Загальні й специфічні методи розв'язання задач та особливості їх застосування

Розв'язання однієї задачі різними методами сприяє формуванню й розвитку мислення й тому є важливим у контексті реалізації компетентнісного підходу до освітнього процесу.

Завдання. Назвіть кілька способів розв'язання рівняння $3x^2+7x-10=0$.

1) Застосування властивостей трапеції до задач на побудову обмеженими засобами (тільки лінійкою)

Теорема 4.1 Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції і через точку перетину її непаралельних сторін, ділить навпіл кожну із паралельних сторін трапеції.

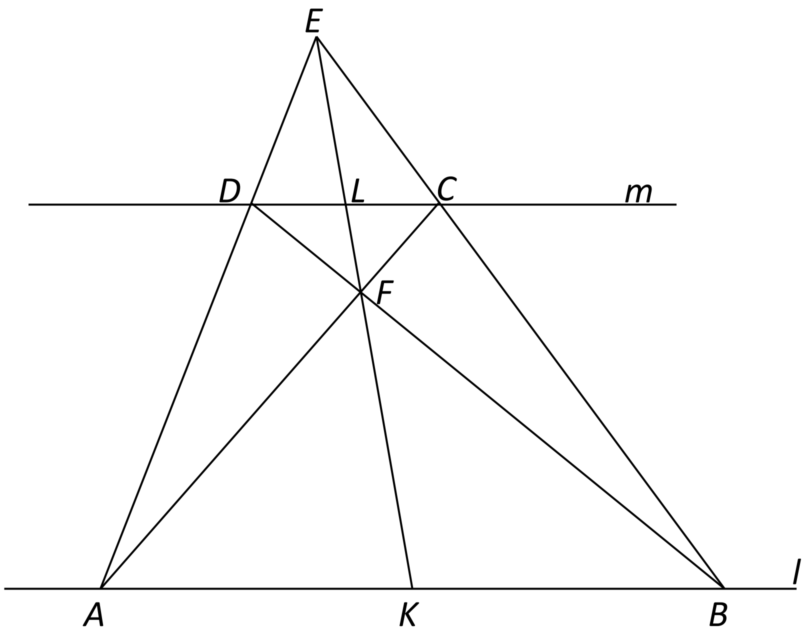


Рисунок 4.1 – Трапеція $ABCD$

Доведення. Розглянемо наступні пари подібних трикутників (рис. 4.1): ΔAKE і ΔDLE, ΔKBE і ΔLCE, ΔAKF і ΔCLF, ΔKBF і ΔLDF. Маємо:

$$\frac{AK}{DL}=\frac{KE}{LE},\ \frac{KB}{LC}=\frac{KE}{LE},\ \frac{AK}{LC}=\frac{KF}{FL},\ \frac{KB}{DL}=\frac{KF}{FL}.$$

Отже, $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{DL}{LC}$, $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{LC}{DL}$.

Помноживши почленно дві останні рівності, маємо:

$$\left(\frac{AK}{KB}\right)^2 = 1.$$

Отже, $AK = KB$.

Завдання. Довести теорему іншим способом.

Задача 4.1(застосування). Дано відрізок AB і його середина K. Через дану точку D провести пряму, паралельну прямій AB **(тільки лінійкою)**.

Розв'язання.

Задача 4.2 Прямі l і m паралельні. Поділити навпіл відрізок AB прямою l **(тільки лінійкою)**.

Розв'язання.

Задача 4.3 Через точку A, яка лежить поза даними паралельними прямими l і m, провести пряму, паралельну даним **(тільки лінійкою)**.

Розв'язання.

Задача 4.4 Дано дві паралельні прямі l та m. На прямій l задано відрізок AB. Збільшити відрізок AB в n разів (n – ціле число) **(тільки лінійкою)**.

Розв'язання.

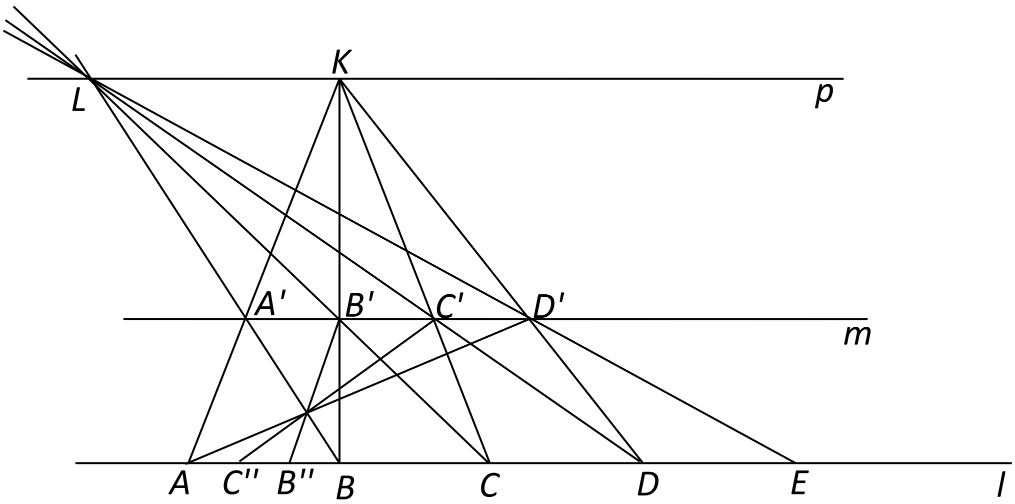


Рисунок 4.2 – Збільшення відрізка AB в n разів

Задача 4.5 (частинний випадок задачі 4.4). Дано дві паралельні прямі l та m, на прямій l відрізок AB і точка C. Побудувати на прямій l відрізок CD, рівний відрізку AB.

Розв'язання.

Задача 4.6 Дано дві паралельні прямі l та m й на прямій l відрізок AB. Поділити цей відрізок на n рівних частин.

Розв'язання.

2) Урок однієї задачі

Задача (основна). Якщо A, B, C, D – довільні чотири точки, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ (***Векторна рівність чотирьох точок***)

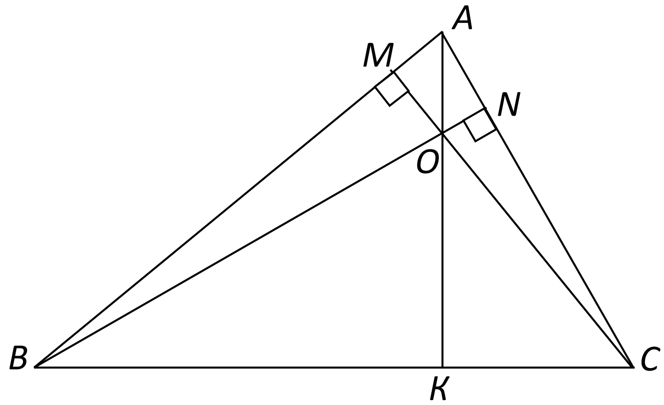
Доведення. Нехай O – довільна точка. Виразивши кожний вектор даної рівності через різницю векторів, які виходять з точки O, матимемо

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)+$$
$$+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\right)=0$$

Зауваження. Виведена векторна рівність є вірною незалежно від того, де розміщені дані чотири точки: на одній прямій, на одній площині, чи у просторі.

Задача 1 (застосування). Довести, що всі три висоти трикутника перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. Проведемо $[CM]\perp[AB]$ і $[BN]\perp[AC]$, причому $(CM)\cap(BN)=O$



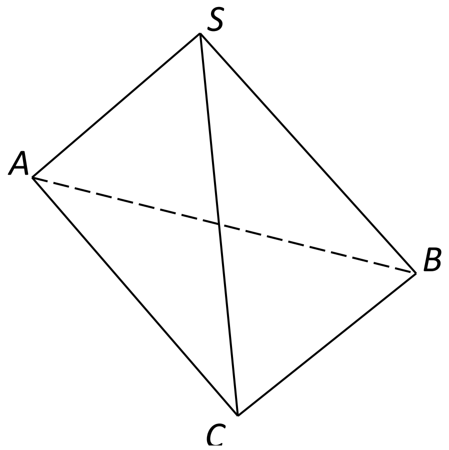
До чотирьох точок A, B, C і O застосовуємо векторну рівність $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

Оскільки $[CM]\perp[AB]$ і $[BN]\perp[AC]$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ і $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. Тоді з рівності чотирьох точок отримаємо $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, тобто $[BC]\perp[AK]$, а це означає, що $[AK]$ – третя висота цього трикутника, яка проходить через точку O.

Завдання. Знайти у підручнику доведення цієї задачі (теореми)

Задача 2 (застосування). Якщо дві пари мимобіжних ребер тетраедра взаємно перпендикулярні, то й ребра третьої пари також взаємно перпендикулярні. Довести це.

Доведення. Застосуємо до точок S, A, B, C доведену векторну рівність, яка для цих точок має вигляд $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{SB}=0$



За умовою задачі дві пари протилежних ребер перпендикулярні. Нехай $CA\perp SB$ і $AB\perp SC$. Тоді $\overline{CA}\cdot\overline{SB}=0$ і $\overline{AB}\cdot\overline{SC}=0$. Отже, для третьої пари ребер отримаємо $\overline{BC}\cdot\overline{SA}=0$, що означає $BC\perp SA$.

Завдання. Знайти у підручнику доведення цієї задачі (теореми)

3) Види індукції та їх роль в навчанні математики. Доведення методом математичної індукції

Завдання. Які є види індукції? Знайти у підручниках приклади використання різних видів індукції

Задача 1. Довести нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ для будь-якого натурального $n>1$.

Доведення. База індукції (n=2): $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, що доводиться, наприклад, двократним піднесенням до квадрату.

Індуктивне припущення ($n=k$): $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.

Індуктивний перехід: Доведемо, що

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Дійсно, з індуктивного припущення випливає $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Покажемо, що $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$. Оскільки для різниці квадратів лівої та правої частин останньої нерівності маємо

$$\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2-\left(\sqrt{k+1}\right)^2=\frac{1}{k+1}-1+2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}-\frac{k}{k+1}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\left(2-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)>0$$

при будь-якому натуральному k, то $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

Таким чином, за транзитивністю відношення «>», маємо $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

Висновок. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ для будь-якого натурального $n>1$.

Задача 2. Довести нерівність

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n), \quad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \text{ и } n \geqslant 1.$$

Розв'язання. При n=1 маємо рівність, при n=2 маємо вірну нерівність $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, (як це довести?) –два способи

Припустимо, що нерівність вірна при будь-якому $n<k$ (індукційне припущення). Доведемо вірність для $n=k$.

1) Нехай k парне. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського для векторів $\left(a^{\frac{k}{2}}, b^{\frac{k}{2}}\right)$ та (1,1) матимемо

$$(a^{k/2}+b^{\frac{k}{2}})^2 \leqslant (1^2+1^2)(a^k+b^k)=2(a^k+b^k)$$

Оскільки $k/2<k$, то, ***використавши індуктивне припущення***, отримаємо

$$(a+b)^k \leqslant ((a+b)^{k/2})^2 \leqslant (2^{\frac{k}{2}-1}\cdot(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}}))^2=$$
$$=2^{k-2}\cdot(a^{\frac{k}{2}}+b^{\frac{k}{2}})^2 \leqslant 2^{k-1}\cdot(a^k+b^k).$$

2) κ – непарне. За нерівністю Коші-Буняковського для векторів $\left(a^{\frac{k}{2}}, b^{\frac{k}{2}}\right)$

та $\left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}\right)$ отримаємо

$$\left(a^{1/2}a^{k/2} + b^{1/2}b^{k/2}\right)^2 \leqslant (a+b)(a^k + b^k),$$

Оскільки $\frac{k+1}{2} < k,$ то використавши індуктивне припущення, отримаємо

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= \left((a+b)^{(k+1)/2}\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(2^{(k+1)/2-1} \cdot \left(a^{(k+1)/2} + b^{(k+1)/2}\right)\right)^2 = \\ &= \left(2^{(k-1)/2} \cdot \left(a^{(k+1)/2} + b^{(k+1)/2}\right)\right)^2 = \\ &= 2^{k-1} \cdot \left(a^{1/2}a^{k/2} + b^{1/2}b^{k/2}\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant 2^{k-1}(a+b)(a^k + b^k).\end{aligned}$$

Задача 3. Довнсти, що для будь-якого натурального п вірна рівність

$$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3. \qquad (*)$$

Розв’язання. Позначимо ліву та праву частини відповідно R_n и S_n

При n=1 маємо 1=1 (база індукції).

Нехай $R_k = S_k$. (індктивне припущення). Доведемо, що $R_{k+1} = S_{k+1}$.

Виконаємо ланцюжок перетворень

$$\begin{aligned}R_{k+1} &= (1+2+\ldots+k+(k+1))^2 = \\ &= R_k + 2(1+2+\ldots+k)(k+1) + (k+1)^2 = \\ &= R_k + 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+1) + (k+1)^2 = \\ &= R_k + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3 = S_{k+1}.\end{aligned}$$

що й треба було довести.

Задача 4. Довести рівність для $n \geq 1$:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \qquad (*)$$

Розв’язання. Позначимо ліву та праву частини відповідно R_n и S_n

При n=1 виконується (база індукції).

Нехай $R_k = S_k$, тобто $$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right). \qquad (**)$$ (індктивне припущення).

Доведемо, що $R_{k+1} = S_{k+1}$. (***прокоментуйте ланцюжок перетворень***)

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)+2,$$

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k} = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)-1\right)+2,$$

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right),$$

$$\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k}} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)},$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right).$$

Задача 5. Довести, що число, складене з 3^n однакових цифр, ділиться без залишку на 3^n.

Розв'язання. Позначимо $R_n = \underbrace{aa\ldots a}_{3^n}$. При n=1 маємо число *aaa*, яке ділиться на 3.

Припускаємо, що число $\underbrace{aa\ldots a}_{3^k}$ ділиться на 3^k. Тоді

$$\begin{aligned}
R_{k+1} &= \underbrace{aa\ldots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\underbrace{aa\ldots a}_{3^k} = \\
&= \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot(10)^{2\cdot 3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot(10)^{3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} = \\
&= \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\cdot\left((10)^{2\cdot 3^k} + (10)^{3^k} + 1\right) = \\
&= R_k\cdot\left((10)^{2\cdot 3^k} - 1 + (10)^{3^k} - 1 + 3\right) = \\
&= R_k\cdot\left(\underbrace{99\ldots 9}_{2\cdot 3^k} + \underbrace{99\ldots 9}_{3^k} + 3\right).
\end{aligned}$$

4) Застосування вищої математики до розв'язування задач елементарної математики

Задача 1. Довести нерівність

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}79n^2. \qquad (4.1)$$

Доведення. Розглянемо функцію $y(x)=\sqrt{n^2-x^2}$. Тоді для кожного $x=1,2,\ldots,n-1$, $y(x)=a_x=\sqrt{n^2-x^2}$ і нерівність (4.1) можна записати у вигляді:

$$1\cdot y(1)+1\cdot y(2)+\ldots+1\cdot y(n)<0{,}79n^2.$$

Розглянемо частину кола радіусу n, розташованої в першій координатній чверті (рис. 4.1)

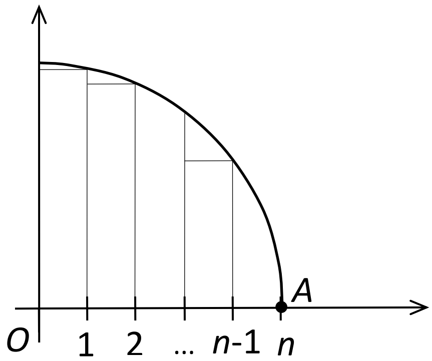


Рисунок 4.1 – Частина кола радіусу n

Розіб'ємо відрізок OA на n відрізків довжини 1 і на кожному з них побудуємо прямокутники (рис. 4.1). Тоді ліва частина нерівності менша за суму площ прямокутників, а ця сума менша за $\frac{\pi n^2}{4}$. Так як $\frac{\pi}{4}<0{,}79$, то нерівність (4.1) доведено.

Задача 2. Довести нерівність

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}>0{,}785n^2-n. \qquad (4.2)$$

Доведення.

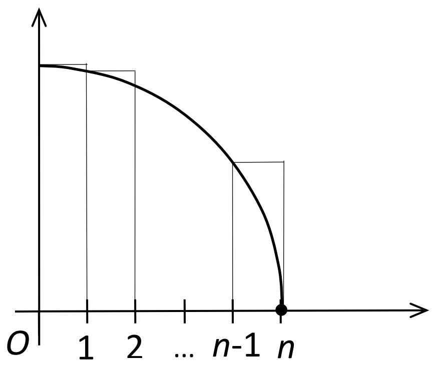


Рисунок 4.2 – Частина кола радіусу n

Запишемо n у такому вигляді: $n = \sqrt{n^2 - 0^2}$ і переносимо цей вираз у ліву частину нерівності (4.2) Тоді отримуємо:

$$\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} > \int_0^n \sqrt{n^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} n^2 > 0{,}785 n^2 .$$