації, необхідний кабель мінімальної довжини у 16 км.

2.4. Задача про найкоротший шлях

Задача про найкоротший шлях, зазвичай вирішується на орієнтованих графах.

Нехай G = (V, A) – орієнтований зважений граф. Задача про найкоротший шлях полягає в тому, щоб знайти шлях мінімальної ваги, що з'єднує задані початкову й кінцеву вершини графа G за умови, що існує хоча б один такий шлях.

Початкова й кінцева вершини позначаються відповідно s й t. Таким чином, (s, t) – це шлях мінімальної ваги, який будемо називати **найкоротшим (s, t)-шляхом.**

Розглянемо випадок, коли ваги всіх дуг графу є невід'ємними. Тобто, ($\omega(l) \geq 0$, $\forall\ l \in A$). На сьогоднішній день існує ефективний алгоритм побудови найкоротшого шляху в графі з невід'ємними вагами дуг, запропонований Е. Дейкстрою у 1959 році.

<u>Сутність алгоритму.</u> На кожній ітерації цього алгоритму, кожна вершина v графа G має мітку $l(v)$, яка може бути *постійною*, або *тимчасовою*:

– якщо мітка постійна, то $l(v)$ – це вага найкоротшого (s, v) шляху, який тільки існує;

– якщо мітка тимчасова, то $l(v)$ – це вага найкоротшого (s, v) шляху, який було знайдено на поточний момент, але який в подальшому може зменшитись в ході роботи алгоритму.

Ставши на деякій ітерації постійною, мітка $l(v)$ залишається такою до завершення роботи алгоритму.

Окрім мітки $l(v)$, кожна вершина v графа G, за винятком початкової вершини s, також пов'язана з іншою міткою – $\theta(v)$. На кожній ітерації, $\theta(v)$ показує номер вершини, що передує v у (s, v)-шляху, який має найменшу вагу серед усіх (s,v)-шляхів, що проходять через вершини, які отримали постійні мітки $l(v)$ до цього часу. За допомогою міток $\theta(v)$ можна легко відновити послідовність вершин, які складають найкоротший (s,v) шлях.

Перед початком першої ітерації алгоритму, вершина S має постійну мітку $l(s) = 0$, а l-мітки всіх інших вершин графу дорівнюють нескінченності й вони є тимчасовими.

Загальна ітерація алгоритму виглядає наступним чином. Нехай p – це вершина, яка отримала постійну мітку $l(p)$ на попередній ітерації. Перевіряємо всі вершини v, що є суміжними з вершиною p й які мають тимчасові мітки l, з метою покращення їхніх значень (зменшення):

– тимчасові мітки $l(v)$ суміжних до p вершин змінюють значення на $l(p) + \omega(p, v)$, якщо виконується умова: $l(v) > l(p) + \omega(p, v)$. Також змінюється мітка $\theta(v) = p$.

– якщо $l(v) \leq l(p) + \omega(p, v)$, то мітки θ та l вершини v на даній ітерації не змінюють своїх значень.

Алгоритм завершує свою роботу, коли мітка *l(t)* для останньої вершини *t* стає постійною. Тоді *l(t)* – це вага найкоротшого *(s, t)* шляху, який позначається, як P^*.

Отриманий оптимальний шлях з мінімальною вагою визначається за допомогою θ міток у зворотному порядку, від вершини *t* до вершини *s*.

Алгоритм Дейкстри

1. Перед початком ітераційного процесу, мітка *l* для першої вершини *s* буде дорівнювати $l(s) = 0$ й вона вважається постійною. Для всіх інших вершин *v* нашого графу, мітки приймають нескінченне значення $l(v) = \infty$ й вважаються тимчасовими. Також, остання вершина, яка отримала статус постійної мітки *l* – це вершина *p*, тобто, $p = s$.

2. Перевіряємо всі вершини *v*, що є суміжними з вершиною *p* й які мають тимчасові мітки *l*, з метою покращення їхніх значень (зменшення):

– якщо виконується умова: $l(v) > l(p) + \omega(p, v)$, то $l(v) = l(p) + \omega(p, v)$. Також змінюється мітка $\theta(v) = p$.

– якщо $l(v) \le l(p) + \omega(p, v)$, то мітки θ та *l* вершини *v* на даній ітерації не змінюють своїх значень.

3. Обираємо зі всієї множини вершин зі змінними мітками *l* ту вершину, для якої мітка *l* приймає найменше значення й переводимо її в статус постійної.

4. Запам’ятовуємо вершину, яка на останньому кроці отримала статус постійної: $p = v$.

5. Якщо мітка *l* останньої вершини графу отримала статус постійної, тобто, $p = t$, то ітераційний процес завершується. Переходимо до пункту 7.

6. Переходимо до пункту 2.

7. За допомогою міток θ визначаємо оптимальний маршрут *(s; t)* з мінімальною вагою. Він визначається у зворотному порядку, від вершини *t* до вершини *s*.

Зауваження

1. Алгоритм Дейкстри може застосовуватись не лише до орієнтованих, але й до неорієнтованих графів. Для цього, кожне неорієнтоване ребро графа *(u, v)*, з вагою $\omega(u, v)$, замінюється на пару дуг *(u, v)* та *(v, u)* однакової ваги.

3. Якщо етап 5 алгоритму модифікувати так, щоб він завершувався лише після того, як всі вершини отримають постійні мітки, то даний алгоритм побудує найкоротші шляхи від початкової вершини *s* до кожної з інших вершин графу.

Приклад 5. Задача про найкоротший шлях

Нехай, вхідний граф має вигляд, як показано на рис. 8. Необхідно знайти найкоротший шлях з вершини I до вершини IX.

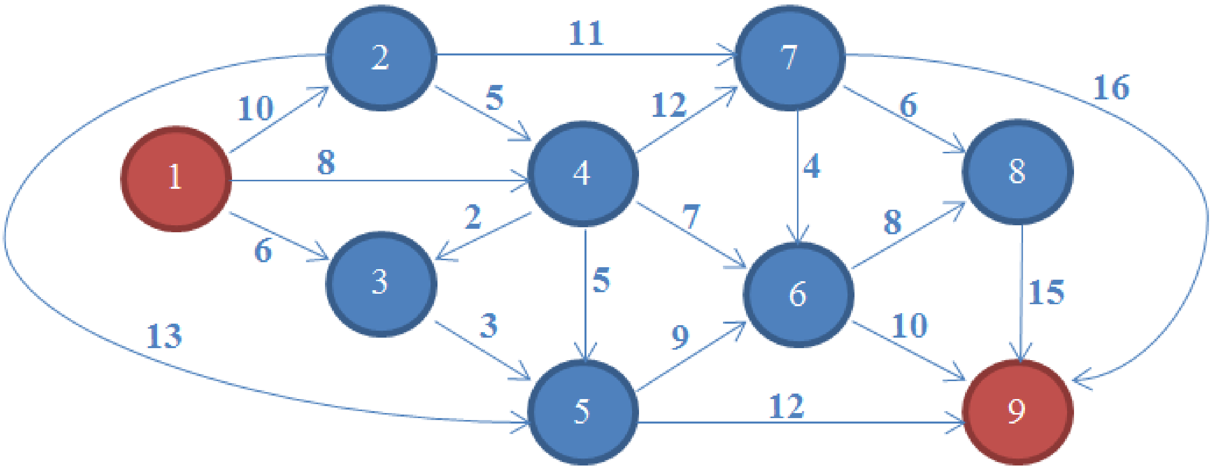

Рис. 8. Задача про пошук найкоротшого шляху з вершини I у IX

<u>Рішення.</u> Ітераційний процес зі знаходження постійних міток l й міток θ показаний в таблиці нижче:

Ітерація	Мітки	Вершини графу								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	L	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Q									
1	L	0	10	6	8	∞	∞	∞	∞	∞
	Q		1	1	1					
2	L	0	10	6	8	9	∞	∞	∞	∞
	Q		1	1	1	3				
3	L	0	10	6	8	9	15	20	∞	∞
	Q		1	1	1	3	4	4		
4	L	0	10	6	8	9	15	20	∞	21
	Q		1	1	1	3	4	4		5
5	L	0	10	6	8	9	15	20	∞	21
	Q		1	1	1	3	4	4		5
6	L	0	10	6	8	9	15	20	23	21
	Q		1	1	1	3	4	4	6	5
7	L	0	10	6	8	9	15	20	23	21
	Q		1	1	1	3	4	4	6	5
8	L	0	10	6	8	9	15	20	23	21
	Q		1	1	1	3	4	4	6	5

На сьомій ітерації кінцева вершина IX набула постійного статусу мітки l. Це означає, що найкоротший шлях до неї був знайдений й він дорівнює $l = 21$. Далі відновимо маршрут до кінцевої вершини IX, за допомогою міток θ:

– до IX вершини ми прийшли з вершини $\theta = 5$;

– до V вершини ми прийшли з вершини $\theta = 3$;

– до III вершини ми прийшли з вершини $\theta = 1$.

Таким чином, найкоротший маршрут має вигляд: I → III → V → IX.

2.5. Задача про максимальний потік в мережі

Нехай, маємо G = (V, A) – орієнтований зважений граф (мережу), де його вершина:

– $S^{/}$ є V називається **джерелом**, якщо немає дуг, які закінчуються у $S^{/}$;

– $S^{//}$ є V називається **стоком,** якщо немає дуг, що починаються у $S^{//}$.

Припустимо, що G має рівно одне джерело $S^{/}$ та рівно один сток $S^{//}$. Тоді, функція $\varphi(l)$ – це **ємність дуги** l, яка визначає **пропускну здатність**, або максимальну величину потоку, що проходить через дугу l.

Потоком в графі є функція μ, яка має властивості:

1. $\forall\ l \in A$: $0 \le \mu(l) \le \varphi(l)$, де $\mu(l)$ – потік через дугу l. Тобто, для будь-якої дуги графу l, пропущений через неї потік $\mu(l)$ не може перевищувати її пропускну здатність $\varphi(l)$;

2. $\forall\ u \in V$, $u \ne S^{/}$ и $u \ne S^{//}$: для будь-якої вершини u (якщо вона не є джерелом, чи стоком), сумарний потік, що увійшов до неї, дорівнює сумарному потоку, що вийшов з неї.

Величиною потоку $\boldsymbol{\rho(\mu)}$, який був пропущений через граф, називається сумарний потік, що вийшов з джерела $S^{/}$; або сумарний потік, що увійшов до стоку $S^{//}$.

Теорема. На графі G = (V, A), сумарний потік по всіх дугах, що вийшов з джерела, дорівнює сумарному потоку по всіх дугах, що увійшов у сток.

Постановка задачі про максимальний потік в мережі

Нехай, граф G = (V, A) має одне джерело $S^{/}$ й один сток $S^{//}$. Пропускна здатність кожної дуги l визначається функцією $\varphi(l)$. Величина потоку ресурсів, що були пропущені цим графом, визначається функцією $\boldsymbol{\rho(\mu)}$. Необхідно знайти максимальну величину потоку, який можна пропустити вказаним графом, тобто:

$$\boldsymbol{\rho(\mu) \rightarrow max}$$

Для вирішення задачі про максимальний потік в мережі, застосовують алгоритм Форда-Фалкерсона. Розглянемо його більш детально.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

1. Знаходимо довільний маршрут від вершини-джерела $S^{/}$ до вершини-стоку $S^{//}$, по якому може бути пропущений потік;

2. На знайденому маршруті визначаємо, яка величина потоку може бути пропущена ним, як мінімальне значення від невикористаної пропускної потужності кожної дуги, з яких складається цей маршрут;

3. Пропускаємо потік даним маршрутом. Коригуємо (зменшуємо) невикористану пропускну потужність кожної дуги, з яких складається цей маршрут;

4. Етапи (1)-(3) повторюються до тих пір, поки з вершини-джерела $S^{/}$ до вершини-стоку $S^{//}$ може бути пропущений потік. Якщо таких маршрутів більше не існує, то переходимо до етапу (5);

5. Обчислюємо максимальний потік, який був пропущений нашим графом, одним з наступних способів:

– сума всіх пропущених потоків на етапі (3) роботи алгоритму;

– сума всіх потоків, що вийшли з вершини-джерела $S^{/}$;

– сума всіх потоків, що увійшли до вершини-стоку $S^{//}$.

Зауваження

Якщо початковий граф G = (V, A) має дві вершини-джерела $S^{/}_1$ та $S^{/}_2$, то до нього додається ще одна вершина-джерело $S^{/}$, від якої йдуть дуги до $S^{/}_1$ та $S^{/}_2$. Пропускна здатність дуги ($S^{/}$; $S^{/}_1$) дорівнює пропускній здатності всіх дуг, які виходять з $S^{/}_1$; пропускна здатність дуги ($S^{/}$; $S^{/}_2$) дорівнює пропускній здатності всіх дуг, які виходять з $S^{/}_2$.

Аналогічно, якщо початковий граф G = (V, A) має дві вершини-стоки $S^{//}_1$ та $S^{//}_2$, то до нього додається ще одна вершина-сток $S^{//}$, до якої йдуть дуги від $S^{//}_1$ та $S^{//}_2$. Пропускна здатність дуги ($S^{//}_1$; $S^{//}$) дорівнює пропускній здатності всіх дуг, які входять до $S^{//}_1$; пропускна здатність дуги ($S^{//}_2$; $S^{//}$) дорівнює пропускній здатності всіх дуг, які входять до $S^{//}_2$.

Приклад 6. Задача про максимальний потік в мережі

Двоє користувачів інтернету обмінюються один з одним якоюсь інформацією. Їх робочі станції пов'язані між собою через мережу серверів. Більш того, передача інформації можлива за допомогою різних комбінацій серверів й каналів зв'язку, що з'єднують їх.

Який максимально можливий обсяг інформації може бути переданий за одиницю часу даною мережею від одного користувача до іншого, якщо нам відома пропускна здатність кожного каналу зв'язку?

Побудова математичної моделі

Припустимо, що користувачі $S^{/}$ та $S^{//}$ з'єднані між собою через 5 серверів (вузлів мережі), відповідними каналами зв'язку (дугами). Припустимо також, що нам відомі обсяги інформації, яку здатний пропускати кожний канал зв’язку за одиницю часу (ваги дуг).

Тоді, початкову задачу можна формалізувати у вигляді наступної мережевої моделі, рис. 9.

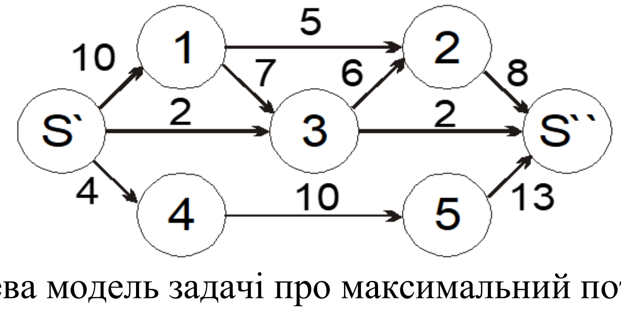

Рис. 9. Мережева модель задачі про максимальний потік

Знайти, який максимальний обсяг інформації, користувач $S^{/}$ може передати користувачу $S^{//}$ в одиницю часу.

Дана задача може бути ефективно вирішена за допомогою **алгоритму Форда-Фалкерсона**.

Рішення

1. Знайдемо довільний шлях, який з'єднує вершини графу $S^{/}$ та $S^{//}$

$S^{/} \to 1 \to 3 \to 2 \to S^{//}$

2. Обираємо мінімальну пропускну здатність з усіх дуг, що входять до складу обраного шляху

$\alpha_1 = \min\{10, 7, 6, 8\} = 6$

3. Ми знайшли максимально можливий обсяг потоку, який можна пропустити цим шляхом. Позначаємо його на графі над цими дугами, в дужках. Поряд з дужками записуємо пропускну здатність дуг, яка залишилась після пропуску даного потоку.

Дуга з нульовою залишковою пропускною здатністю, виключається з розгляду.

Кроки (1)-(3) повторюються до тих пір, поки існують шляхи, що з’єднують вершини $S^{/}$ та $S^{//}$.

Процес вирішення даної задачі представлений нижче, а проілюстрований на рис. 10.

$S^{/} \to 4 \to 5 \to S^{//}$, $\alpha_2 = \min\{4, 10, 13\} = 4$;

$S^{/} \to 1 \to 2 \to S^{//}$, $\alpha_3 = \min\{4, 5, 2\} = 2$;

$S^{/} \to 3 \to S^{//}$, $\alpha_4 = \min\{2, 2\} = 2$.

Після останнього маршруту, алгоритм завершує свою роботу, оскільки інших шляхів, які з'єднують вузли $S^{/}$ та $S^{//}$ більше не існує.

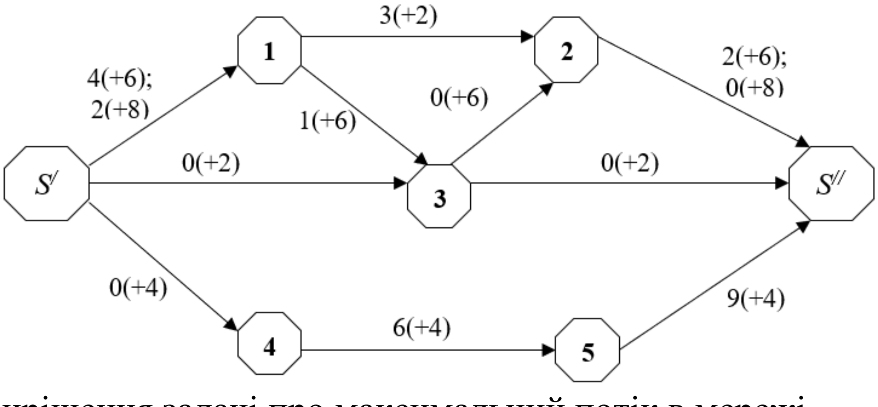

Рис. 10. Вирішення задачі про максимальний потік в мережі

Тоді, максимальний потік, який було пропущений нашою мережею, буде становити:

$\rho_{max} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 6 + 4 + 2 + 2 = 14.$

Таким чином, максимальний обсяг інформації, який може бути переданий даною мережею за одиницю часу, від вершини $S^{/}$ до $S^{//}$, або у зворотному напрямку, дорівнює 14 одиницям.

ТЕМА 3. ЕКОНОМІЧНИЙ РИЗИК: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

План

1. Ризикологія: основні поняття та визначення
2. Якісне вимірювання схильності до ризику: індивідуальна функція переваги

3.1. Ризикологія: основні поняття та визначення

Ми живимо у світі випадкових подій, де повністю ніколи неможливо передбачити розвиток ситуації: коливання курсу акцій чи криптовалют, коливання курсу гривні, де й коли відбудеться повітряна тривога й які будуть її наслідки та інші випадкові події нашого життя.

З іншої сторони, дуже часто, під час прийняття рішень ми вимушені стикатись з неповнотою інформації, яка є в нашому розпорядженні: фінансово-економічний стан наших конкурентів та їхні дії тощо.

Що спільного у цих двох випадках? У першому й другому випадку нам доводиться приймати рішення в умовах невизначеності.

Звісно, ви скажете, що неповноти інформації можна позбутись, спробувавши отримавши повну інформацію про об'єкт нашої уваги. Але на практиці дуже часто це може бути неможливо, або недоцільно. Головна причина полягає в тому, що вартість отримання повної інформації часто перевищує вигоди, які вона може принести. Ця концепція отримала назву обмеженої раціональності. Пошук будь-якої інформації вимагає ресурсів: часу, грошей та зусиль.

Наприклад, щоб знайти ідеальний телефон, ви можете витратити години часу на читання відгуків, порівняння характеристик й перегляд оглядів. У певний момент, ваші граничні витрати (кожна наступна година пошуку) почнуть перевищувати граничні вигоди (ймовірність знайти трохи кращу модель). Це явище відоме як закон спадної віддачі. Тому, в певний момент часу ви приймаєте рішення припинити пошуки кращого телефону й обмежитись тією інформацією, якою вже володієте, для його вибору.

Крім того, на багатьох ринках інформація може бути розподілена нерівномірно – це так звана асиметрія інформації. Коли одна сторона (наприклад, продавець) може мати більше інформації про свій товар чи послугу, ніж інша сторона (покупець). Цю асиметрію неможливо повністю усунути, оскільки повна прозорість може вимагати розкриття комерційної таємниці, що знижує конкурентоспроможність.

Також слід зважати, що обробка й аналіз повної інформації (за умови, що ми змогли її отримати), може вимагати значних обчислювальних ресурсів й часу. Й не факт, що ми зможемо зробити правильні висновки з такої обробки.

Таким чином, замість того щоб прагнути до **недосяжної повноти інформації**, раціональні економічні агенти зосереджуються на зборі

достатньої інформації, яка дозволяє приймати задовільні рішення з урахуванням часу та ресурсів, які вони готові витратити. Це є основою для концепції прийняття рішень в умовах **невизначеності**, яка є ключовою для сучасної економіки. Тобто, ми завжди вимушені приймати рішення в умовах невизначеності.

Невизначеність – це об’єктивна властивість будь-якої ситуації, що характеризується відсутністю повної інформації та неможливість точного передбачення майбутнього. *Це так званий стан «незнання».*

Наприклад, результат інвестування в абсолютно новий стартап є невизначеним, оскільки ніхто не може точно передбачити його успіх, або провал.

Ще приклад стосовно ситуації на ринку праці: кандидати на конкретну посаду не можуть володіти повною інформацією про корпоративну культуру компанії, а компанія не володіє інформацією про всі навички та якості потенційного працівника. Співбесіди та резюме є лише спробою зменшити цю невизначеність, але не усунути її повністю.

Невизначеність породжує ризик.

В економічній літературі спостерігається неоднозначність трактування поняття ризику.

Ризик – це економічна категорія, що пов’язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору й відображає рівень та ймовірність досягнення (або не досягнення) очікуваного результату (*В.В. Вітлінський*).

Ризик – це ймовірність виникнення збитків чи недоодержання доходів, в порівнянні з прогнозованим варіантом розвитку (*Л.І. Донець, І.Ю. Івченко*)

Наприклад, видача банківського кредиту. Банк може оцінити ризик дефолту позичальника на основі його кредитної історії, фінансового стану та статистики по галузі. Існують методики, за допомогою яких цю ймовірність можливо оцінити.

Об’єктом ризику є економічна система, ефективність та умови функціонування якої наперед невідомі.

Суб’єктом ризику є індивідуальна, або колективна ОПР (особа, що приймає рішення), яка має компетенцію управляти об’єктом ризику й зацікавлена в результатах його діяльності.

У наведених вище визначеннях, акцентується увага на можливих втратах й необхідності управління ризиками. Таким чином, ми підходимо до поняття ризикології.

Ризикологія – це міждисциплінарний науковий напрямок, що вивчає закономірності виникнення, розвитку та управління ризиками, в різних сферах людської діяльності.

Чому я сказав, що ризикологія, це міждисциплінарний науковий напрямок? Бо вона є не лише розділом економіки, чи фінансів, але охоплює також філософські, психологічні, математичні та соціологічні аспекти. Тому, наша перша лекція присвячена розумінню ризику як явища, його місця в економічній системі та ролі в прийнятті рішень.

На основі аналізу різних джерел можна виділити декілька ключових етапів формування й становлення ризикології, як наукового напряму.

1. Поява перших уявлень про теорію ймовірностей та ризик (XVII ст.). Основоположниками даного етапу вважаються математики Блез Паскаль та П'єр де Ферма, які в 1654 році заклали основи теорії ймовірностей. Це стало першим кроком до кількісної оцінки невизначеності та ризику. А безпосередньо сам ризик сприймався переважно в контексті азартних ігор.

2. Філософське осмислення ризику в економіці (XVIII – поч. XX ст.). Економісти та філософи того часу обговорювали роль ризику в бізнесі. Спочатку вважалося, що прибуток є винагородою за прийняття ризику. Але, на початку XX ст., американський економіст Френк Найт висловив думку, що оскільки ризик можна застрахувати, то прибуток не може бути винагородою за прийняття ризику. Замість цього, прибуток є винагородою за прийняття невизначеності.

3. Розвиток методології вимірювання економічних ризиків (середина XX ст.). Цей етап ознаменувався розвитком кількісних методів оцінки ризику. У 1952 р. Гаррі Марковіц опублікував роботу з сучасної портфельної теорії, де представив математичний підхід до управління інвестиційним ризиком. Він довів, що диверсифікація (розподіл інвестицій) може знизити загальний ризик портфеля без втрати прибутковості.

4. Становлення ризикології, як міждисциплінарної науки (друга половина XX ст. – до сьогоднішнього дня). Ризикологія набуває статусу самостійної, міждисциплінарної науки. Вона починає вивчати ризики не лише в економіці, а й у соціології, екології, психології та інших сферах.

Природа економічних ризиків:

1. Чисті (статичні) ризики – завжди несуть ймовірні втрати. В результаті розвитку подій, об’єкт ризику може або понести втрати, або частково чи повністю їх уникнути.

Приклади: пожежа на виробництві, крадіжка обладнання, банкрутство постачальника.

2. Спекулятивні (динамічні) ризики – характеризуються трьома можливими варіантами розвитку подій: втрати, нульовий результат, або прибуток.

Приклади: інвестування в акції сторонніх компанії, впровадження нового продукту на ринок, здійснення валютних операцій.

З попереднього викладеного матеріалу могло сформуватись уявлення, що економічний ризик – це завжди щось погане. Однак, в ринковій економіці, ризик виконує декілька важливих функцій.

Функції економічного ризику:

Інноваційна – ризик є рушійною силою прогресу. Він спонукає підприємців шукати нові, нетрадиційні рішення, що призводить до впровадження інновацій. Без готовності ризикувати неможливий економічний розвиток.

Регулятивна – ризик впливає на поведінку суб'єктів ринку. З одного боку, він стимулює до прийняття сміливих рішень, обіцяючи високу винагороду. З іншого боку, він дисциплінує, змушуючи зважувати всі "за" і "проти", запобігаючи необдуманим діям.

Захисна – ризик мобілізує ресурси для протидії потенційним втратам. Він спонукає до створення резервних фондів, страхування та розробки планів на випадок кризи, що підвищує стійкість бізнесу.

Аналітична – ризик вимагає постійного аналізу ситуації. Він змушує підприємства збирати та обробляти інформацію, оцінювати всі можливі сценарії та прогнозувати наслідки, що підвищує якість управління.

Для того, щоб краще зрозуміти природу економічних ризиків, виконується їхня класифікація.

Класифікація ризиків за ознаками:

1. За сферою виникнення:

– виробничі ризики – пов'язані з процесом виробництва (наприклад, поломки обладнання, зриви строків поставок сировини).

– комерційні ризики – пов'язані з процесом реалізації продукції на ринку (наприклад, падіння попиту, зміна цін конкурентів, часткове псування, або втрата товару під час зберігання чи транспортування).

– інвестиційні та фінансові ризики – пов’язані з інвестиційною та фінансовою діяльністю, а також з ситуацією на фінансових ринках (наприклад, інфляція, валютні коливання).

2. За джерелом виникнення:

– зовнішні ризики – пов'язані із зовнішніми факторами (стан світової чи національної економіки, політична ситуація у світі й країні, непередбачуваність законодавства). Ці ризики впливають на всіх без винятку суб’єктів господарювання. Причому, підприємства на них впливати не можуть, а можуть тільки прийняти.

– внутрішні ризики – пов'язані з внутрішніми факторами (якість управлінських рішень, рівень кваліфікації персоналу, іноваційність технологій, що застосовуються у виробництві).

3. За можливими втратами:

– допустимий ризик – можливі втрати не перевищують очікуваного прибутку;

– критичний ризик – можливі втрати перевищують очікуваний прибуток, але поступаються фінансовим можливостям підприємства.

– катастрофічний ризик – можливі втрати перевищують фінансові можливості підприємства й можуть призвести до його банкрутства.

3.2. Якісне вимірювання схильності до ризику: індивідуальна функція переваги

Кожна особа що приймає рішення в умовах невизначеності, має власну схильність до ризику, що напряму впливає на її вибір та поведінку.

Введемо умовні позначення. Нехай:

x – очікуваний виграш чи програш;

U(x) – функція переваги особи, що приймає рішення (ОПР).

Функція переваги характеризує цінність виграшу чи програшу для конкретної ОПР. Розглянемо графіки типових функцій переваги. По горизонталі будемо відкладати *x*, по вертикалі – *U(x)*.

1. Об'єктивна ОПР вважає, що цінність як виграшу так й програшу *U(x)* є пропорційною його обсягу *x*, рис. 1.

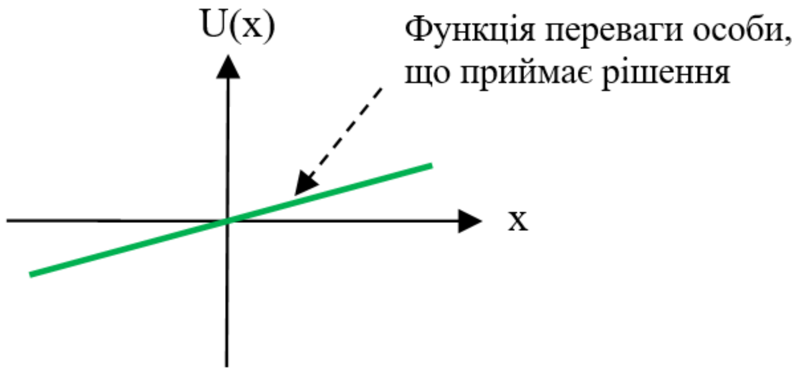

Рис. 1. Об'єктивна ОПР

2. Азартна ОПР, схильна до ризику – перебільшує цінність навіть невеликого виграшу й недооцінює значимість великих втрат, рис. 2.

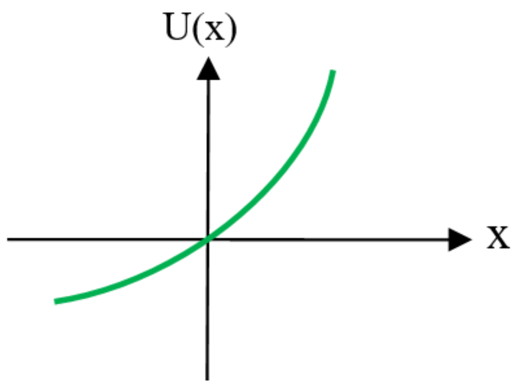

Рис. 2. Азартна ОПР, схильна до ризику

3. Обережна ОПР, не схильна до ризику – недооцінює цінність великого виграшу й переоцінює значимість навіть невеликих втрат, рис. 3.

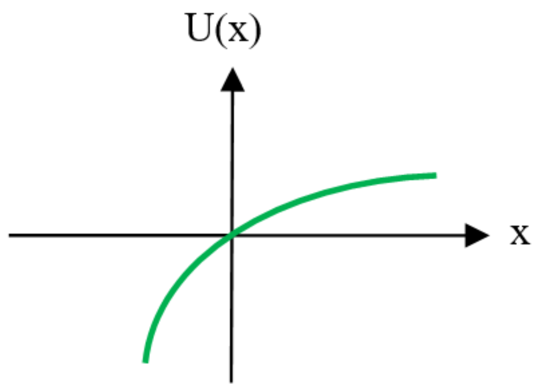

Рис. 3. Обережна ОПР, не схильна до ризику

4. Перебільшення цінності виграшу та програшу – ОПР перебільшує як цінність навіть незначного виграшу, так й програшу, рис. 4.

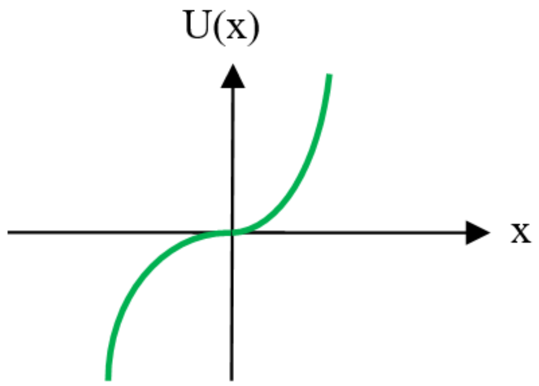

Рис. 4. Перебільшення цінності виграшу та програшу

Дана поведінка ще має назву ігрового розладу особистості, який притаманний особам, схильним до азартних ігор.

Особа з ігровим розладом часто перебільшує значимість як виграшів, так й програшів. Вона відчуває надмірну ейфорію навіть від невеликого виграшу, який сприймається нею, як підтвердження своєї «удачі». Це спонукає її до нових, більш ризикових рішень.

З іншої сторони, програш здатний викликати в неї сильні негативні емоції (розпач, гнів, провину) й бажання «відігратися», що лише погіршує ситуацію.

5. Нормальна ОПР – з невеликими сумами виграшу та програшу поводиться як об’єктивна ОПР; з великими сумами виграшу та програшу – з пересторогою та недовірою, рис. 5.

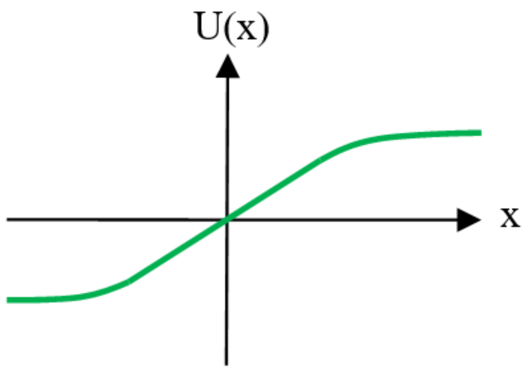

Рис. 5. Нормальна ОПР

Дані особливості людської психіки слід враховувати при підборі персоналу, оскільки різні ситуації потребують різного стилю управління й здатності йти на виправданий ризик.

ТЕМА 4. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ВИБОРУ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ Й РИЗИКУ

1. Класифікація критеріїв індивідуального вибору в умовах невизначеності
2. Максимінний критерій крайнього песимізму Вальда
3. Мінімаксний критерій мінімального ризику Севіджа
4. Критерій крайнього оптимізму
5. Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа
6. Похідний критерій Гурвіца, збалансована стратегія вибору

4.1. Класифікація критеріїв індивідуального вибору в умовах невизначеності

Будь-яке рішення в умовах неповноти інформації й невизначеності, приймається відповідно з деякою оціночною функцією (функцією переваги ОПР). Вибір такої функції переваги повинний здійснюватись з урахуванням кількісних характеристик ситуації й схильності ОПР до ризику.

На даний час найбільш широкого застосування набули наступні класичні критерії прийняття рішень:

- максимінний критерій Вальда – це критерій крайнього песимізму, що передбачає обережну стратегії поведінки. Вона виходить з того, що якщо найгірший варіант розвитку подій може статись, то він станеться;
- мінімаксний критерій Севіджа – критерій відносного песимізму;
- критерій оптимізму – відповідає оптимістичній стратегії вибору;
- критерій максимального середнього виграшу Байєса-Лапласа – це стратегія раціонального вибору.

Різне поєднання класичних критеріїв призводить до похідних. Найбільш розповсюдженим похідним критерієм є критерій Гурвіца, що відповідає збалансованій стратегії вибору.

Якщо існує така можливість, то всі перераховані вище критерії застосовуються до вивчаємої проблемної ситуації по черзі. Остаточне рішення в умовах невизначеності приймається за більшістю їхніх оцінок. Це дозволяє знизити вплив суб'єктивних факторів.

Нехай оптимальне рішення y^* визначається за допомогою коефіцієнта важливості рішень β. Тоді, загальне правило вибору записується, як:

$$y^* = \underset{\beta_i}{extremum}\,(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \tag{4.1}$$

Якщо коефіцієнт важливості рішень β повинний максимізуватись (кращому рішенню відповідає більше значення β), то правило вибору (4.1) приймає вигляд:

$$y^* = \underset{\beta_i}{max}\,(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \tag{4.2}$$

І навпаки, якщо коефіцієнт важливості рішень β повинний мінімізуватись (кращому рішенню відповідає менше значення β), то правило вибору (4.1) має вигляд:

$$y^* = \min_{\beta_i} (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m) \qquad (4.3)$$

Ці правила (4.2) та (4.3) є основою класичних й похідних критеріїв прийняття рішень. Розглянемо їх більш детально.

4.2. Максимінний критерій крайнього песимізму Вальда

Максимінний критерій Вальда (крайнього песимізму) застосовується, коли:

– про можливе виникнення тієї чи іншої ситуації нічого не відомо, або даний метод не потребує знання ймовірностей настання тієї чи іншої події;
– необхідно враховувати можливості настання різних ситуацій;
– рішення приймається й виконується лише 1 раз;
– необхідно виключити будь-який ризик. Тобто, ні за яких умов, обране рішення y^* не повинно бути гіршим, ніж рішення з множини Парето.

Оскільки критерій крайнього песимізму Вальда заснований на передумові про те, що якщо найгірша ситуація може статися, то вона станеться, то коефіцієнт важливості і-го рішення β_i є найгіршим значенням функції переваги для всіх можливих ситуацій.

1. Якщо функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу, то коефіцієнт важливості рішень обчислюється за правилом (4.4):

$$\beta_i = \min_j f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots m \qquad (4.4)$$

Тобто, для і-го рішення по всіх можливих j-их ситуаціях обирається та ситуація, яка має найменше значення функції переваги. Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись за правилом (4.5):

$$y^* = \max_i \left(\min_j f_{ij} \right) \qquad (4.5)$$

Тобто, обирається найкраще рішення з усіх найгірших можливих варіантів розвитку подій.

Правило вибору оптимального рішення: матриця ситуацій доповнюється двома стовпцями: перший стовпець заповнюється найменшими значеннями функції переваги f_{ij} для кожного рядка; у другому стовпці обирається варіант рішення, який має найбільше значення першого стовпця.

Приклад 1. Нехай, матриця рішень має такий вигляд:

Рішення	Ситуації		$\min\limits_{j} f_{ij}$	$y^* = \max\limits_{i}\left(\min\limits_{j} f_{ij}\right)$
	S1, тис. у.о.	S2, тис. у.о.		
$У_1$	1	100	1	
$У_2$	1,1	1,1	1,1	$1,1^*$

Таким чином, $у^* = У_2$ є оптимальним рішенням за критерієм крайнього песимізму.

Однак, якщо ситуація S2 виникає частіше, ніж S1 й оптимальне рішення реалізується не один раз, а багато разів, то найкращим рішенням буде $У_1$. Тобто, ігнорування ймовірностей настання різних ситуацій, є недоліком даного методу прийняття рішень.

Приклад 2. Необхідно прийняти рішення щодо обсягу інвестицій в новий проект (великі, середні, малі). Очікуваний прибуток залежить від майбутнього попиту (високий, середній, низький), ймовірності яких є невідомими.

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\min\limits_{j} f_{ij}$	$y^* = \max\limits_{i}\left(\min\limits_{j} f_{ij}\right)$
Великі	500	200	-100	-100	
Середні	400	250	50	50	
Малі	150	150	150	150	150*

Отже, оптимальним рішенням є малі інвестиції. Саме такі інвестиції забезпечують найвищий рівень гарантованого прибутку за умови настання будь-якої несприятливої ситуації.

2. Якщо функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає меншому числу, то коефіцієнт важливості рішень обчислюється за правилом (4.6):

$$\beta_i = \max\limits_{j} f_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots m \tag{4.6}$$

Тоді, оптимальне рішення буде визначатись за формулою:

$$y^* = \min\limits_{i}\left(\max\limits_{j} f_{ij}\right) \tag{4.7}$$

Приклад 3. Нехай матриця рішень має вигляд (Приклад №2 з множини Парето, Тема №2):

Рішення	Ситуації					$\max\limits_{j} f_{ij}$	$y^* = \min\limits_{i}\left(\max\limits_{j} f_{ij}\right)$
	S1	S2	S3	S4	S5		

$У_1$	5	3	6	3	10	10	
$У_3$	10	2	3	2	9	10	
$У_5$	1	5	2	5	2	5	5^*
$У_{10}$	11	1	5	1	4	11	
$У_{16}$	3	8	1	8	1	8	

Таким чином, $у^* = У_5$ є оптимальним рішенням.

4.3. Мінімаксний критерій мінімального ризику Севіджа

До мінімаксного критерію прийняття рішень Севіджа, висуваються ті ж самі вимоги, що й до критерію Вальда. Причому, найгіршим рішенням вважається рішення з максимальним ризиком, а не мінімальним виграшем.

Нехай, функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу.

Тоді, введемо умовні позначення. Нехай, ризик j-ої ситуації для кожного і-ого рішення описується матрицею різниць A_{ij} й обчислюється як:

$$A_{ij} = \max_i f_{ij} - f_{ij} \tag{4.8}$$

Матриця різниць показує величину втраченого виграшу, якщо в j-ій ситуації замість найкращого можливого рішення, обирається і-е рішення.

Коефіцієнт важливості рішень буде розраховуватися як:

$$\beta_i = \max_j \left(A_{ij}\right) \tag{4.9}$$

Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись, як:

$$y^* = \min_i \left(\max_j \left(A_{ij}\right)\right) \tag{4.10}$$

Тобто, до матриці різниць був застосований критерій Вальда.

Правило вибору оптимального рішення:

– за кожним стовпцем матриці рішень (за кожною ситуацією) знаходиться найбільше значення;

– від знайдених найбільших значень віднімаються значення функції переваги f_{ij} відповідних стовпців. Отримуємо матрицю різниць A_{ij} (матрицю ризиків);

– для кожного рядка матриці різниць A_{ij} знаходимо максимальні значення й обираємо найменше з них.

<u>Приклад 4.</u> За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції. Доповнимо матрицю виграшів додатковим рядком, в якому обчислимо максимальний прибуток для кожної ситуації (високого, середнього та низького попиту).

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.
Великі	500	200	-100
Середні	400	250	50
Малі	150	150	150
Максимальний прибуток	500	250	150

Далі обчислюємо матрицю різниць A_{ij}.

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\max\limits_{j}(A_{ij})$	$\min\limits_{i}\left(\max\limits_{j}(A_{ij})\right)$
Великі	0	50	250	250	
Середні	100	0	100	100	100*
Малі	350	100	0	350	

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції. Саме такі інвестиції мінімізують ризик недоотримання максимального прибутку, за умови невизначеності попиту.

4.4. Критерій крайнього оптимізму

Критерій крайнього оптимізму зосереджується на найкращому з найкращих результатів. Це ризикований підхід, який ігнорує можливі збитки. Він підходить для тих, хто готовий ризикувати заради великого виграшу.

Нехай, функція переваги f_{ij} задається таким чином, що її краще значення відповідає більшому числу. Тоді, коефіцієнт важливості рішень розраховується як:

$$\beta_i = \max_{j} f_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots m \tag{4.11}$$

Правило вибору оптимального рішення буде виглядати так:

$$y^* = \max_{i}\left(\max_{j} f_{ij}\right) \tag{4.12}$$

Якщо вимірювання переваг f_{ij} виконується на основі ранжувань (кращому рішенню відповідає менший ранг), то правило вибору буде мати вигляд:

$$y^* = \min_{i}\left(\min_{j} f_{ij}\right) \tag{4.13}$$

Даний метод також застосовується в умовах невизначеності, коли про ймовірності настання ситуацій нічого не відомо.

<u>Приклад 5.</u> За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції. Доповнимо матрицю виграшів двома стовпцями:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\max_{j} f_{ij}$	$\max_{i}\left(\max_{j} f_{ij}\right)$
Великі	500	200	-100	500	500*
Середні	400	250	50	400	
Малі	150	150	150	150	

Отже, оптимальним рішенням є великі інвестиції. Оскільки саме вони, за сприятливих умов можуть принести найбільший прибуток.

4.5. Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа

Критерій максимуму середнього виграшу Байєса-Лапласа відповідає стратегії раціонального вибору. Для нього є характерними такі відмінні риси:

– вимагає знань про ймовірності настання тієї чи іншої події;

– рішення приймаються й виконуються багаторазово;

– за невеликої кількості впроваджень цих рішень, допускається певний ризик, а при нескінченній кількості впроваджень – будь-який ризик виключається.

Критерій Байєса-Лапласа є більш оптимістичним, ніж критерій Вальда, але вимагає більшого обсягу інформації (меншої невизначеності).

Функція переваги вимірюється тільки за **кількісною шкалою**. Коефіцієнти важливості рішень представляють собою середній виграш, який можна отримати від реалізації кожного рішення з урахуванням ймовірності настання кожної ситуації:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} p_j f_{ij}, \quad \text{для кожного} \quad i = 1, 2, \dots m \tag{4.14}$$

Де p_j – ймовірність настання j-ої ситуації, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$;
n – кількість можливих ситуацій з заданими ймовірностями;
f_{ij} – значення функції переваги, що є оцінкою i-го рішення в j-ій ситуації;
m – кількість можливих рішень, з яких слід обрати оптимальне.

Тоді, оптимальне рішення буде знаходитись, як:

$$Y^* = \max_{i} \beta_i \tag{4.15}$$

Правило вибору оптимального рішення:

– матриця значень функції переваги f_{ij} доповнюється рядком, в якому зазначаються ймовірності настання кожної події;

– матриця значень функції переваги f_{ij} доповнюється стовпцем, в якому обчислюється середній очікуваний виграш за формулою (4.14);

– зі стовпця середнього очікуваного виграшу обирається рішення з максимальним значенням β_i.

<u>Приклад 6.</u> За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції, коли ймовірності настання кожної події є відомими. Доповнимо матрицю виграшів двома стовпцями:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	β_i	$\max\limits_{i} \beta_i$
Великі	500	200	-100	245	
Середні	400	250	50	260	260*
Малі	150	150	150	150	
Ймовірності подій	0,4	0,35	0,25		

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції. Оскільки саме вони, за умови багаторазової реалізації проекту зможуть принести найбільший середній прибуток.

4.6. Похідний критерій Гурвіца, збалансована стратегія вибору

Критерій Гурвіца є різновидом стратегії прийняття раціональних рішень (збалансована позиція). Функція переваги знаходиться між точками зору крайнього оптимізму й крайнього песимізму. Застосування даного критерію не вимагає знання ймовірностей ситуацій.

Критерій може застосовуватись у випадках:
- про ймовірність настання ситуацій нічого невідомо;
- необхідно враховувати можливі варіанти виникнення ситуацій;
- буде реалізовано невелику кількість рішень;
- допускається певний ризик.

Правило вибору в кількісній шкалі:

$$Y_{HW}^{*} = \max_{i}[h \times \min_{j} f_{ij} + (1-h) \times \max_{j} f_{ij}] \qquad (4.16)$$

Де f_{ij} – значення функції переваги при оцінці і-го рішення в j-й ситуації;

h – коефіцієнт песимізму (ваговий коефіцієнт), який змінюється в діапазоні $0 \leq h \leq 1$.

Якщо h = 0, то рішення приймається за критерієм оптимізму;

Якщо h = 1 – за критерієм Вальда (критерій песимізму).

Той, хто приймає рішення, обирає коефіцієнт h на свій розсуд.

<u>Приклад 7.</u> За основу візьмемо Приклад №2 про інвестиції, коли коефіцієнт h = 0,5:

Інвестиції	Високий попит, тис. у.о.	Середній попит, тис. у.о.	Низький попит, тис. у.о.	$\min_{j} f_{ij}$	$\max_{j} f_{ij}$	Y_{HW}^{*}
Великі	500	200	-100	-100	500	200
Середні	400	250	50	50	400	225*
Малі	150	150	150	150	150	150

Отже, оптимальним рішенням є середні інвестиції.

У деяких випадках, критерій Гурвіца може призводити до завідомо невірних рішень.

Приклад 8. Використання критерію Гурвіца, h = 0,5.

	S1	S2	…	Sn	$\min_{j} f_{ij}$	$\max_{j} f_{ij}$	Y_{HW}^{*}
Y1	*10000*	*1*	...	*1*	1	10000	0,5*1+0,5*10000 = 5000,5*
Y2	*1*	*9999*	...	*9999*	1	9999	0,5 * 1 + 0,5 * 9999 = 5000

У цьому випадку, критерій Гурвіца надає перевагу рішенню Y1, хоча рішення Y2 є кращим.

На практиці, остаточні висновки слід робити на основі не одного, а узагальненої оцінки множини критеріїв, розглянутих вище.